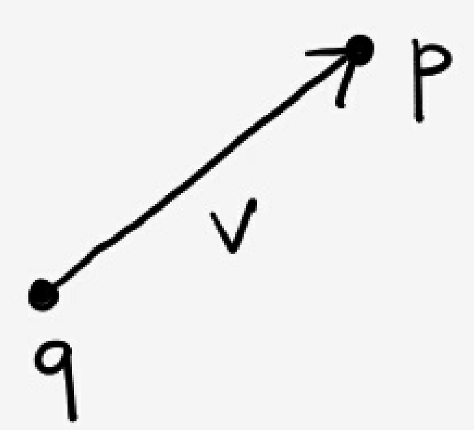
Wojciech Domitrz, Algebra liniowa z geometrią 1, wykład 15: Geometria analityczna

$p, q \in \mathbb{K}^n$ punkty w $\mathbb{K}^n$ $\quad$ $v = p - q$ to wektor w przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$



$p = (p_1, \dots, p_n)$ $\quad$ $q = (q_1, \dots, q_n)$ $\quad$ $v = [p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n]$

$p = q + v$

Def. $(\mathbb{A}, V, +)$ nazywamy przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{K}$ jeśli $\mathbb{A}$ jest niepustym zbiorem, V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ oraz $+ : \mathbb{A} \times V \ni (p, v) \mapsto p + v \in \mathbb{A}$ jest działaniem spełniającym warunki: 1) $\forall p \in \mathbb{A} \quad p + 0 = p$ $\quad$ 2) $\forall p \in \mathbb{A} \ \forall u, v \in V \quad (p+u)+v = p+(u+v)$
3) $\forall p, q \in \mathbb{A} \ \exists! v \in V \quad p + v = q$

Elementy $\mathbb{A}$ to punkty. V to przestrzeń wektorów swobodnych. Elementy V to wektory swobodne.

Wymiar $\mathbb{A}$ to $\dim V$. Przekształcenie $t_v : \mathbb{A} \ni p \mapsto t_v(p) = p + v \in \mathbb{A}$ to translacje lub przesunięcie równoległe.

Def. Różnicą punktów $p, q \in \mathbb{A}$ nazywamy wektor $v \in V$ taki, że $p = q + v$ i oznaczamy $p - q$

Niech $p \in \mathbb{A}$ i $v \in V$ $v \neq 0$. Zbiór $\{ p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{K} \}$ – to prosta

Niech $p, q \in \mathbb{A}$ oraz $p - q \neq 0$. Wtedy zbiór $\{ p + \lambda (q - p) : \lambda \in \mathbb{K} \}$ to prosta przechodząca przez punkty p i q. $r = p + \lambda (p - q)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ to równanie parametryczne tej prostej.

Ogólnie, niech $p \in \mathbb{A}$ oraz $v_1, \dots, v_n$ – baza przestrzeni liniowej V to $\{ p + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ i = 1, \dots, n \}$ to n-wymiarowa przestrzeń afiniczna.

Niech $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}$. Wtedy zbiór $F = \{ p_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (p_i - p_0) \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ i = 1, \dots, n \}$ to podprzestrzeń afiniczna zawierająca punkty $p_0, \dots, p_n$.

Jeśli wektory $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0 \in V$ są liniowo niezależne to $\dim F = n$.

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, niech $\mathbb{A} = \{ x \in \mathbb{K}^n : Ax = b \}$, $V = \{ x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0 \}$

Niech $\mathbb{A} \neq \emptyset$ $\exists p \in \mathbb{A}$ t.ż. $Ap = b$, $0 \in V$, Niech $v \in V$

Wtedy $p + v \in E$. $A(p + v) = A \cdot p + A \cdot v = b + 0 = b$.

Def. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Przestrzeń afiniczną $(\mathbb{E}, V, +)$ nazywamy **euklidesową** jeśli na V istnieje dodatnio określony iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$

czyli $(\cdot|\cdot) : V\times V \ni (v,w) \longmapsto (v|w) \in \mathbb{R}$ t., że 1) $\forall\, x\neq 0 \quad (x|x)>0$ 2) $\forall\, x,y\in V \quad (x|y)=(y|x)$

3) $(\cdot|\cdot)$ jest 2-liniowy

Przykład. $\mathbb{R}^n \quad (x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Ogólnie $\rho(p,q)=\sqrt{(p-q|p-q)}$ jest metryką na $\mathbb{E}$, długość wektora $\|x\|=\sqrt{(x|x)}$ dla $x\in V$

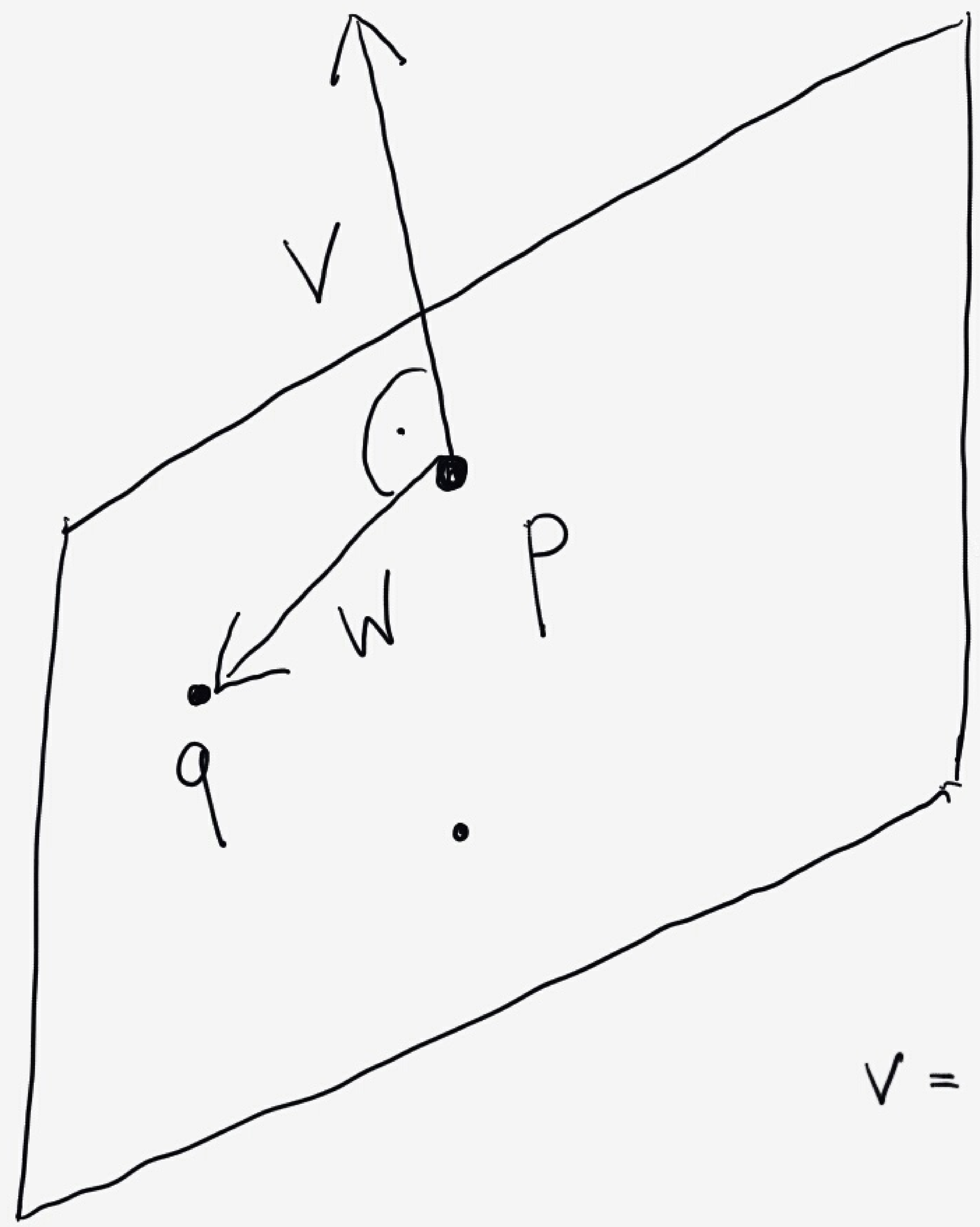
Def. **Kątem między wektorami** $u,v\in V$ nazywamy $\measuredangle\, \varphi\in[0,\pi]$ spełniający warunek

$$\cos\varphi=\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Def. Wektory $v,w\in V$ są **prostopadłe** jeśli $(v|w)=0$.

Def. **Hiperpłaszczyzną** H nazywamy $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń afiniczną n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}^n$.

$v\in V \quad v\neq 0$ Wtedy równanie hiperpłaszczyzny prostopadłej do v i przechodzącej przez q ma postać $(v|x-p)=0$.



$\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez p prostopadła do v

Jak wyznaczyć wektor normalny (prostopadły) do płaszczyzny afinicznej H w $\mathbb{R}^3$ jeśli mamy $H = \{p + \lambda_1 u + \lambda_2 w \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

u, w – wektory liniowo niezależne $\quad p \in \mathbb{R}^3 \quad p \in H$

$$v = u \times w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (u \times w \mid z) = \det[z, u, w]$$

Przykład $\quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1\}$

$$y = 2x + 3z + 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \left| \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$ax + by + cz = d \Rightarrow v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Analogicznie w $\mathbb{R}^n$ $\quad p \in \mathbb{R}^n = A \quad v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n = V$ l. niezal. $\quad v_i = [v_i^1, \ldots, v_i^n]^T$

$H = \{ p + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \}$ – hiperpłaszczyzna $\quad e_i = [0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0]^T$

Wektor normalny do H

$$V = \det \begin{bmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \\ v_1^1, & \ldots, & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1, & \ldots, & v_{n-1}^n \end{bmatrix} = v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$$

$$H = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \} \qquad V = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad V \perp H$$

rów.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$$

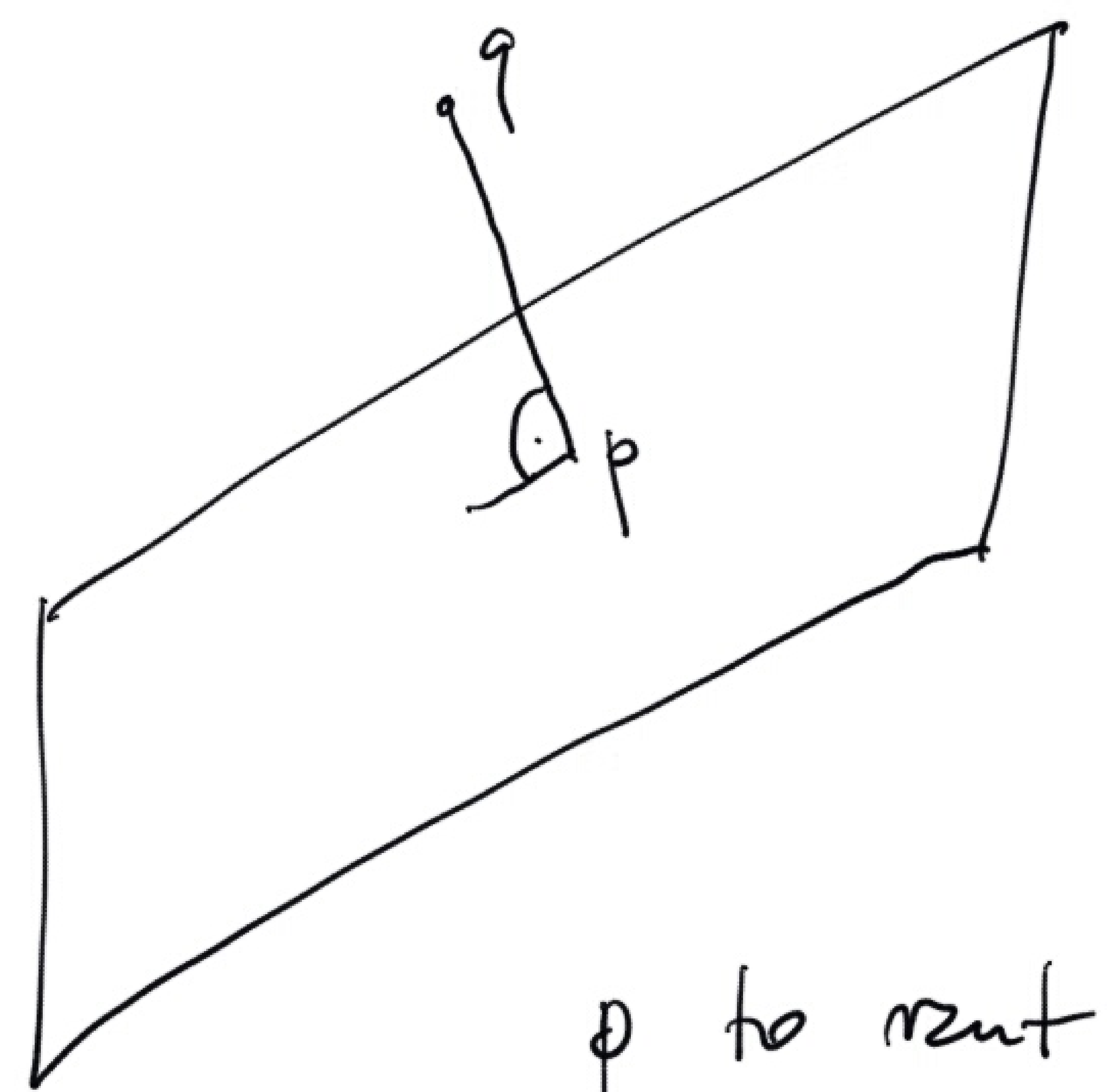
Uwaga! $\quad (u \mid v_1 \times \ldots \times v_{n-1}) = \det[u, v_1, \ldots, v_{n-1}]$

$$(v_i \mid v_1 \times \ldots \times v_{n-1}) = \det[v_i, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n] = 0$$

Odległość punktu $q \in \mathbb{R}^3$ od płaszczyzny $H: ax+by+c=d$

$q \in \mathbb{R}^3$ – punkt $H: ax+by+cz=d$

Znaleźć odległość q od H



$$v \perp H \Rightarrow v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad n = \frac{v}{|v|} \qquad |n| = 1$$

$p = q - \lambda n$ $\quad |\lambda|$ – to odległość q od H

p to rzut ortogonalny q na H

$$a p_1 + b p_2 + c p_3 = d$$

$$a(q_1 - \lambda n_1) + b(q_2 - \lambda n_2) + c(q_3 - \lambda n_3) = d$$

$$a q_1 + b q_2 + c q_3 - d = \lambda \left(v \middle| \frac{v}{|v|} \right) = \lambda \frac{|v|^2}{|v|} = \lambda \cdot |v| \qquad |v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\lambda = \frac{a q_1 + b q_2 + c q_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Tw. Odległość punktu $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ od płaszczyzny $H: ax+by+cz=d$ to

$$\frac{|a q_1 + b q_2 + c q_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$