Wojciech Domitrz, Algebra liniowa z geometrią 1, wykład 12: Macierze kwadratowe

$M_n(\mathbb{K}) = M_{n\times n}(\mathbb{K})$

Def. $M_n(\mathbb{K})$ z działaniami dodawania i mnożenia macierzowego

$M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \ni (A, B) \mapsto A+B \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

$M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \ni (A, B) \mapsto A\cdot B \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad (A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot B_{kj}$

nazywamy pierścieniem macierzowym.

Def. Zbiór R z działaniami dodawania $+ : R\times R \ni (a,b) \mapsto a+b \in R$ oraz mnożenia $\cdot : R \times R \ni (a,b) \mapsto a\cdot b \in R$ nazywamy pierścieniem jeśli są spełnione następujące warunki: dodawanie 1) jest łączne $\forall a, b, c \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2) istnieje element neutralny 0 $\quad \forall a \in R \quad a+0 = 0+a = a$ 3) istnieje element przeciwny $\forall a \in R \ \exists b \in R \quad a+b = b+a = 0 \quad (b = -a)$ 4) jest przemienne $\forall a, b \in R \quad a+b = b+a$
mnożenie jest łączne $\forall a, b, c \in R \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
zachodzą prawa rozdzielności $\forall a, b, c \in R \quad (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$

Jeśli istnieje element neutralny mnożenia 1: $\forall\, a \in \mathcal{R}$ $\; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ to pierścień nazywamy pierścieniem z jednością.

Jeśli mnożenie jest przemienne $\forall\, a, b \in \mathcal{R}$ $\; a \cdot b = b \cdot a$ to pierścień nazywamy pierścieniem przemiennym.

Inne przykłady pierścieni $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 1)$ – pierścień przemienny z 1,

$\mathbb{K}$ – ciało, $\mathbb{K}[x]$ – pierścień wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{K}$, $\mathcal{R}$-pierścień, $\mathcal{R}[x]$

$n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ – ciało to $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ – pierścień

Def. $M_n(\mathbb{K})$ z działaniami dodawania, mnożenia przez skalar z $\mathbb{K}$ (przestrzeń liniowa)

i mnożenia macierzowego nazywamy algebrą macierzy nad $\mathbb{K}$.

Def. $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ – przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$ z działaniem mnożenia

$V \times V \ni (v, w) \to v \cdot w \in V$ spełniającymi warunki: 1) prawa rozdzielności

$\forall\, v, w, u \in V \quad (v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

2) zgodność z działaniem mnożenia przez skalary $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, v, w \in V \quad \lambda \cdot (v \cdot w) = (\lambda \cdot v) \cdot w$

nazywamy algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$.

$$E_n = (\delta_{kj})_{\substack{k=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \qquad \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=j \\ 0 & \text{dla } k\neq j \end{cases} \qquad E_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } E_n = n \qquad \text{dig}(\lambda) = \lambda\cdot E_n$$

Tw. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad E_n\cdot A = A = A\cdot E_n \qquad \text{diag}(\lambda)\, E_n = \lambda\cdot E_n = E_n\cdot \text{diag}(\lambda)$

Dowód: $(E_n\cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\cdot a_{kj} = \delta_{ii}\cdot a_{ij} = a_{ij} \qquad (A\cdot E_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\delta_{kj} = a_{ij}\,\delta_{jj} = a_{ij}$

$\lambda E_n\cdot A = \lambda A \qquad A(\lambda E_n) = \lambda(A E_n) = \lambda A$ ■

Tw. Jeżeli $\forall A\in M_n(\mathbb{K})\quad A\cdot Z = Z\cdot A \Rightarrow \exists \lambda\in\mathbb{K}\quad Z = \text{diag}(\lambda)$ |

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

Dowód: $Z = (z_{ij}) \quad E_{ij} = (a_{kl}) \quad a_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i\ \ l=j \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

$$Z E_{ij} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & z_{1i} & \\ & \vdots & \\ 0 & z_{ii} & 0 \\ & \vdots & \\ & z_{ni} & \end{bmatrix} & \leftarrow i \\ j & \end{array}$$

$$E_{ij}\cdot Z = \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} & 0 & \\ z_{j1}\cdots & z_{jj} & \cdots z_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix} & \leftarrow i \\ j & \end{array}$$

$$Z E_{ij} = E_{ij} Z \Rightarrow \begin{cases} z_{ki} = 0 \text{ dla } k\neq i, \quad z_{jk} = 0 \text{ dla } k\neq j, \\ z_{ii} = z_{jj} \quad \text{dla } i\neq j \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\exists \lambda\in\mathbb{K}\ \forall i\ z_{ii} = \lambda$ i $\forall k,l\ \ k\neq l \Rightarrow z_{kl} = 0$ ■

$A \in M_n(\mathbb{K})$? $\exists\, A' \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad A \cdot A' = E_n = A'A$

Uwaga! $AA' = E_n = A''A \Rightarrow A'' = A'$

Dowód: $A'' = A''E_n = A''(AA') = (A''A)A' = E_n \cdot A' = A'$ ∎

Stąd wynika, że jeżeli A' istnieje to jest wyznaczona jednoznacznie.

Def. Macierz A' taką, że $A'A = AA' = E_n$ nazywamy macierzą odwrotną do A i oznaczamy symbolem A^{-1} czyli $A^{-1}A = A^{-1}A = E_n$.

Def. Macierz A nazywamy odwracalną jeżeli istnieje macierz odwrotna do A.

Def. Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy nieosobliwą jeżeli $\operatorname{rank} A = n$.

Jeżeli $\operatorname{rank} A < n$ to macierz A nazywamy osobliwą.

Tw. Macierz A jest odwracalna $\Leftrightarrow$ A jest nieosobliwa.

Dowód: $\Rightarrow$ zał, że A jest odwracalna tzn. $\exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$

$$n = \operatorname{rank} E_n = \operatorname{rank}(A \cdot A^{-1}) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} A^{-1}\} \leq n \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{-1} = n$$

$\Leftarrow$ rank $A = n$ $\quad \operatorname{span}\{E_n^{(1)}, \dots, E_n^{(n)}\} = \mathbb{K}^n = \operatorname{span}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$ $\quad E_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} A^{(i)}$

a'_{ij} - wyznaczone jednoznacznie $\quad$ stąd $\quad \delta_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} a'_{ij} \Rightarrow E_n = A \cdot A'$

stąd A jest odwracalna. ■

A - nieosobliwa $\Rightarrow A^T$ - nieosobliwa. Powtarzając poprzedni dowód dla A^T

dostajemy że istnieje macierz $B \in M_n(\mathbb{K})$ t, że $E_n = A^T \cdot B \; / \; (\;)^T$

$E_n^T = (A^T \cdot B)^T = B^T \cdot (A^T)^T = B^T A$ i $E_n^T = E_n$ $\quad$ stąd $\quad E_n = B^T \cdot A$

$E_n = A A'$ $\quad E_n = B^T \cdot A \overset{\text{z Uwagi}}{\Rightarrow} A' = B^T = A^{-1}$ ■

<u>Wniosek</u> A - nieosobliwa to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>Wniosek</u> $\quad B \in M_m(\mathbb{K})$ nieosobliwa $\; C \in M_n(\mathbb{K})$ nieosobliwa $\quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Wtedy $\quad$ rank BAC = rank A

Dowód: $\operatorname{rank} BAC \leq \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} BA(CC^{-1}) = \operatorname{rank} (BAC)\cdot C^{-1} \leq \operatorname{rank} BAC$

$\operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} BA$ $\quad \operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (B^{-1}B)A = \operatorname{rank} B^{-1}(BA) \leq \operatorname{rank} BA$

$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A \implies \operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} A$ ■

Wniosek. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad AB = E_n$ lub $BA = E_n \implies B = A^{-1}$

Dowód: razy, że $A\cdot B = E_n$ $\quad n = \operatorname{rank} E_n = \operatorname{rank}(A\cdot B) \leq \operatorname{rank} A \leq n \implies \operatorname{rank} A = n$

A nieosobliwa $\implies$ A odwracalna

$A\cdot B = E_n \;/\; A^{-1}\cdot \qquad A^{-1}\cdot(AB) = A^{-1}\cdot E_n$

$(A^{-1}\cdot A)\cdot B = A^{-1} \qquad E_n\cdot B = A^{-1} \qquad B = A^{-1}$

drugi przypadek analogicznie ■

Wniosek. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ nieosobliwe $\implies$ $A\cdot B$ nieosobliwe oraz $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dowód: $\operatorname{rank} A\cdot B = \operatorname{rank} A\cdot B E_n = \operatorname{rank} B = n$ $\quad (B^{-1}A^{-1})(A\cdot B) = B^{-1}(A^{-1}\cdot A)B =$

$= B^{-1}E_n B = B^{-1}\cdot B = E_n$ ■