# Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z geometrią, wykład 13: Klasy macierzy równoważnych.

$$E_{s,t} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow s \\ \uparrow t & \end{array}$$

Macierze elementarne w $M_n(\mathbb{K})$. Niech $s \neq t$

(I) $$F_{s,t} = E_n - E_{s,s} - E_{t,t} + E_{s,t} + E_{t,s} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow s & & \uparrow t \end{array} & \end{array}$$

(II) $$F_{s,t}(\lambda) = E_n + \lambda E_{s,t} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & \overset{t}{\downarrow} & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(III) $$F_s(\lambda) = E_n + (\lambda - 1) E_{ss} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\overset{s}{\downarrow}}{\lambda}, 1, \ldots, 1)$$

Operacje na wierszach

$A' = F_{s,t} \cdot A \qquad r_s \Leftrightarrow r_t$

$A' = F_{s,t}(\lambda) \cdot A \qquad r_s \to r_s + \lambda r_t$

$A' = F_s(\lambda) \cdot A \qquad r_s \to \lambda r_s$

Operacje na kolumnach

$A' = A \cdot F_{t,s} \qquad c_s \Leftrightarrow c_t$

$A' = A \cdot F_{t,s}(\lambda) \qquad c_s \to c_s + \lambda c_t$

$A' = A \cdot F_s(\lambda) \qquad c_s \to \lambda c_s$

Sprawdzamy czy mnożenie przez macierz elementarne z lewej strony odpowiada operacjom elementarnym na wierszach

$$F_{s,t} \cdot A = \begin{bmatrix} E_{(1)} \\ \vdots \\ E_{(t)} \\ \vdots \\ E_{(s)} \\ \vdots \\ E_{(n)} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(t)} \\ \vdots \\ A_{(s)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}}^{A} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \end{array} , \quad F_{s,t}(\lambda) \cdot A = \begin{bmatrix} E_{(1)} \\ \vdots \\ E_{(s)} + \lambda E_{(t)} \\ \vdots \\ E_{(t)} \\ \vdots \\ E_{(n)} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(s)} + \lambda A_{(t)} \\ \vdots \\ A_{(t)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}}^{A} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \end{array} , \quad F_s(\lambda) \cdot A = \begin{bmatrix} E_{(1)} \\ \vdots \\ \lambda E_{(s)} \\ \vdots \\ E_{(t)} \\ \vdots \\ E_{(n)} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ \lambda E_{(s)} \\ \vdots \\ A_{(t)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}}^{A} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow s \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \end{array}$$

Mnożenie z prawej strony sprawdza się tak samo (zapisz macierz elementarne kolumnami)

Tw. Każdą macierz rzędu $r$ można przez operacje elementarne na wierszach i kolumnach sprowadzić do postaci

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\qquad}_{n-r} \end{array} & \end{array}$$

Dowód.:

operacje na wierszach $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & 0 & & & & & \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operacje na kolumnach}} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \; \cdots \\ & & & & & & & & 1 & 0 \; \cdots \\ & & & & & 0 & & & & \end{array}\right]$$

zamiany kolumn

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \blacksquare$$

$F_{s,t}^{-1} = F_{s,t}$ $\quad (F_{s,t}(\lambda))^{-1} = F_{s,t}(-\lambda)$ $\quad (F_s(\lambda))^{-1} = F_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

<u>Def</u>. $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ są równoważne jeśli istnieją macierze nieosobliwe $P \in M_m(\mathbb{K})$, $Q \in M_n(\mathbb{K})$ takie, że $B = PAQ$.

Tw. $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dzieli się na $p = \min(m,n)+1$ klas abstrakcji powyższej powyższej relacji równoważności. Do jednej klasy należą macierze o tym samym rzędzie.

Obliczanie macierzy odwrotnej

$A \in M_n(\mathbb{K})$ nieosobliwa

$$[A \mid E_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne na wierszach}} \dots \longrightarrow \dots \longrightarrow [E_n \mid A'] \Rightarrow A' = A^{-1}$$

Dowód: $A \cdot X = E_n \iff A X^{(1)} = E^{(1)}, \dots, A X^{(n)} = E^{(n)}$

$$[A \mid E^{(i)}] \xrightarrow{\text{operacje elementarne na wierszach}} \dots \longrightarrow \dots \longrightarrow [E_n \mid X^{(i)}] \qquad A \cdot X^{(i)} = E^{(i)}$$

$$[X^{(1)}, \dots, X^{(n)}]$$

$$[A \mid E_n] \longrightarrow \dots \longrightarrow \dots \longrightarrow [E_n \mid X] \qquad A \cdot X = A[E^{(1)}, \dots, E^{(n)}] = E_n$$

$$\Downarrow$$

$$X = A^{-1} \qquad \blacksquare$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ nieosobliwa $\qquad Ax = b \iff x = A^{-1} b$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\quad x \in \mathbb{K}^n$ $\quad 0 \in \mathbb{K}^m$

(*) $A \cdot x = 0$ $\quad$ 1) $x_1, x_2$ są rozwiązaniami (*) to $x_1 + x_2$ też jest rozwiązaniem (*)

2) $\lambda \in \mathbb{K}$ i $x$ jest rozwiązaniem (*) to $\lambda \cdot x$ też jest rozwiązaniem (*)

$V, W$ - p. liniowe $\quad \varphi : V \to W$ przekształcenie liniowe

Def. Jądrem $\varphi$ nazywamy zbiór $\varphi^{-1}(0)$, gdzie $0 \in W$ i oznaczamy $\ker \varphi$

czyli $\ker \varphi = \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \}$

Tw. $\ker \varphi$ jest podprzestrzenią liniową $V$.

Tw. Obraz $\varphi$ czyli $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(V)$ jest podprzestrzenią liniową $W$.

Tw. $V, W$ - p. liniowe, $\dim V < +\infty$, $\varphi : V \to W$ liniowe.

Wtedy $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$.

Dowód: $\ker \varphi$ podprzestrzeń $V \Rightarrow \dim \ker \varphi < +\infty$. Niech $v_1, \dots, v_s$ - baza $\ker \varphi$

Rozszerzamy $v_1, \dots, v_s$ do bazy $V$ $\quad v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ $\quad (\dim V = n)$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i) \qquad \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{span}\{\varphi(v_{s+1}),\dots,\varphi(v_n)\}$$

Czy $\varphi(v_{s+1}),\dots,\varphi(v_n)$ l. niezależne? $\quad \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i \varphi(v_i) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=s+1}^{n} \beta_i v_i\right) = 0 \Rightarrow$

$$\sum_{i=s+1}^{n} \beta_i v_i \in \ker\varphi \Rightarrow \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j v_j \qquad \sum_{j=1}^{s}(-\alpha_j) v_j + \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i v_i = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\alpha_j = 0$ dla $j=1,\dots,s$ oraz $\beta_i = 0$ dla $i=s+1,\dots,n$ bo $v_1,\dots,v_s,v_{s+1},\dots,v_n$ – baza $V$

Stąd $\varphi(v_{s+1}),\dots,\varphi(v_n)$ – baza $\operatorname{Im}\varphi$ czyli $\dim \operatorname{Im}\varphi = n-s$ $\qquad s+(n-s) = n$ czyli

$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$. ∎

Tw.

Jeśli $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ oraz $\varphi_A(x) = A\cdot x$ $\quad \varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ to $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rank} A$

Dowód: $\varphi(x) = A\cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i A^{(i)}$ czyli $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{span}\{A^{(1)},\dots,A^{(n)}\}$

$\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\operatorname{span}\{A^{(1)},\dots,A^{(n)}\} = \operatorname{rank} A$