Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometria 1, wykład 10-11: Przekształcenia liniowe, macierze, mnożenie macierzy

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ – p. liniowe $\quad x \in \mathbb{K}^n \quad y \in \mathbb{K}^m \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad A = [A^{(1)}, \dots, A^{(n)}]$

$$\varphi_A(x) = x_1 \cdot A^{(1)} + x_2 \cdot A^{(2)} + \dots + x_n \cdot A^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)} \qquad \varphi_A(x) = y \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m$$

Własności φ_A: $\forall\, u, v \in \mathbb{K}^n$
$$\varphi_A(u+v) = \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) \cdot A^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} u_j A^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} v_j A^{(j)} = \varphi_A(u) + \varphi_A(v)$$

$\forall\, u \in \mathbb{K}^n \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$
$$\varphi_A(\lambda \cdot u) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda u_j) \cdot A^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda (u_j A^{(j)}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j A^{(j)} = \lambda \varphi_A(u)$$

Stąd $\forall\, u, v \in \mathbb{K}^n \quad \varphi_A(u+v) = \varphi_A(u) + \varphi_A(v) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \ \forall\, u \in \mathbb{K}^n \quad \varphi_A(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi_A(u)$

Def. Przekształcenie przestrzeni liniowych V, W nad ciałem $\mathbb{K}$ $\varphi : V \to W$ nazywamy **przekształceniem liniowym** jeśli 1) $\forall\, u, v \in V \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \ \forall\, u \in V \quad \varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ liniowe $\quad \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$

$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ dla $j = 1, \ldots, n \quad e_1, \ldots, e_n$ – baza $\mathbb{K}^n \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \quad \varphi(u) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} u_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi(e_j)$

$\varphi(e_j) \in \mathbb{K}^m \quad \varphi(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad A = (a_{ij}) \quad \varphi(e_j) = A^{(j)} \quad \varphi(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j A^{(j)}$

$A = [\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)]$ – macierz przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Tw. Pomiędzy przekształceniami liniowymi $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ a macierzami o wymiarach $m \times n$ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Dowód: w, ì $\varphi_A = \varphi_{A'}$ tzn. $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \varphi_A(x) = \varphi_{A'}(x) \Rightarrow \varphi_A(e_j) = A^{(j)} \quad \varphi_{A'}(e_j) = A'^{(j)}$

$\Rightarrow A^{(j)} = A'^{(j)}$ dla $j = 1, \ldots, n \Rightarrow A = A'$

cd. dowodu zał., że $A = A'$ $\quad \varphi_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} x_j A'^{(j)} = \varphi_{A'}(x)$ ∎

$\dim V = n$ $\quad (e_1, \dots, e_n)$ – baza V $\quad \dim W = m$ $\quad (f_1, \dots, f_m)$ – baza W

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) \qquad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \qquad \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) f_i$$

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) f_i \qquad \varphi(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ – macierz przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ w bazach $(e_1, \dots, e_n)$ p. liniowej V oraz $(f_1, \dots, f_m)$ p. liniowej W.

— V, W – p. liniowe nad $\mathbb{K}$

$\varphi, \psi : V \to W$ przekształcenia liniowe, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(\varphi + \psi)(x) \overset{\text{def.}}{=} \varphi(x) + \psi(x) \qquad (\lambda \cdot \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot (\varphi(x))$$

$L(V,W) \overset{def}{=} \{ \varphi \mid \varphi : V \to W$ przekształcenie liniowe $\}$

Tw. 1) $\forall\, \varphi, \psi \in L(V,W) \quad \varphi + \psi \in L(V,W)$ 2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \ \forall\, \varphi \in L(V,W) \quad \lambda \cdot \varphi \in L(V,W)$

Dowód: 1) $(\varphi+\psi)(v+w) = \varphi(v+w) + \psi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) + \psi(v) + \psi(w) = \varphi(v) + \psi(v) + \varphi(w) + \psi(w) =$

$= (\varphi+\psi)(v) + (\varphi+\psi)(w) \qquad (\varphi+\psi)(\alpha \cdot v) = \varphi(\alpha \cdot v) + \psi(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \varphi(v) + \alpha \cdot \psi(v) = \alpha(\varphi(v) + \psi(v)) =$

$= \alpha((\varphi+\psi)(v))$ 2) $(\lambda\varphi)(v+w) = \lambda(\varphi(v+w)) = \lambda(\varphi(v) + \varphi(w)) = \lambda(\varphi(v)) + \lambda(\varphi(w)) = (\lambda\varphi)(v) + (\lambda\varphi)(w)$

$(\lambda\varphi)(\alpha v) = \lambda(\varphi(\alpha v)) = \lambda(\alpha\varphi(v)) = (\lambda\alpha)(\varphi(v)) = (\alpha\lambda)(\varphi(v)) = \alpha(\lambda(\varphi(v))) = \alpha((\lambda\varphi)(v))$

Wniosek:
$L(V,W)$ z działaniami dodawania $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi+\psi$ i mnożenia przez skalar $(\lambda,\varphi) \mapsto \lambda \cdot \varphi$ jest przestrzenią liniową.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \ni \varphi_A, \varphi_B$

$$(\varphi_A + \varphi_B)(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot A^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot B^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} x_j (A^{(j)} + B^{(j)}) = \varphi_C(x)$$

$(A+B)^{(j)} \overset{def}{=} A^{(j)} + B^{(j)} \qquad C = A+B$ jeśli $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$

$$(\lambda \varphi_A)(x) = \lambda(\varphi_A(x)) = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} x_j(\lambda \cdot A^{(j)}) = \varphi_C(x)$$

$(\lambda A)^{(j)} = \lambda \cdot A^{(j)}$ $\quad C = \lambda \cdot A$ $\quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad j = 1, \dots, n$

Tw. $\dim(L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)) = n \cdot m$

Dowód.: $A \overset{def}{=} E_{sp}$ jeśli $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } (i,j) = (s,p) \\ 0 & \text{w p.p} \end{cases}$

$$E_{s,p} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \leftarrow s \\ \uparrow p & \end{array}$$

$E_{s,p}$ dla $s = 1, \dots, m$ $\quad p = 1, \dots, n$ to baza $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\quad A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{i,j} \Rightarrow \varphi_A = \sum_i \sum_j a_{ij} \varphi_{E_{i,j}}$

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} E_{i,j} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_{i,j} = 0$ dla $i = 1, \dots, m$ $\quad j = 1, \dots, n$

$E_{i,j}$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad j = 1, \dots, n$ – l. niezależne więc jest to baza $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

Tw. Jeżeli $\dim V = m$ i $\dim W = n$ to $\dim L(V,W) = n \cdot m$

Dowód.: $e_1, \dots, e_n$ - baza V $\quad f_1, \dots, f_m$ - baza W

$\varphi_{s,p}(e_p) = f_s \qquad \varphi_{s,p}(e_j) = 0$ dla $j \neq p$

$$\sum_{s,p} \lambda_{s,p} \cdot \varphi_{s,p} \equiv 0 \qquad \sum_{s,p} \lambda_{s,p} \varphi_{s,p}(e_j) = \sum_{s,p} \lambda_{s,p} \delta_{jp} f_s = \sum_s \lambda_{s,j} f_s = 0 \Rightarrow \lambda_{s,j} = 0 \ \forall s \ \forall j$$

$\varphi_{s,p}$ $\quad s = 1, \dots, m$ $\quad p = 1, \dots, n$ $\quad$ l. niezależne

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) \qquad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varphi_{i,j}(e_j)$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varphi_{i,j}(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_{i,j}(x_j e_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_{i,j}(x)$$

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_{i,j}$ $\quad$ stąd $\varphi_{i,j}$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad j = 1, \dots, n$ $\quad$ jest bazą $L(V,W)$ ■

V, W, U – p. liniowe nad $\mathbb{K}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & W \arrow[r, "\psi"] & U \end{tikzcd}$$

Tw. $\forall \varphi \in L(V,W) \ \forall \psi \in L(W,U) \quad \psi \circ \varphi \in L(V,U)$

Dowód: $(\psi\circ\varphi)(v+w) = \psi(\varphi(v+w)) = \psi(\varphi(v)+\varphi(w)) = \psi(\varphi(v)) + \psi(\varphi(w)) = (\psi\circ\varphi)(v) + (\psi\circ\varphi)(w)$

$(\psi\circ\varphi)(\lambda v) = \psi(\varphi(\lambda v)) = \psi(\lambda \varphi(v)) = \lambda(\psi(\varphi(v))) = \lambda \cdot ((\psi\circ\varphi)(v))$ ■

Wniosek $\varphi_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \quad \varphi_B \in L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$. Wtedy $\varphi_B \circ \varphi_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l)$

Tw. Niech C taka macierz $l \times n$, że $\varphi_C = \varphi_B \circ \varphi_A$.
Wtedy $c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$ dla $i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, n$

Macierz C nazywamy iloczynem macierzy B i A i oznaczamy $B \cdot A$.

Dowód: $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xmapsto{\varphi_A} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \xmapsto{\varphi_B} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \quad y_s = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j \quad u_i = \sum_{s=1}^{m} b_{is} y_s = \sum_{s=1}^{m} b_{is} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j =$

$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} (b_{is} a_{sj}) \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ stąd $c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$ ■

$c_{ij} = B_{(i)} \cdot A^{(j)}$

$$c_{ij} = [b_{i1}, \dots, b_{im}] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = B_{(i)} \cdot A^{(j)}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{l1} \dots b_{lm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11}, \dots, c_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{l1}, \dots, c_{ln} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{(1)} \\ \vdots \\ B_{(l)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11}, \dots, c_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{l1}, \dots, c_{ln} \end{bmatrix} \end{array}$$

Uwaga! Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ to $A\cdot B \in M_{m\times l}(\mathbb{K})$.

1) jeśli $m \neq l$ to nie można wykonać $B\cdot A$

2) jeśli $m = l$ to $B\cdot A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ i jeśli $n \neq m$ to $A\cdot B$ i $B\cdot A$ są macierzami różnych wymiarów.

3) jeśli $m = l = n$ to $\exists A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ t. że $AB \neq BA$ np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B\cdot A = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B\cdot A$$

Tw. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ czyli mnożenie macierzy jest łączne.

Dowód.: 1) Korzystając z interpretacji macierzy jako przekształcenia liniowego: $\varphi_A\circ(\varphi_B\circ\varphi_C) = (\varphi_A\circ\varphi_B)\circ\varphi_C$

2) Korzystając ze wzoru na mnożenie

$$(B\cdot C)_{pj} = \sum_s b_{ps} c_{sj} \qquad (A\cdot(B\cdot C))_{ij} = \sum_p a_{ip}(B\cdot C)_{pj} = \sum_p a_{ip}\sum_s b_{ps}c_{sj} = \sum_p\sum_s a_{ip}b_{ps}c_{sj} =$$

$$= \sum_s\Big(\sum_p a_{ip}b_{ps}\Big)c_{sj} = \sum_s (A\cdot B)_{is}\, c_{sj} = ((A\cdot B)\cdot C)_{ij}$$

Rozdzielność mnożenia macierzy względem dodawania

Tw. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ oraz $D\cdot(A+B) = D\cdot A + D\cdot B$ dla dowolnych macierzy

$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C\in M_{n\times l}(\mathbb{K})$, $D\in M_{k\times m}(\mathbb{K})$

Dowód.: Analogicznie jak poprzedni można przeprowadzić na 2 sposoby.

1) $(\varphi_A+\varphi_B)\circ\varphi_C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{z def. sumy przekształceń}}}{=} \varphi_A\circ\varphi_C + \varphi_B\circ\varphi_C \qquad \varphi_D\circ(\varphi_A+\varphi_B) \underset{\substack{\uparrow\\ \varphi_D\text{ – liniowe}}}{=} \varphi_D\circ\varphi_A + \varphi_D\circ\varphi_B$

2) $\sum_s (a_{is}+b_{is})\cdot c_{sj} = \sum_s a_{is}\cdot c_{sj} + \sum_s b_{is}\cdot c_{sj} \qquad \sum_s d_{is}\cdot(a_{sj}+b_{sj}) = \sum_s d_{is}a_{sj} + \sum_s d_{is}b_{sj}$ ∎

Transpozycja macierzy

Def. Macierz transponowana macierzy $A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$ to macierz A^T dana wzorem

$$A^T = [A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}]$$

czyli jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{to} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \qquad A^T = (a_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$$

Własności transpozycji:

1) $(A^T)^T = A$ 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ 3) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$ 4) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Dowód: (1)–(3) oczywiste. 4) Niech $C = A\cdot B$ wtedy $c_{ij} = \sum_s a_{is} b_{sj}$, $(C^T)_{ij} = c_{ji}$

$(A^T)_{ij} = a_{ji}$, $(B^T)_{ij} = b_{ji}$, $(C^T)_{ij} = c_{ji} = \sum_s a_{js} b_{si} = \sum_s (B^T)_{is} \cdot (A^T)_{sj} \Rightarrow C^T = B^T A^T$ ∎

Rząd iloczynu macierzy

Tw. $\forall A \in M_{m\times l}(\mathbb{K})\ \forall B \in M_{l\times n}(\mathbb{K})$ rank $A\cdot B \le \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$

Dowód: $C = A\cdot B$ (*) $C_{(i)} = A_{(i)}\cdot B$ ← przedstawienie wierszy macierzy A pomocy

$C^{(j)} = A\cdot B^{(j)}$ analogiczne przedstawienie wierszy macierzy C

$r_1 = \text{rank } A = \dim \operatorname{span}(A_{(1)},\dots,A_{(m)})$. Z (*) można założyć, że $A_{(1)},\dots,A_{(r_1)}$ są bazą $\operatorname{span}(A_{(1)},\dots,A_{(m)})$. Wtedy $A_{(k)} = \sum_{i=1}^{r_1}\lambda_{ki}A_{(i)}$ $r_1 < k \le m$. Stąd

$$C_{(k)} = A_{(k)}\cdot B = \left(\sum_{i=1}^{r_1}\lambda_{ki}A_{(i)}\right)\cdot B = \sum_{i=1}^{r_1}\lambda_{ki}\left(A_{(i)}\cdot B\right) = \sum_{i=1}^{r_1}\lambda_{ki}C_{(i)}$$

$\operatorname{span}(C_{(1)},\dots,C_{(m)}) = \operatorname{span}(C_{(1)},\dots,C_{(r_1)})$ rank $C = \dim\operatorname{span}(C_{(1)},\dots,C_{(m)}) \le r_1$

$\text{rank}(A\cdot B) \le \text{rank } A$ $\quad$ $\text{rank } A^T = \text{rank } A$

$\text{rank}(A\cdot B) = \text{rank}(A\cdot B)^T = \text{rank}(B^T\cdot A^T) \le \text{rank } B^T = \text{rank } B$ ∎

Uwaga $\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}\cdot\underset{B}{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}} = \underset{A\cdot B}{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}$ $\quad$ $\text{rank}(A\cdot B) = 0 < \min[\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\text{rank } A}}, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\text{rank } B}}] = 1$