Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykłady 1-2: Liczby zespolone

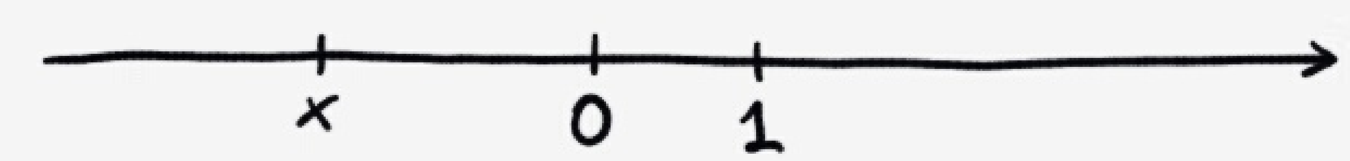
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \}$ – zbiór liczb wymiernych $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych $\quad \{ \lim_{n \to \infty} a_n \mid \text{ciąg } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ zbieżny i } \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in \mathbb{Q} \} = \mathbb{R}$

Interpretacja geometryczna $\mathbb{R}$ to punkty na prostej



$x \in \mathbb{R}$

Przykład: $\quad x^2 + 1 = 0, \quad x^2 = -1 \quad x = \pm\sqrt{-1}$ (?)

Oznaczmy jedno z rozwiązań równania $x^2 + 1 = 0$ przez i. Wtedy $i^2 + 1 = 0$

oraz $i^2 = -1$

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

$\underline{\Delta} = b^2 - 4ac \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$ 1) $\Delta \geq 0 \quad \Delta = (\sqrt{\Delta})^2 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0 \qquad \Delta = (-1)\cdot(-\Delta) = i^2(-\Delta) = i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \qquad x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i \qquad i^4 = i^3 \cdot i = (-i)\cdot i = -i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$

itd.

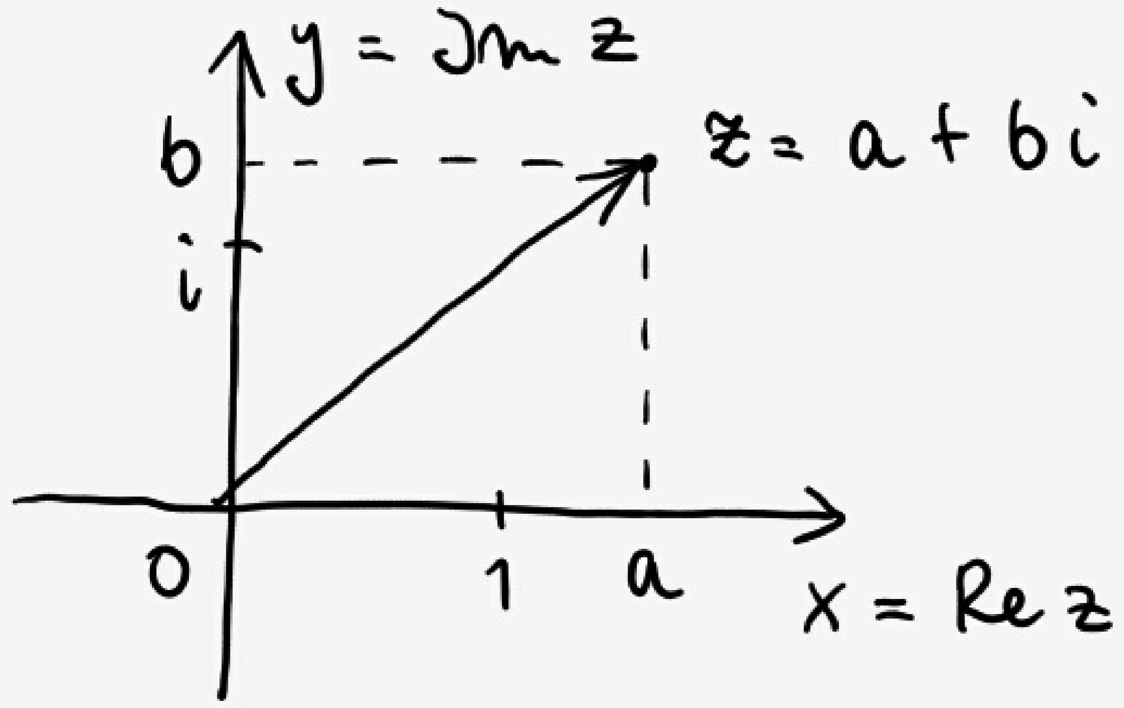
Liczba zespolona

$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad i^2 + 1 = 0$, $a = \mathrm{Re}\, z$ - część rzeczywista z, $b = \mathrm{Im}\, z$ część urojona z

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Interpretacja geometryczna



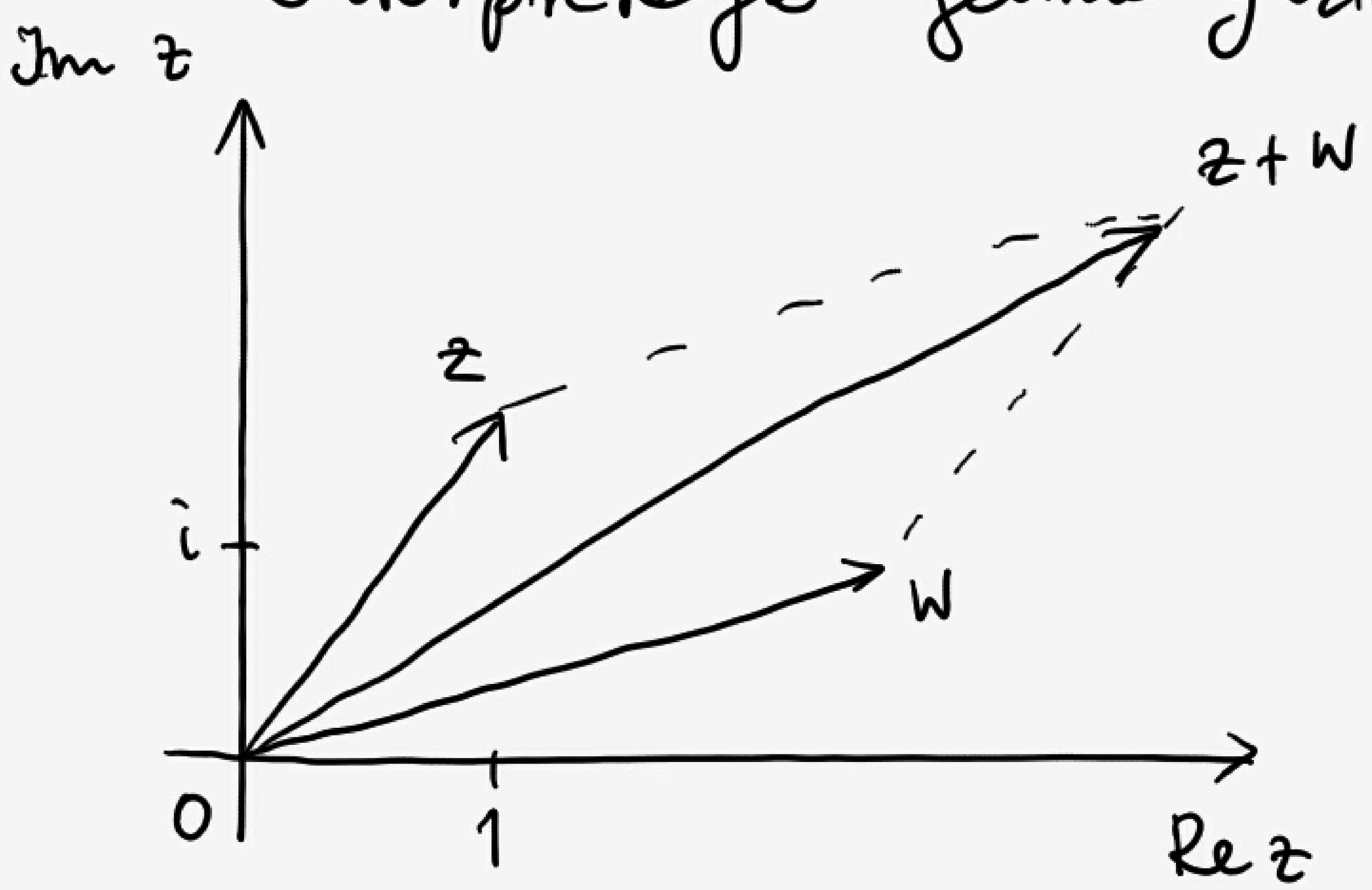
$1 = (1,0) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad x = x\cdot 1 = x\cdot(1,0) = (x,0)$

$i = (0,1)$

$z = a + bi = a\cdot 1 + b\cdot i = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$

Liczbę zespoloną $z = a+bi$ utożsamiamy z (a,b) parą liczb rzeczywistych. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

Interpretacja geometryczna dodawania



$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ - dodawanie

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ - mnożenie

Liczby zespolone to pary liczb rzeczywistych z powyższymi działaniami. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}$ (łac. complexus)

Własności działań w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$:

1) łączność dodawania: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$
2) Istnienie elementu neutralnego dodawania: $\exists w \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad w+z = z+w = z \quad (w = 0 = 0+0i)$
3) Istnienie elementu przeciwnego: $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad z+w = w+z = 0 \quad {}^{*}(w = -z)$
4) przemienność dodawania $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1+z_2 = z_2+z_1$
5) łączność mnożenia $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
6) Istnienie elementu neutranego mnożenia $\exists w \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad w \cdot z = z \cdot w = z \quad (w = 1 = 1+0i)$
7) Istnienie elementu odwrotnego $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad z \cdot w = w \cdot z = 1 \quad {}^{\triangle}(w = z^{-1})$
8) przemienność mnożenia $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
9) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania $\forall z_1, z_2, z_3 \quad z_1 \cdot (z_2+z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$^{*}\; z = a+bi \qquad -z = (-a)+(-b)i$

$^{\triangle}\; z \neq 0 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Dowód 7) $z \cdot z^{-1} = (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}i = 1$

Def. Ciałem nazywamy niepusty zbiór $\mathbb{F}$ z dwoma działaniami (wewnętrznymi, 2-argumentowymi)

$\mathbb{F}\times\mathbb{F} \ni (z_1, z_2) \longmapsto z_1 \oplus z_2 \in \mathbb{F}$ (dodawanie), $\mathbb{F}\times\mathbb{F} \ni (z_1, z_2) \longmapsto z_1 \odot z_2 \in \mathbb{F}$ (mnożenie) speł. warunki

1) łączność dodawania $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$ $(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3)$

2) Istnienie elementu neutralnego dodawania $\exists w \in \mathbb{F}$ $\forall z \in \mathbb{F}$ $w \oplus z = z \oplus w = z$ $w = 0$

3) Istnienie elementu przeciwnego $\forall z \in \mathbb{F}$ $\exists w \in \mathbb{F}$ $z \oplus w = w \oplus z = 0$ - element neutralny dodawania

4) przemienność dodawania $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{F}$ $z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$

5) łączność mnożenia $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$ $(z_1 \odot z_2) \odot z_3 = z_1 \odot (z_2 \odot z_3)$

6) Istnienie elementu neutralnego mnożenia $\exists w \in \mathbb{F}$ $\forall z \in \mathbb{F}$ $w \odot z = z \odot w = z$ $w = 1$

7) Istnienie elementu odwrotnego $\forall z \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ $\exists w \in \mathbb{F}$ $z \odot w = w \odot z = 1 \leftarrow$ element neutralny mnożenia

8) przemienność mnożenia $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{F}$ $z_1 \odot z_2 = z_2 \odot z_1$

9) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$ $z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) = z_1 \odot z_2 + z_1 \odot z_3$

Przykłady ciał: 1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, 2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, 3) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

4) p - liczba pierwsza $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ $n, m \in \mathbb{Z}_p$

$n +_p m$ = reszta z dzielenia $(n+m)$ przez p, $n \cdot_p m$ = reszta z dzielenia $n \cdot m$ przez p.

$(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ nie jest ciałem bo $2 \cdot_4 2 = 0$ jeśli $q = 2^{-1}$ w $\mathbb{Z}_4$ to $0 = q \cdot_4 0 = q \cdot_4 (2 \cdot_4 2) = (q \cdot_4 2) \cdot_4 2 = 1 \cdot_4 2 = 2$ sprzeczność

5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ z $+, \cdot$

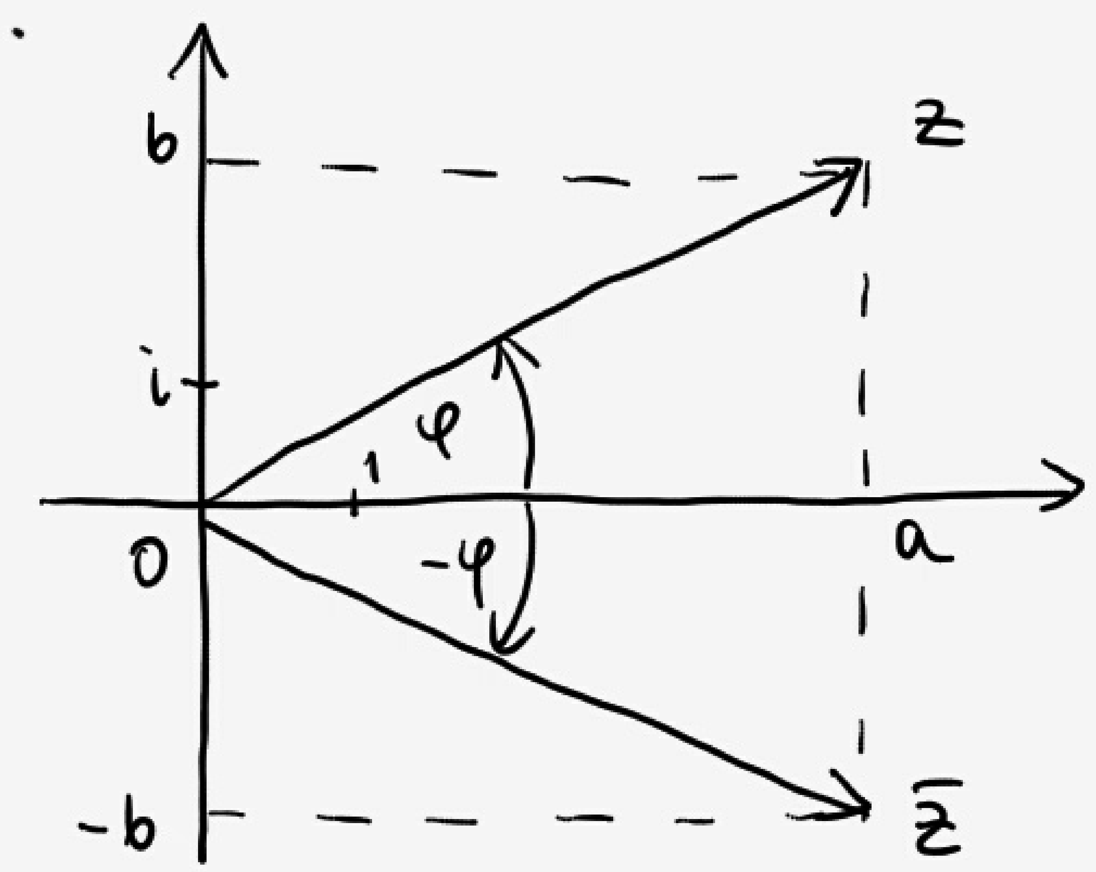
$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$

$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$

$\mathbb{Q}$ jest rozszerzeniem ciała $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ o pierwiastek równania $x^2 - 2 = 0$.

6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nie jest ciałem, bo $1 + (-1) = 0$ i $(-1) \notin \mathbb{N}$.

7) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest ciałem, bo $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ i $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.



$z = a + bi$

Def. Liczba sprzężona do z to $\bar{z} = a - bi$

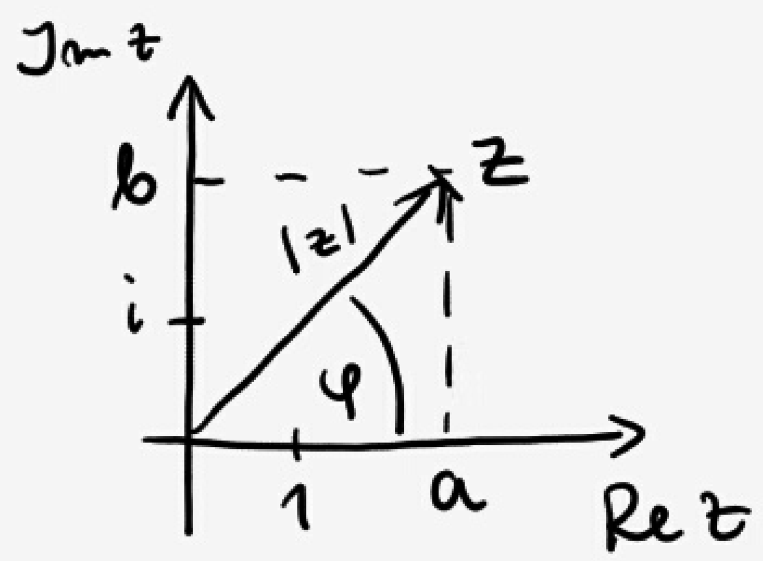
Tw. Własności sprzężenia $z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$

Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \to \bar{z} \in \mathbb{C}$ ma następujące własności: 1°/ jest bijekcją oraz

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ 2°/ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ 3°/ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ 4°/ $\overline{(\bar{z})} = z$ 5°/ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\bar{a} = a$

Dowód: Rachunek bezpośredni.

Def. Moduł liczby zespolonej $z = a + bi$ to $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



moduł to długość wektora (a, b)

Uwaga! $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ Wniosek. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Def. Kąt φ między osią rzeczywistą $(0x)$ a wektorem (a, b) to argument liczby zespolonej $z = a + bi$.

Uwaga! $\varphi + 2\pi$ to także argument z. Argument 0 nie jest określony.

$\frac{a}{|z|} = \cos\varphi \Rightarrow a = |z|\cos\varphi$ $\frac{b}{|z|} = \sin\varphi \Rightarrow b = |z|\sin\varphi$ $z = a + bi = |z|\cos\varphi + |z|\sin\varphi \cdot i$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej to $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Interpretacja geometryczna iloczynu liczb zespolonych : $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

Tw. $z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$

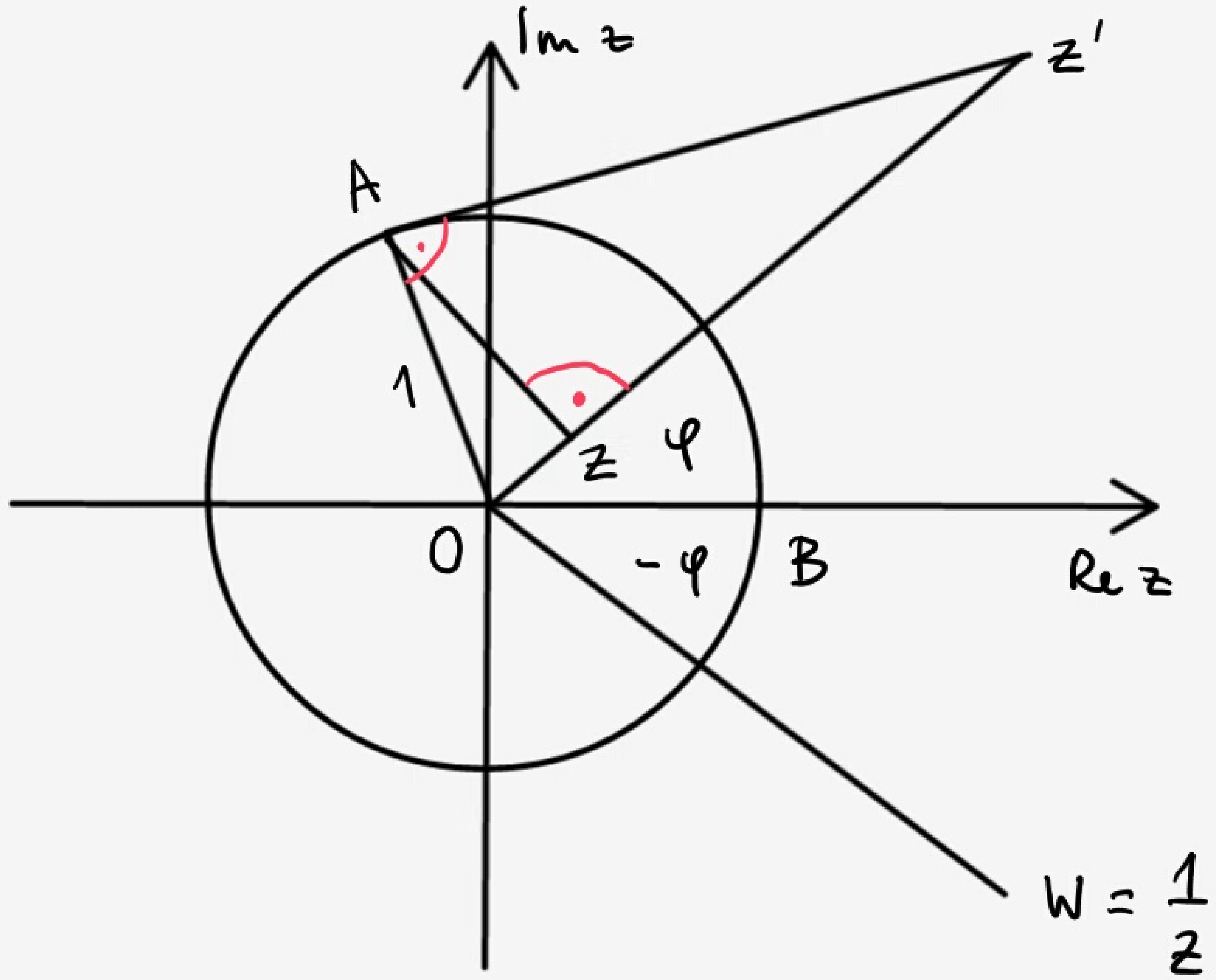
Dowód: Rachunek bezpośredni + wzory trygonometryczne.

Tw. $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

Dowód: $z \cdot z^{-1} = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

Wnioski z poprzednich twierdzeń

Tw. 1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ 2) $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$ 3) $w \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \wedge \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$



Konstrukcja $\frac{1}{z}$. Jeśli $|z| = 1$ to wystarczy wyznaczyć kąt $-\arg(z)$.

zał. $|z| < 1$

Prowadzimy prostą prostopadłą do odcinka $0z$ w punkcie z. Punkt przecięcia (jeden z dwóch dowolnie wybrany) z okręgiem $C(0;1)$ o środku 0 i promieniu 1 oznaczamy przez A. Prowadzimy prostą styczną do okręgu $C(0;1)$ w punkcie A. Punkt przecięcia tej prostej stycznej z prostą $0z$ to punkt z'.

$|\sphericalangle 0Az'| = |\sphericalangle 0zA| = \frac{\pi}{2}$ $\Delta 0zA$, $\Delta 0Az'$ są podobne $\frac{|0z'|}{|0A|} = \frac{|0A|}{|0z|}$ $\frac{|0z'|}{1} = \frac{1}{|z|}$

$|0z'| = \frac{1}{|z|}$ $|\sphericalangle B0W| = |\sphericalangle B0z|$ $|0W| = \frac{1}{|z|}$ $\arg(z) = \varphi$

$w = \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ $w = \frac{1}{z}$

Jeśli $|z| > 1$ to przeprowadzamy konstrukcję zamieniając z i z' miejscami.

Tw. Potęgowanie liczb zespolonych - wzór de Moivre'a)

$$\forall r \geq 0 \ \forall \varphi \in \mathbb{R} \ (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Dowód.: indukcja po n + iloczyn liczb w postaci trygonometrycznej.

Wniosek.

$$\cos n\varphi = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos^{n-2k}\varphi) \cdot (\sin^{2k}\varphi)$$

$$\sin n\varphi = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (\cos^{n-1-2k}\varphi)(\sin^{2k+1}\varphi)$$

Dowód.: wzór de Moivre'a + dwumian Newtona $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ oraz wzór na i^n

Postać wykładnicza liczby zespolonej:

Def.

$$e^{i\varphi} \stackrel{def}{=} (\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad e^z = e^{a+ib} \stackrel{def}{=} e^a \cdot e^{i\varphi} = e^a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Tw. $(e^{i\varphi})(e^{i\psi}) = e^{i(\varphi+\psi)}$, $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ $\forall n \in \mathbb{Z} \ \forall \varphi \in \mathbb{R} \ \forall \psi \in \mathbb{R}$

Dowód.: wzór na mnożenie w postaci trygonometrycznej oraz wzór de Moivre'a

Postać wykładnicza liczby zespolonej to $z = |z| e^{i\arg(z)}$.

Uwaga! $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definicja liczby Eulera

z wykładu analizy matematycznej $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$

analogicznie można pokazać, że $e^{i\varphi} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n$

Pierwiastki n-tego stopnia z liczb zespolonych

$w^2 = -1 \Rightarrow w = i \;,\; w = -i \qquad (-i)^2 = i^2 = -1$

$w^n = z \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z \iff |w|^n = |z| \;,\; n\psi = \varphi + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad \left(, \text{bo } \frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)$

Tw. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C}$ t, że $w^n = z$.

Jeśli $z \neq 0$ to rozwiązanie równania $w^n = z$ są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w 0 i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ i są dane wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \qquad w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Wniosek Rozwiązanie równania $z^n = 1$ wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$ i nazywają się pierwiastkami z 1

$$\varepsilon_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \qquad \varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{(k+l) \bmod n} \qquad w_k = w_0 \cdot \varepsilon_k$$

Tw. (Gaussa) Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony (posiada n pierwiastków zespolonych licząc z krotnościami)

Dowód na ostatnich stronach wykładu.

Wniosek. Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ rozkłada się na czynniki liniowe

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Stw. Jeżeli liczba $z \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych to liczba $\bar{z} \in \mathbb{C}$ jest także k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód.: $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ $\quad W(z) = 0 \quad 0 = \overline{W(z)} = \bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0$, $\bar{a}_k = a_k$ dla $k = 0, \ldots, n$

$$0 = \overline{W(z)} = W(\bar{z}) \quad \blacksquare$$

Wniosek. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na rzeczywiste czynniki liniowe i kwadratowe.

Dowód.: $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z \cdot \bar{z} = x^2 - (2 \operatorname{Re} z)x + |z|^2 \quad \blacksquare$

Tw. $\forall\, z, w \in \mathbb{C} \quad \big||z| - |w|\big| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$

Dowód: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a \;, \quad |z| \geq a$

$$|1+z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) = 1 + (z+\overline{z}) + z\cdot\overline{z} = 1 + 2a + |z|^2 \leq 1 + 2|z| + |z|^2 = (1+|z|)^2$$

$|1+z| \leq 1 + |z|$ zał., że $z \neq 0$ $\quad |z+w| = |z(1+z^{-1}w)| = |z|\,|1+z^{-1}w| \leq$

$$\leq |z|\left(1 + |z^{-1}w|\right) = |z|\left(1 + |z|^{-1}\cdot|w|\right) = |z| + |w| \Rightarrow |z+w| \leq |z| + |w|$$

$|z| = |z+w-w| \leq |z+w| + |w| \Rightarrow \quad |z| - |w| \leq |z+w|$ i $|w| - |z| \leq |w+z| = |z+w|$

$\Rightarrow \big||z| - |w|\big| \leq |z+w| \quad \blacksquare$

Uwaga. W $\mathbb{C}$ nie ma żadnego naturalnego porządku (relacji $>$ zgodnej z działaniami na $\mathbb{C}$) tzn.

Tw. Na $\mathbb{C}$ nie ma relacji >0 własnościach

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad z>0$ albo $z=0$ albo $-z>0$

(ii) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $\quad z>0$ i $w>0 \implies z+w>0$ i $z \cdot w>0$

Dowód: $z \neq 0 \implies z>0$ lub $-z>0$

$z>0 \quad z^2 = z \cdot z > 0$ $\qquad\qquad \forall z \neq 0 \quad z^2 > 0$

$-z>0 \quad z^2 = (-z)\cdot(-z) > 0$

$z=1 \quad 1 = 1^2 > 0$, $\quad z=i \quad i^2 = -1 > 0$

$1>0$ i $-1>0 \Rightarrow 0 = 1 + (-1) > 0$ $\qquad 0>0$ sprzeczność z (i) ■

Dowód podstawowego twierdzenia algebry

Lemat d'Alemberta

Jeżeli $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją wielomianową oraz $p(z_0) \neq 0$ to $\forall r>0 \ \exists z_1 \in \mathbb{C} \ |z_1 - z_0| < r \ |p(z_1)| < |p(z_0)|$.

Dowód lematu d'Alemberta (dowód Arganda)

Szukamy takiego $\Delta z \in \mathbb{C}$, że $|\Delta z| < r$ i $|p(z_0+\Delta z)| < |p(z_0)|$

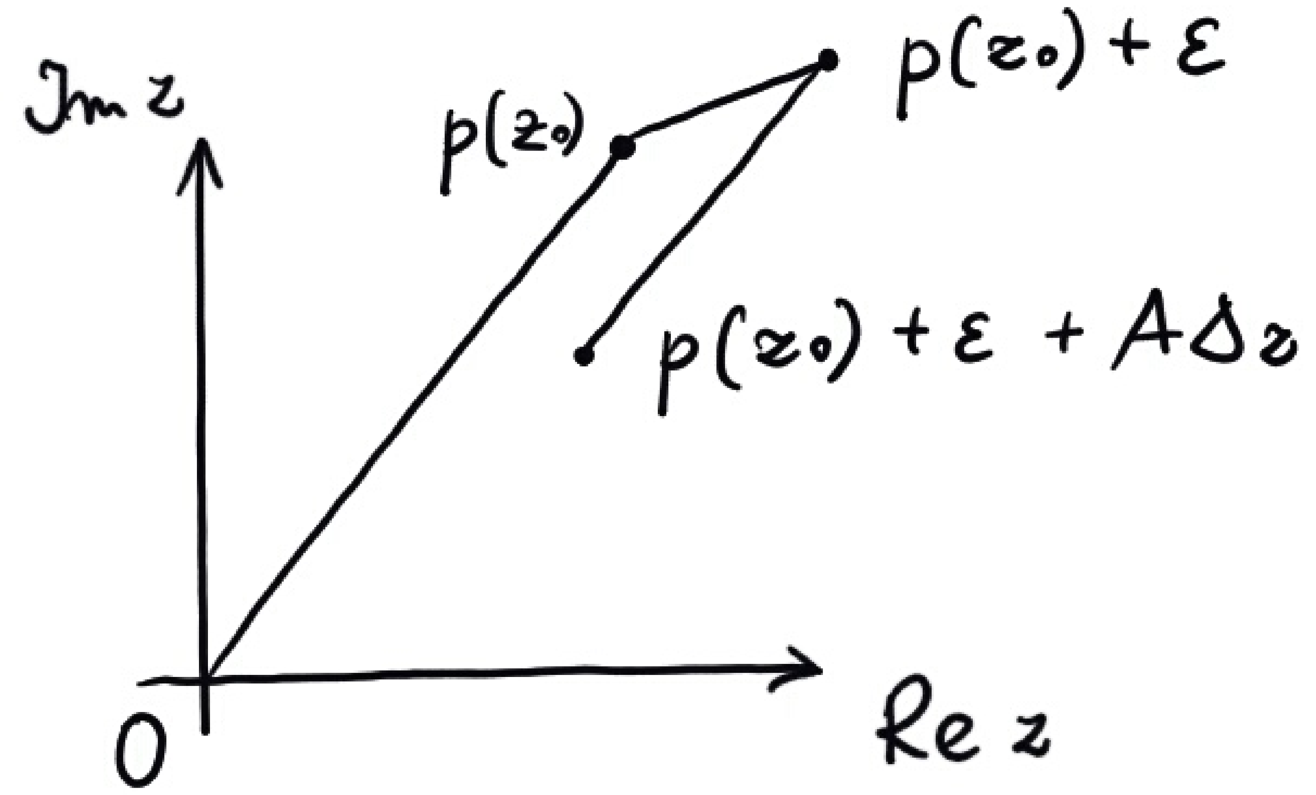
$p(z_0) = x_0 + i y_0 \quad |p(z_0)| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Czyli $p(z_0+\Delta z)$ ma być bliżej punktu $(0,0)$ niż $p(z_0)$. Niech $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$.

Wtedy $p(z_0+\Delta z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^{n-i} + \Delta z \left(n a_0 z_0^{n-1} + (n-1) a_1 z_0^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \right) + (\Delta z)^2 \cdot q(z_0, \Delta z) =$

$= p(z_0) + A \cdot \Delta z + \varepsilon$ A to stała, $|\varepsilon|$ jest małe w porównaniu do $|A \Delta z|$, gdyż $\frac{|\varepsilon|}{|A\Delta z|} = \frac{|(\Delta z)^2 q(z_0, \Delta z)|}{|A \Delta z|} =$

$= \frac{|\Delta z| |q(z_0, \Delta z)|}{|A|} \xrightarrow[|\Delta z| \to 0]{} 0$

Wybieramy Δz tak aby $A \Delta z$ miało kierunek przeciwny do $p(z_0)$ czyli $\operatorname{Arg}(A\Delta z) = -\operatorname{Arg} p(z_0)$. Patrz rysunek poniżej.



Wtedy $|p(z_0+\Delta z)| < |p(z_0)|$ co kończy dowód lematu.

Funkcja $|p(z)|$ jest funkcją ciągłą. Dla dostatecznie dużych $|z|$ $p(z) \simeq a_0 z^n$.
Stąd $|p(z)|$ rośnie wraz ze wzrostem $|z|$ poza dostatecznie dużym kołem $|z| \leq R$ $(**)$
Z Twierdzenia Weierstrassa funkcja ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$
przyjmuje wartości ekstremalne tzn minimalne i maksymalne. Niech $|p(w)| = \min_{|z| \leq R} |p(z)|$ $(*)$
$|p(w)| \geq 0$. Zał, że $|p(w)| > 0$. Wtedy jeżeli $|w| < R$
to z lematu d'Alemberta $\exists\, w_1 \in \mathbb{C}$ $|w_1| \leq R$ oraz $|p(w_1)| < |p(w)|$ sprzeczność z $(*)$
Jeśli $|w| = R$ z lemat d'Alamberta $\exists\, w_1$ $|p(w_1)| < |p(w)|$. Jeśli $|w_1| \leq R$ to sprzeczne z $(*)$. Jeżeli
$|w_1| > R$ to sprzeczne z $(**)$.

Czyli $|p(w)| = 0 \Rightarrow p(w) = 0$, co kończy dowód Tw. podstawowego algebry. ∎