Wojciech Domitrz, Algebra liniowa z geometrią 1, wykład 14 : Wyznaczniki.

Przykład 1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & /\cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & /\cdot(-a_{12}) \end{cases}$ $+\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2 a_{12} \end{cases}$

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ $\quad x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}$

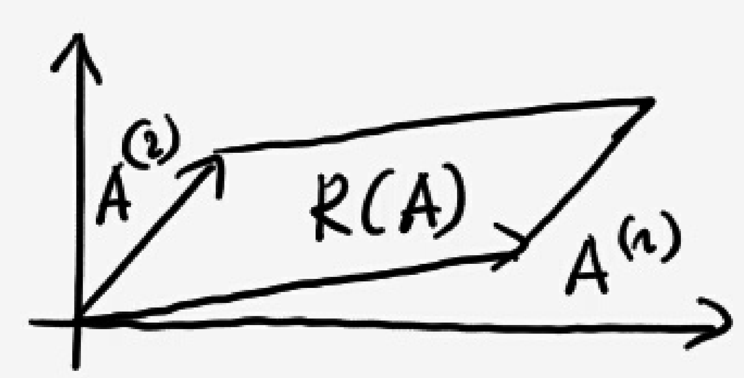
analogicznie $x_2 = \dfrac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}$

Def. **Wyznacznikiem** macierzy $A \in M_2(\mathbb{K})$ nazywamy liczbę $\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\quad A = [A^{(1)}, A^{(2)}]$

$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad R(A) = R(A^{(1)}, A^{(2)}) = \{\alpha A^{(1)} + \beta \cdot A^{(2)} \mid \alpha, \beta \in [0,1]\}$

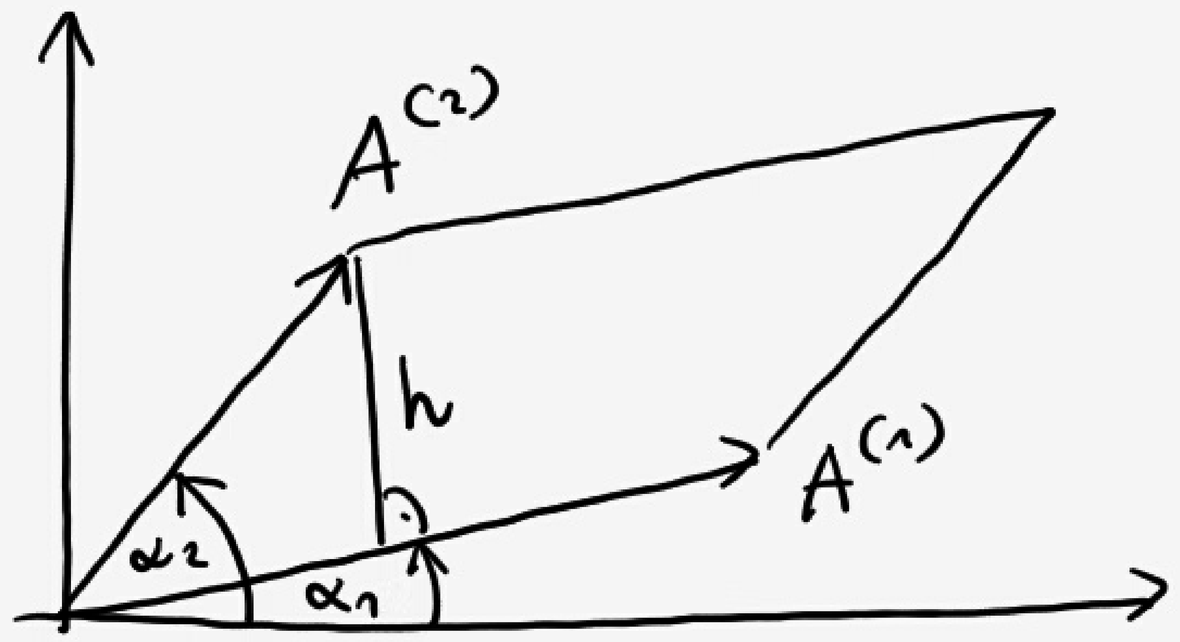
$R(A)$ to równoległobok macierzy A



Stw.

Pole równoległoboku $R(A)$ to $v(R(A)) = |\det A|$

Dowód.:



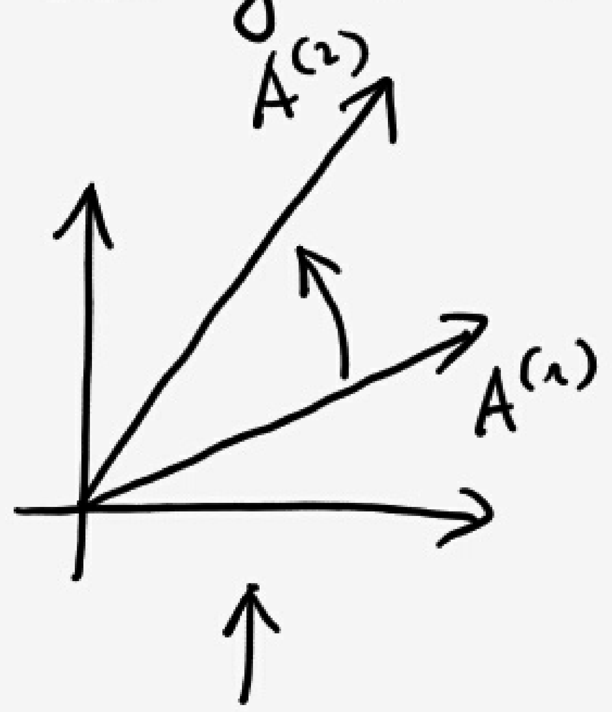
$$v(R(A)) = |A^{(1)}| \cdot h = |A^{(1)}| \cdot |A^{(2)}| \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \qquad \frac{A^{(2)}}{A^{(1)}} = \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|}\left(\cos(\alpha_2-\alpha_1) + i\sin(\alpha_2-\alpha_1)\right)$$

$$\frac{A^{(2)}}{A^{(1)}} = \frac{a_{12} + i a_{22}}{a_{11} + i a_{21}} = \frac{(a_{12} + i a_{22})(a_{11} - i a_{21})}{|A^{(1)}|^2} = \frac{a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} a_{22}}{|A^{(1)}|^2} + i \, \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{|A^{(1)}|^2}$$

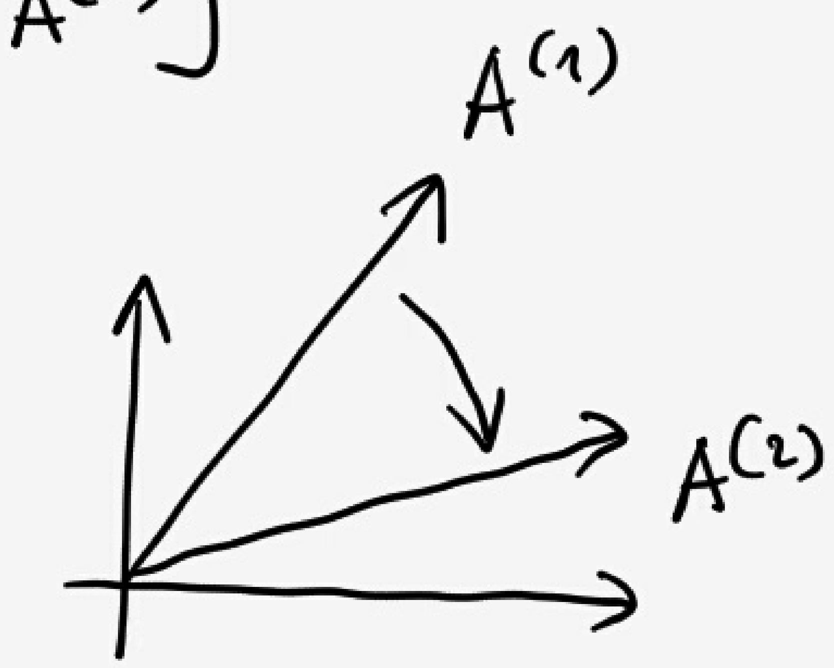
$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{|A^{(1)}|^2} \cdot \frac{|A^{(1)}|}{|A^{(2)}|} = \frac{\det A}{|A^{(1)}||A^{(2)}|} \qquad v(R(A)) = \det A$$

Uwaga! $\det[A^{(2)}, A^{(1)}] = -\det[A^{(1)}, A^{(2)}]$



$v(R(A^{(1)}, A^{(2)})) = \det A$

orientacja dodatnia



$v(R(A^{(1)}, A^{(2)})) = -\det A$

orientacja ujemna

Przykład 2) $ax = b \quad a, b \in \mathbb{K} \quad a \neq 0 \quad x = \frac{b}{a}$

Def. Wyznacznikiem macierzy $[a] \in M_1(\mathbb{K})$ nazywamy liczbę $\det([a]) = a$

Interpretacja geometryczna $R([a]) = \{\alpha a \mid \alpha \in [0,1]\}$ - odcinek

Długość odcinka $R([a])$ to $v(R[a]) = |a|$

Przykład 3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Def. Wyznacznikiem macierzy $A \in M_3(\mathbb{K})$ nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Interpretacja geometryczna

Równoległościan macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$ to $R(A) = R(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = \{\alpha A^{(1)} + \beta A^{(2)} + \gamma A^{(3)} \mid \alpha, \beta, \gamma \in [0,1]\}$

Stw. Objętość $R(A)$ to $v(R(A)) = \det(A)$

Ogólnie $A \in M_n(\mathbb{K})$ A - nieosobliwa $A \cdot x = b \quad x, b \in \mathbb{K}^n$

$$x_i = \frac{\det[A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots A^{(n)}]}{\det(A)} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad \varphi_A(x) = A \cdot x \quad \varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \varphi_A(E^{(j)}) = A \cdot E^{(j)} = A^{(j)}$

$\varphi_A(R(E)) = R(A) = \{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^{(j)} \mid \alpha_j \in [0,1] \text{ dla } j = 1, \dots, n \}$ $\quad \varphi_A(R(E)) = R(A)$

$v(R(E)) = 1 \quad \det A = \pm v(R(A)) \quad \det A = \pm \dfrac{v(\varphi_A(R(E)))}{v(R(E))}$

Permutacje. Ω – zbiór skończony $\quad \Omega = \{1, \dots, n\} \quad S_n = S(\Omega) = \{ \sigma : \Omega \to \Omega \mid \sigma \text{ – bijekcja} \}$

$\pi \in S_n \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad \pi(k) = i_k$ dla $k = 1, \dots, n$

$\sigma, \tau \in S_n \quad \sigma\tau \overset{\text{def}}{=} \sigma \circ \tau \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad S_n$ – grupa symetryczna zbioru n elementowego.

Def. Zbiór G z działaniem $G \times G \ni (g,h) \mapsto g \cdot h \in G$ nazywamy grupą jeśli spełnione są warunki

1) działanie jest łączne tzn. $\forall\, g,h,k \in G \quad (g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$

2) istnieje element neutralny działania $\exists\, e \in G \ \forall\, g \in G \quad g \cdot e = e \cdot g = g$

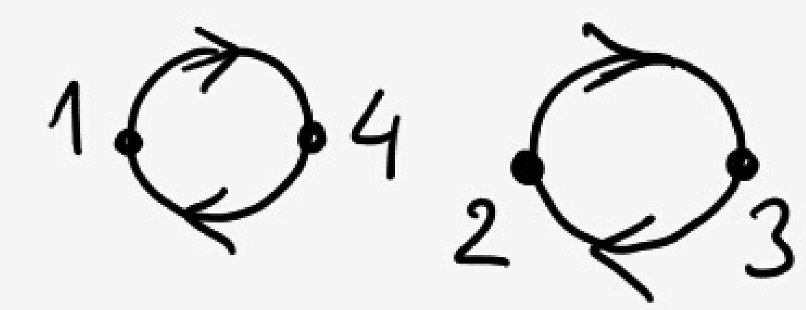
3) istnieje element odwrotny do każdego elementu $\forall\, g \in G \ \exists\, h \in G \quad g \cdot h = h \cdot g = e$

Jeśli dodatkowo działanie jest przemienne tzn. $\forall\, g,h \in G \quad g \cdot h = h \cdot g$ to grupę nazywamy abelową

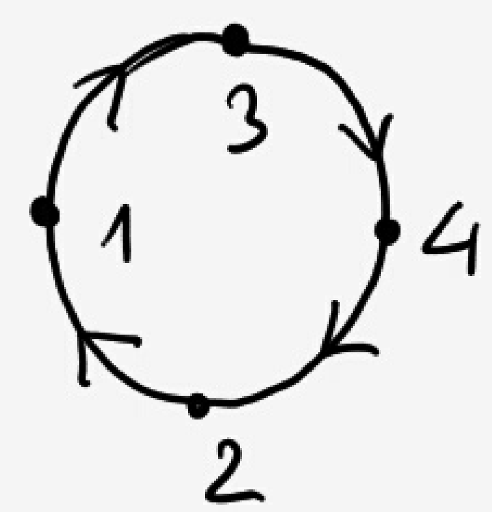
Rozkład permutacji na cykle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,4,3)(2) = (1,4,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,4)(2,3)$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4,2)$$



Def. **Cykl długości k** to permutacja postaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ czyli t, że

$\sigma(i_j) = i_{j+1}$ dla $j = 1, \ldots, k-1$ $\quad \sigma(i_k) = i_1$ $\quad \sigma(l) = l$ dla $l \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$

$\pi \in S_n \qquad s \in \mathbb{Z}$

Def **s-ta potęga** permutacji π to permutację postaci π^s, gdzie

$$\pi^s = \begin{cases} e & \text{jeśli } s = 0 \\ \pi \cdot \pi^{s-1} & \text{jeśli } s > 0 \\ (\pi^{-1})^{-s} & \text{jeśli } s < 0 \end{cases}$$

Stw.

$$\pi^s \pi^t = \pi^{(s+t)}$$

Def. **Rząd** permutacji π to $\min \{ q \in \mathbb{N}_{>0} \mid \pi^q = e \}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$$

$$\text{rząd}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=3$$

$i,j\in\Omega \quad \pi\in S(\Omega)$

Def. i,j są π-równoważne jeśli $\exists\, s\in\mathbb{Z} \quad \pi^s(i)=j$.

π-równoważność to relacja równoważności $\quad \Omega=\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_p$ – klasy abstrakcji relacji π-równoważności. Załóżmy, że $i\in\Omega_k \quad |\Omega_k|=l_k \quad \Omega_k=\{i,\pi(i),\pi^2(i),\ldots,\pi^{l_k-1}(i)\}$

$\pi_k=(i,\pi(i),\pi^2(i),\ldots,\pi^{l_k-1}(i))$ – cykl długości l_k

$\pi=\pi_1\pi_2\ldots\pi_p \qquad \pi_s\pi_t=\pi_t\pi_s$, bo cykle są rozłączne

Załóżmy, że $\pi=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ cykle rozłączne

$i\in\Omega \quad \pi(i)\neq i \Rightarrow \exists!\, s \quad \pi_s(i)\neq i \quad \exists!\, t \quad \alpha_t(i)\neq i$

$(*) \quad \pi_s(i)=\pi(i)=\alpha_t(i)$

Lemat. $\forall k \geq 1 \quad \pi_s^k(i) = \pi^k(i) = \alpha_t^k(i)$

Dowód: (indukcja po k) dla $k=1$ mamy z (*) $\pi_s(i) = \pi(i) = \alpha_t(i)$

krok indk.

zał. indk: $\pi_s^k(i) = \pi^k(i) = \alpha_t^k(i)$ teza indk.: $\pi_s^{k+1}(i) = \pi^{k+1}(i) = \alpha_t^{k+1}(i)$

Dowód: $\pi_s^k(i) = \pi^k(i) = \alpha_t^k(i) \Rightarrow \pi(\pi_s^k(i)) = \pi^{k+1}(i) = \pi(\alpha_t^k(i))$

$\pi_1 \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_p \, \pi_s^k(i) = \pi^{k+1}(i) = \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_r \, \alpha_t^k(i)$ ale $\pi_u \pi_v = \pi_v \pi_u \quad \alpha_u \alpha_v = \alpha_v \alpha_u$

stąd $\pi_s^k \pi(i) = \pi^{k+1}(i) = \alpha_t^k \pi(i) \qquad \pi_s^{k+1}(i) = \pi^{k+1}(i) = \alpha_t^{k+1}(i)$ ■

Stąd wynika jednoznaczność rozkładu.

Tw. 1) Każdą permutację można przedstawić w postaci iloczynu cykli rozłącznych długości ≥ 2. Rozkład jest jednoznaczny z dokładności do kolejności czynników.

Def. Transpozycja to cykl długości 2.

Tw. 2) Każdą permutację można przedstawić jako iloczyn pewnej liczby transpozycji.

Dowód: Cykl $(1,2,3,\ldots,l-1,l) = (1,l)(1,l-1)\cdot\ldots\cdot(1,3)(1,2)$ z tw 1 wynika teza ■

Uwaga! Rozkład na transpozycje nie jest jednoznaczny.

Przykład. $e = (1,2)(1,2) = (2,3)(2,3)(1,2)(1,2)$

Tw. Każdą permutację można rozłożyć na parzystą albo nieparzystą liczbę transpozycji.

Dowód na końcu notatek (str. 24-25).

Def. Znakiem permutacji σ nazywamy liczbę $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$, gdzie k jest liczbą transpozycji w dowolnym rozkładzie permutacji σ na transpozycje.

Def. Permutacja σ jest parzysta jeśli $\operatorname{sgn} \sigma = 1$

Def. Permutacja σ jest nieparzysta jeśli $\operatorname{sgn} \sigma = -1$

Tw. Permutacja jest nieparzysta $\iff$ w dowolnym jej rozkładzie na cykle liczba cykli długości parzystej jest nieparzysta.

Dowód: $(1,2,3,\dots,l-1,l) = (1,l)(1,l-1)\cdot\ldots\cdot(1,3)(1,2)$ Cykl długości nieparzystej rozkłada się na parzystą liczbę transpozycji. Cykl długości parzystej rozkłada się na nieparzystą liczbę transpozycji. ∎

Def. Wyznacznikiem macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy liczbę $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

1)
$n=2$ $\quad A \in M_2(\mathbb{K}) \quad S_2 = \{e, (1,2)\} \quad e = (1,2)(1,2)$, $\operatorname{sgn}\sigma = 1$, $\operatorname{sgn}(1,2) = -1$

$\det A = \operatorname{sgn} e \cdot a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(1,2)\, a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

2)
$n=3$ $\quad A \in M_3(\mathbb{K}) \quad S_3 = \{e, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$

$\operatorname{sgn} e = 1$, $\operatorname{sgn}(1,2) = \operatorname{sgn}(1,3) = \operatorname{sgn}(2,3) = -1$,

$(1,2,3) = (1,3)(1,2)$, $\operatorname{sgn}(1,2,3) = 1$, $(1,3,2) = (1,2)(1,3)$, $\operatorname{sgn}(1,3,2) = 1$

$$\det A = \operatorname{sgn} e \; a_{11} a_{22} a_{33} + \operatorname{sgn}(1,2,3)\, a_{12} a_{23} a_{31} + \operatorname{sgn}(1,3,2)\, a_{13} a_{21} a_{32} +$$

$$+ \operatorname{sgn}(1,2)\, a_{12} a_{21} a_{33} + \operatorname{sgn}(1,3)\, a_{13} a_{22} a_{31} + \operatorname{sgn}(2,3)\, a_{11} a_{23} a_{32} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Własności wyznacznika

$A_{(i)} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$, $A = [A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}]^T = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}$, $A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$, $A = [A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}]$

Mamy określoną funkcję $\det : M_n(\mathbb{K}) \ni A \longmapsto \det A \in \mathbb{K}$

V - p. liniowa nad $\mathbb{K}$

Def. Funkcję $D : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \ni (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto D(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}$

jest wieloliniowa (lub n - liniowa) jeśli $\forall\, i = 1, \ldots, n$ przy ustalonych $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in V$

jest liniowa ze względu na v_i czyli funkcja $V \ni v \longmapsto D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}$

jest liniowa.

$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n \in V \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i' + \alpha v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) + \alpha D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

Przykład : $V = \mathbb{K}$ $\quad D : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (x, y, z) \longmapsto 2 \cdot x \cdot y \cdot z \in \mathbb{K}$

Def. Funkcja $D : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to \mathbb{K}$ jest antysymetryczna jeśli $\forall\, i = 1, \ldots, n-1 \quad \forall\, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \in V$

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_n)$$

Stw. Funkcja n-liniowa $D : V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ jest antysymetryczna $\iff$

$\forall\, i = 1, \ldots, n-1 \quad \forall\, v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+2}, \ldots, v_n \in V \qquad D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v, v_{i+2}, \ldots, v_n) = 0$

Dowód: $\Rightarrow$ $D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) \Rightarrow D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$

$\Leftarrow$ $0 = D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n) = \underbrace{D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)}_{=0} + \underbrace{D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n)}_{=0} +$

$+ D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_n)$ $\blacksquare$

Stw. Jeśli $D : V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ jest antysymetryczna $\Rightarrow \forall\, 1 \le i < j \le n \quad \forall\, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \in V$

$$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Dowód: Liczymy liczbę zamian sąsiednich elementów w ciągu (*) $v_1, \ldots, \overset{i}{v_i}, \ldots, \overset{j}{v_j}, \ldots, v_n$ takich aby z (*) otrzymać ciąg $v_1, \ldots, \overset{i}{v_j}, \ldots, \overset{j}{v_i}, \ldots, v_n$. Zamiany $v_1, \ldots, \underset{k}{v_k}, \underset{k+1}{v_{k+1}}, \ldots, v_n$ na $v_1, \ldots, \underset{k}{v_{k+1}}, \underset{k+1}{v_k}, \ldots, v_n$ powodują zmianę znaku D na przeciwny.

v_i przechodzi z i-tego miejsca na j-te (liczba zamian to $(j-i)$)

v_j przechodzi z $(j-1)$-ego miejsca na i-te (liczba zamian to $(j-1-i)$)

razem liczba zamian to $(j-i)+(j-1-i) = 2(j-i)-1 \to$ liczba nieparzysta.

Stw. Jeżeli funkcja $D : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \to \mathbb{K}$ jest wieloliniowa to $D(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n D(v_1, \dots, v_n)$

Stw. Jeżeli funkcja $D : V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ jest wieloliniowa

to $D(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$

Dowód.: $D(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = D(v_1, \dots, v_{i-1}, \overset{\text{liczba}}{0} \cdot \overset{\text{wektor zerowy}}{0}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \overset{\text{liczba}}{0} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{D(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n)}$ ∎

Stw. Jeżeli $D : V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ jest antysymetryczna to

$$\forall\, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v \in V \quad D(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

Dowód.: $D(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = -D(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n)$

zamieniamy miejscami v na i-tym z v na j-tym

$$2D(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$D(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0 \quad ∎$$

Tw. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det A^T = \det A$

Dowód: $\quad A = (a_{ij}) \quad A^T = (a'_{ij}) \qquad a'_{ij} = a_{ji}$

$\forall \pi \in S_n \quad \forall k \in \{1,\dots,n\} \ \exists!\, l = 1,\dots,n \qquad k = \pi^{-1}(l)$

$$a'_{1\pi(1)} a'_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\pi(n)} = a'_{\pi^{-1}(1)\pi(\pi^{-1}(1))} \cdot a'_{\pi^{-1}(2)\pi(\pi^{-1}(2))} \cdot \ldots \cdot a'_{\pi^{-1}(n)\pi(\pi^{-1}(n))} =$$

$$a'_{\pi^{-1}(1)\,1}\ a'_{\pi^{-1}(2)\,2} \cdot \ldots \cdot a'_{\pi^{-1}(n)\,n} = a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi^{-1}(n)}$$

$\pi \circ \pi^{-1} = e \qquad \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = 1$ czyli $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a'_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1})\, a_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = \det A \quad \blacksquare$$

<u>Wniosek.</u> Każda własność wyznacznika jako funkcji kolumn macierzy jest prawdziwa także jako funkcji wierszy macierzy i na odwrót.

Tw. Funkcja $\det : M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n} \ni (A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}) \longmapsto \det A \in \mathbb{K}$ ma następujące własności

D1) det jest antysymetryczną funkcją wierszy macierzy

D2) det jest wieloliniową funkcją wierszy macierzy

D3) $\det E_n = 1$

D4) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

D5) $\det [A_{(1)}, \ldots, A_{(i-1)}, 0, A_{(i+1)}, \ldots, A_{(n)}]^T = 0$

D6) $\det [A_{(1)}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{A_{(i)}}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{A_{(i)}}, \ldots, A_{(n)}]^T = 0$

D7) $\det [A_{(1)}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{A_{(i)} + \lambda A_{(j)}}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{A_{(j)}}, \ldots, A_{(n)}]^T = \det A$

D8) $A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$ – macierz górnotrójkątna to $\det A = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Dowód.: D1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ Wtedy $A' = [A_{(1)}, \dots, A_{(s-1)}, A_{(s+1)}, A_{(s)}, A_{(s+2)}, \dots, A_{(n)}]$

Niech $\tau = (s, s+1) \in S_n$. Wtedy $\forall\ \pi \in S_n \quad \exists!\ \sigma \quad \pi = \sigma\tau \quad (\sigma = \pi\tau$, bo $\tau^{-1} = \tau)$

$$\det A' = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a'_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\pi(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\, a'_{1(\sigma\tau)(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{n(\sigma\tau)(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1) \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{s\,\sigma(s+1)}\, a'_{s+1\,\sigma(s)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\,\sigma(n)} =$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{s+1\,\sigma(s+1)}\, a_{s\,\sigma(s)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} = -\det A$$

D2) $A = [A_{(1)}, \dots, A_{(s-1)}, A'_{(s)} + \lambda A''_{(s)}, A_{(s+1)}, \dots, A_{(n)}]$

$A' = [A_{(1)}, \dots, A_{(s-1)}, A'_{(s)}, A_{(s+1)}, \dots, A_{(n)}]$ $\quad A'' = [A_{(1)}, \dots, A_{(s-1)}, A''_{(s)}, A_{(s+1)}, \dots, A_{(n)}]$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (a'_{s\,\sigma(s)} + \lambda\, a''_{s\,\sigma(s)}) \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{s\,\sigma(s)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a''_{s\,\sigma(s)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} =$$

$= \det A' + \lambda \det A''$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

D3. $\det E_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \delta_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(e)\, \delta_{11} \cdot \ldots \cdot \delta_{nn} = 1$

Dowód D4) – D5) jest wnioskiem z D5) oraz odpowiednich własności funkcji wieloliniowych

D6) jest wnioskiem z D1) oraz odpowiedniej własności funkcji antysymetrycznej

D7) jest wnioskiem z D1) D2) i D6)

Dowód D8)

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{nn} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \quad \begin{matrix} r_i \mapsto r_i - a_{in} r_n \\ \text{dla } i = 1, \ldots, n-1 \end{matrix} \quad \text{z D7)}$$

$$= a_{nn} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & 0 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = a_{nn}\, a_{n-1\,n-1} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & 0 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \text{itd}$$

$$= a_{n,n}\, a_{n-1,n-1}\, a_{n-2,n-2} \cdots a_{2,2}\, a_{1,1} \cdot \det E_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \quad \blacksquare$$

Tw. Niech $D : M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \ni (A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}) \longrightarrow D(A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}) \in \mathbb{K}$ będzie n-liniową funkcją antysymetryczną wierszy macierzy A wtedy $D(A) = D(E_n) \cdot \det A$.

Dowód: Przez operację $A_{(i)} \leftrightarrow A_{(j)}$ oraz $A_{(i)} \to A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$ sprowadzamy do postaci trójkątnej $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & & & * \\ & \bar{a}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$ $\det A = (-1)^q \det \bar{A} = (-1)^q \bar{a}_{11} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{nn}$ gdzie q - liczba zamian wierszy

D jest n-liniowe i antysymetryczne. Stąd $D(A) = (-1)^q D(\bar{A})$, bo operację $A_{(i)} \Leftrightarrow A_{(j)}$ powoduje zmianę znaku, a operację $A_{(i)} \mapsto A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$ nie zmienia wartości D.
Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia o wyznaczniku macierzy górnotrójkątnej dla $\bar{A}$ otrzymujemy $D(\bar{A}) = \bar{a}_{11} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{nn} D(E_n)$.

Stąd $D(A) = (-1)^q \bar{a}_{11} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{nn} D(E_n) = \det(A) \cdot D(E_n)$ ■

Def. Wyznacznik macierzy otrzymanej z macierzy $A = (a_{ik}) \in M_n(\mathbb{K})$ po skreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny nazywamy **minorem** macierzy A odpowiadającym elementowi a_{ij} i oznaczamy M_{ij}

$$M_{ij} = \det \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

Liczbę $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij}.

Stw.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det A = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

Dowód.:

$$\det A = \det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n} = \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(1)=1}} \operatorname{sgn} \pi \; a_{11} a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n} =$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \, a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = a_{11} \cdot M_{11}$$

$$\pi \in S_n \quad \pi(1) = 1 \quad S_n \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2, & \dots, & n \\ \pi(2), & \dots, & \pi(n) \end{pmatrix} = \sigma \in S_{n-1} \quad \blacksquare$$

Tw. $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wtedy $\forall\, j = 1, \ldots, n$ $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ ← rozwinięcie względem j-tej kolumny

$\forall\, i = 1, \ldots, n$ $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

↑ rozwinięcie względem i-tego wiersza

Dowód.:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} a_{i,1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i,n} \\ a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1+j-1} \det \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1}, & a_{i,j+1}, & \ldots, & a_{i,n} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1,j-1}, & a_{1,j+1}, & \ldots, & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1}, & a_{i-1,j+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1}, & a_{i+1,j+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1}, & a_{n,j+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$A^T = (a'_{ij})$ $\quad a'_{ij} = a_{ji}$

$M'_{ij} = M_{ji}$

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \blacksquare$$

Tw
$$\det \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ m \end{array} \\ & \begin{array}{cc} & m \end{array} \end{array} = \det A \cdot \det B \quad , \text{ gdzie } A \in M_n(\mathbb{K}),\ B \in M_m(\mathbb{K}),\ C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$$

Dowód: A, C – ustalone
$$D(B) \overset{def}{=} \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] = D(E_m) \cdot \det B$$

$$D(E_m) = \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & E_m \end{array}\right] = \det A$$

rozwijając względem ostatnich m wierszy ■

Wniosek
$$\det \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ m \end{array} \\ & \begin{array}{cc} & m \end{array} \end{array} = \det A \cdot \det B.$$

Dowód:
$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]^T = \det \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline 0 & B^T \end{array}\right] = \det A^T \det B^T = \det A \cdot \det B \ ■$$

Wniosek

$$\det \begin{array}{c} \\ m\{ \end{array}\!\!\left[\begin{array}{c|c} C & \overbrace{A}^{n} \\ \hline \underbrace{B}_{m} & 0 \end{array}\right]\!\!\begin{array}{c} \}n \\ \\ \end{array} = (-1)^{mn} \det A \cdot \det B$$

Tw. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ dla każdych $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

Dowód.: Ustalamy $B \in M_n(\mathbb{K})$. Niech $D_B(A) = \det(A \cdot B)$. Pokażemy, że D_B jest n-liniową antysymetryczną funkcją wierszy macierzy A. Zauważmy, że $(A \cdot B)_{(i)} = A_{(i)} \cdot B$

Niech $\bar{A} = [A_{(1)}, \ldots, A_{(i+1)}, A_{(i)}, \ldots, A_{(n)}]^T$. Wtedy $D_B(\bar{A}) = \det(\bar{A} \cdot B) = \det([A_{(1)}B, \ldots, A_{(i+1)}B, A_{(i)}B, \ldots, A_{(n)} \cdot B]^T) =$
$= -\det(A \cdot B) = -D_B(A)$. Dla ustalonego i niech $A_{(i)} = A'_{(i)} + \lambda A''_{(i+1)}$.

Wtedy $(A \cdot B)_{(i)} = A_{(i)} \cdot B = (A'_{(i)} + \lambda A''_{(i)}) \cdot B = A'_{(i)} \cdot B + \lambda A''_{(i)} B$

Stąd $D_B(A) = \det([A_{(1)} \cdot B, \ldots, A'_{(i)} \cdot B + \lambda A''_{(i)} \cdot B, \ldots, A_{(n)} \cdot B]^T) = \det[A_{(1)} \cdot B, \ldots, A'_{(i)} \cdot B, \ldots, A_{(n)} \cdot B]^T) +$
$+ \lambda \det([A_{(1)}B, \ldots, A''_{(i)} \cdot B, \ldots, A_{(n)} \cdot B]^T) = D_B([A_{(1)}, \ldots, A'_{(i)}, \ldots, A_{(n)}]^T + \lambda D_B[A_{(1)}, \ldots, A''_{(i)}, \ldots, A_{(n)}]^T)$.

Z tw. charakteryzującego przekształcenia n-liniowe i antysymetryczne na $M_n(\mathbb{K})$ otrzymujemy $D_B(A) = D_B(E_n) \cdot \det A = \det(E_n \cdot B) \det A = \det B \cdot \det A$ ∎

$A \cdot A^{-1} = E_n \qquad \det(A \cdot A^{-1}) = 1 \qquad \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Tw. A - nieosobliwa to $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Def. Macierz dołączona macierzy A to macierz $A^\vee = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$

Tw. $A \in M_n(\mathbb{K})$ to $A \cdot A^\vee = (\det A) \cdot E_n$

Wniosek. $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ - odwracalna oraz $A^{-1} = (\det A)^{-1} A^\vee$

Dowód tw. Lemat. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \det A$

Dowód lematu. dla $i=j$ rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem wiersza (kolumny)

$$A' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \det A' = 0 \qquad 0 = \det A' = \sum_{k=1}^{n} a'_{jk} A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

Dla kolumn analogicznie z wykorzystaniem $\left[A^{(1)}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{A^{(i)}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{A^{(i)}}, \dots, A^{(n)}\right]$

cd dowodu tw. $C = A A^\vee \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A \qquad C = A A^\vee = \det A \; E_n$

Stąd $A \cdot \frac{1}{\det A} A^\vee = E_n$ ■

Wniosek. $\det A = 0 \iff$ Wiersze i kolumny macierzy A są liniowo zależne

Dowód.: $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest osobliwe $\iff \det A = 0$

$\Updownarrow$

wiersze (kolumny) A są l. zależne

Uwaga $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow \det A = 0$

Tw. (Wzory Cramera) $A \in M_n(\mathbb{K})$ $b \in \mathbb{K}^n$

Jeśli $\det A \neq 0$ to równanie $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gdzie

$$x_k = \frac{\det [A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, b, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}]}{\det A} \quad (*).$$

Dowód.: $Ax = b$ $\quad x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} A^{\vee} b$

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$$

rozwinięcie Laplace'a wyznacznika $(*)$ względem k-tej kolumny

Tw. Każdą permutację można rozłożyć na parzystą albo nieparzystą liczbę transpozycji.

Dowód: Niech $\pi \in S_n$. Zał., że $\pi = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ oraz $\pi = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_l'$, gdzie $k+l$ jest liczbą nieparzystą oraz τ_i i τ_j' są transpozycjami dla $i = 1, \ldots, k$ i $j = 1, \ldots, l$. Stąd $\tau_j' \tau_j' = e$ dla $j = 1, \ldots, l$. Rozpatrzmy równość

$$\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_l'$$

Działając na powyższą równość $\cdot \tau_j'$ dla $j = l, l-1, \ldots, 2, 1$ otrzymujemy $\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k \tau_l' \cdot \tau_{l-1}' \cdot \ldots \cdot \tau_1' = e$.
Stąd otrzymujemy przedstawienie e jako nieparzystej liczby transpozycji. Wykażemy, że takie przedstawienie nie jest możliwe. Niech σ_i będzie transpozycją dla $i = 1, \ldots, m$ oraz załóżmy, że $e = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$. Wykażemy, że wtedy możemy zmniejszyć liczbę transpozycji o 2.
Czyli $e = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_{m-2}'$. Wtedy powtarzając ten krok zredukujemy liczbę transpozycji do jednej, czyli $e = \tau$ co jest sprzecznością.

<u>Redukcja z m do $m-2$.</u> Niech s będzie pewną liczbą ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$.
Zał., że $e = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{p-1} \sigma_p \sigma_{p+1} \cdot \ldots \cdot \sigma_m$ gdzie $\sigma_p = (s, t)$ oraz transpozycje $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_m$ nie zawierają s.
Wtedy mamy następujące możliwości:

1) $\sigma_{p-1} = (s, t)$ Wtedy $\sigma_{p-1} \sigma_p = (s,t)(s,t) = e$ i możemy zredukować m do $m-2$
2) $\sigma_{p-1} = (s, r)$ dla $r \neq t$ $(s,r)(s,t) = (s,t)(t,r)$ Przesunęliśmy s o jedno miejsce w lewo.
3) $\sigma_{p-1} = (t, r)$ dla $r \neq s$ $(t,r)(s,t) = (s,r)(t,r)$ Przesunęliśmy s o jedno miejsce w lewo.
4) $\sigma_{p-1} = (r, p)$ dla $\{r, p\} \cap \{s, t\} = \emptyset$ $(r,p)(s,t) = (s,t)(r,p)$ Przesunęliśmy s o jedno miejsce w lewo.

W przypadkach (2)-(4) przesunęliśmy s o jedno miejsce w lewo. Nie zmieniliśmy przy tym $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{p-2}$ oraz $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_m$ oraz s nie występuje w σ_p a tylko w σ_{p-1}.

Powtarzając to rozumowanie albo natrafimy na przypadek (1) w kolejnym kroku i otrzymamy redukcję liczby transpozycji do $n-2$ albo dojdziemy z s do przypadku w którym s występuje tylko w $\sigma_1 = (s,t)$. Wtedy $s \mapsto t$ pod działaniem permutacji tożsamościowej. ■