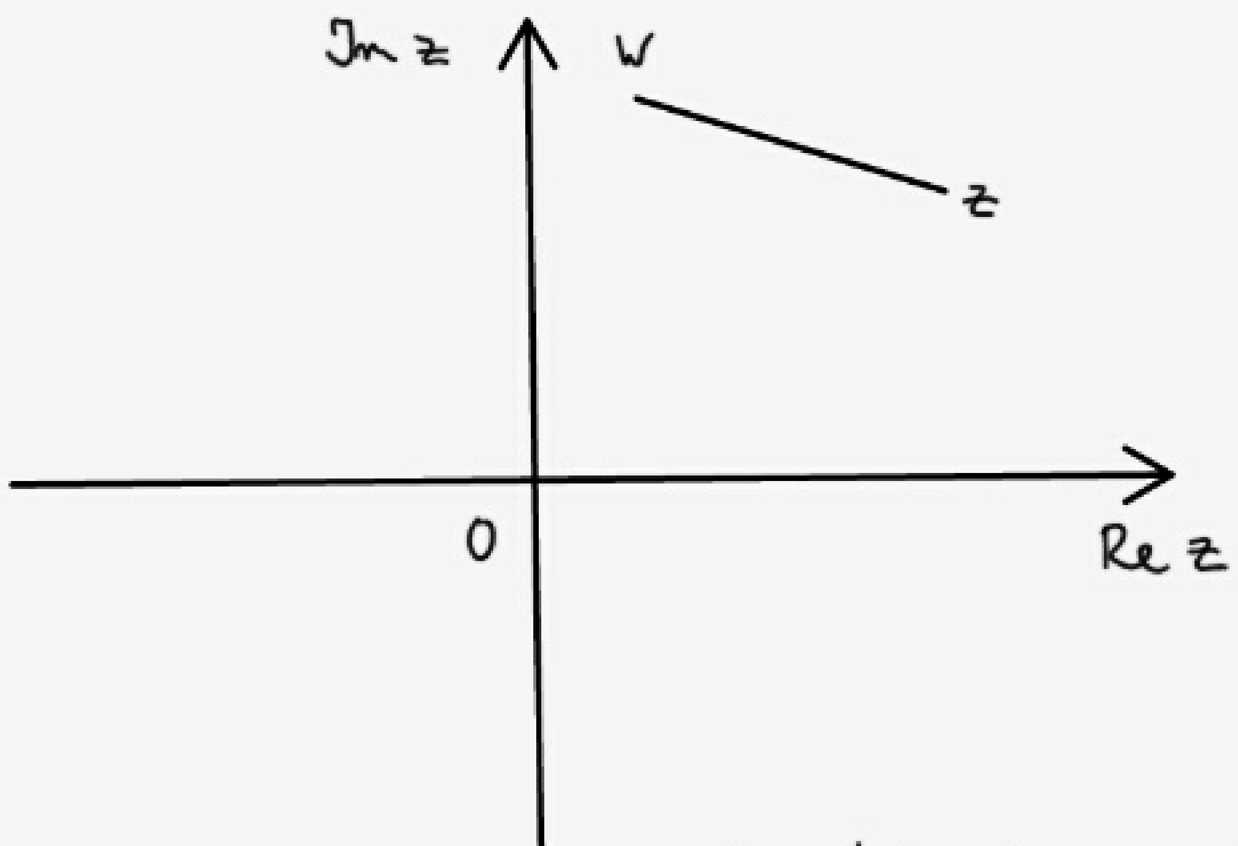
Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykład 3: Metryki

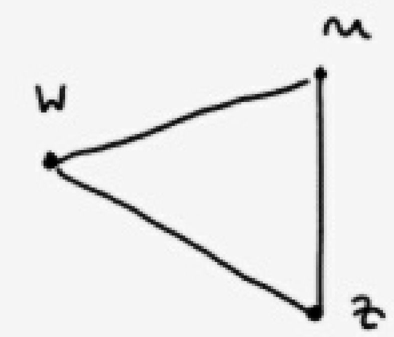


$w = w_1 + i w_2$, $z = z_1 + i z_2$, $\quad |w - z| = \sqrt{(w_1 - z_1)^2 + (w_2 - z_2)^2}$

1) $\forall\, w, z \in \mathbb{C} \quad |w - z| \geq 0$ i $|w - z| = 0 \iff w = z$ Dowód 1) oczywisty

2) $\forall\, w, z \in \mathbb{C} \quad |w - z| = |z - w|$ Dowód 2) $|w - z| = |(-1)(z - w)| = |z - w|$

3) $\forall\, w, z, u \quad |w - z| \leq |w - u| + |u - z|$



Dowód 3) $|w - z| = |w - u + u - z| \leq |w - u| + |u - z|$

X – zbiór

Def. Metryką na zbiorze X nazywamy funkcję $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geq 0$ i $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetria)

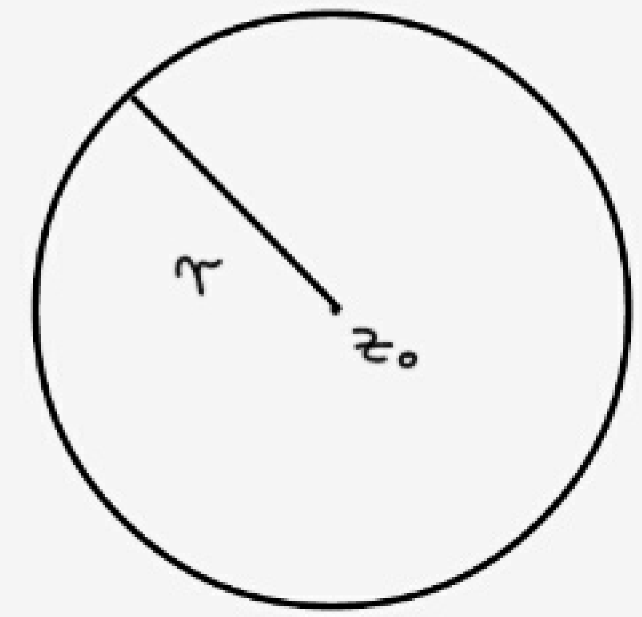
3) $\forall\, x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (nierówność trójkąta)

(X, ρ) – przestrzeń metryczna

Metryki euklidesowe na $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}$

1) $\mathbb{C} \ni z_0$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ - okrąg o środku w z_0 i promieniu r, $|z - z_0| = r$, $z - z_0 = re^{i\varphi}$, $z = z_0 + re^{i\varphi}$

$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ - koło otwarte (bez okręgu na brzegu) o środku w z_0 i promieniu r

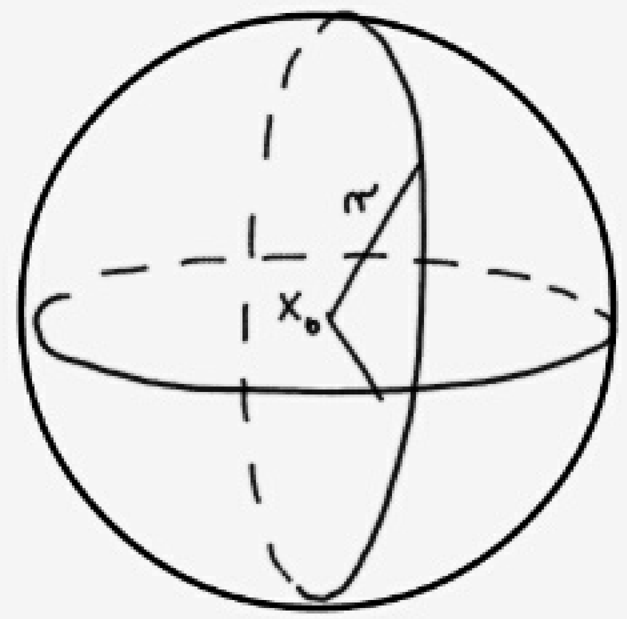


2) $X = \mathbb{R}^3$ $x, y \in \mathbb{R}^3$ $x = (x_1, x_2, x_3)$ $y = (y_1, y_2, y_3)$ $d_3(x,y) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

$\{x \in \mathbb{R}^3 : d_e(x, x_0) < r\}$ - kula otwarta (bez sfery na brzegu) o środku w x_0 i promieniu r

3) $X = \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$ $d_e(x,y) = |x - y|$

$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$



(X, ρ) - przestrzeń metryczna

Def. Kulą otwartą o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$K_\rho(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < r\}$

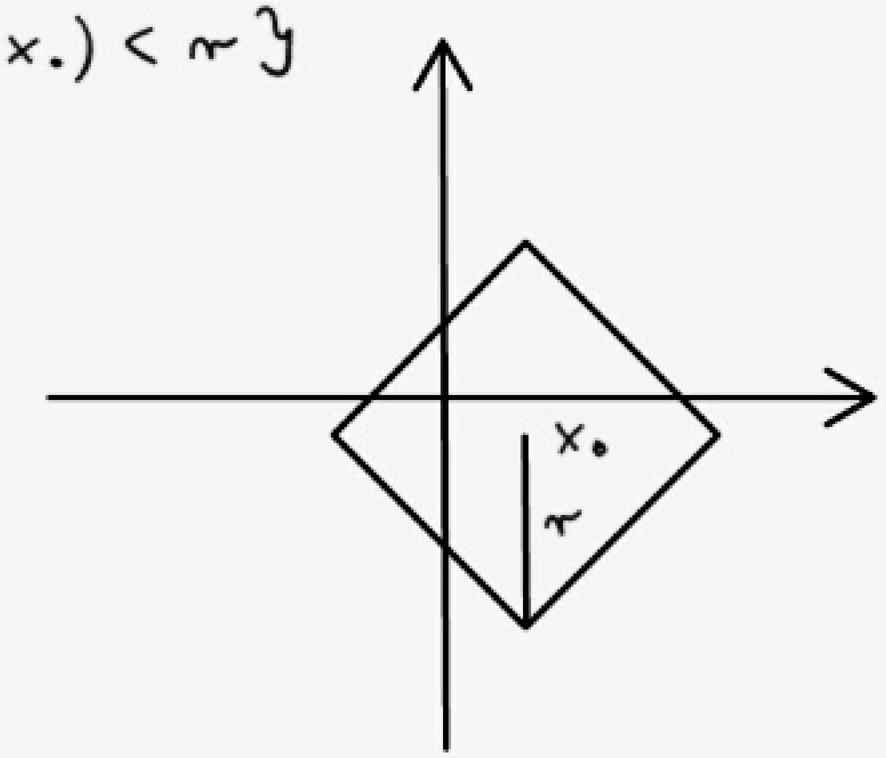
Def. Kulą domkniętą o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

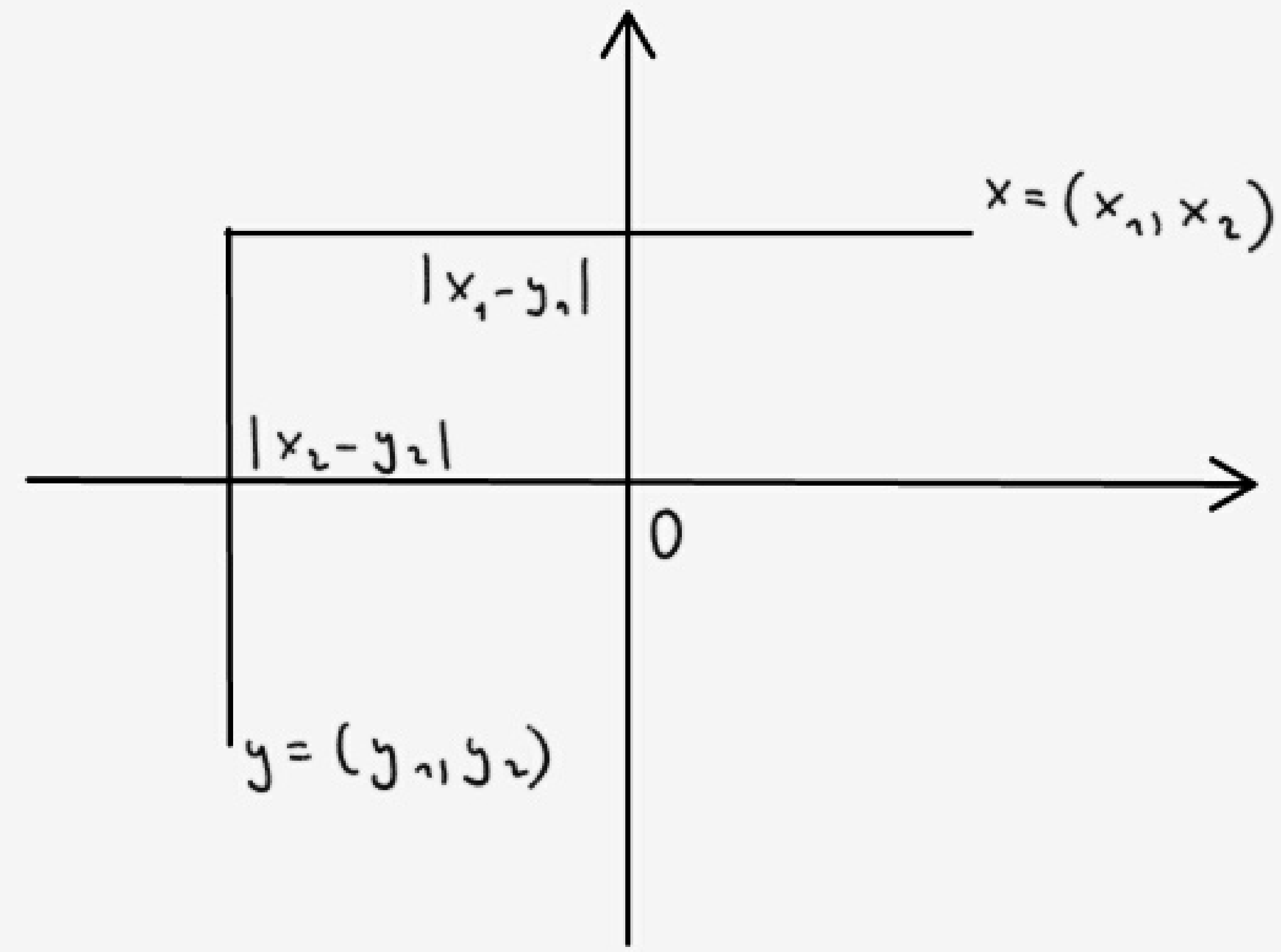
$\overline{K_\rho}(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \leq r\}$

Metryka miejska (Manhattan)

$X = \mathbb{R}^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}^2 \qquad \rho_M(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$K_{\rho_M}(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \rho_M(x, x_0) < r \}$





Metryka dyskretne

X – dowolny zbiór

$$\rho_d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$$

$$K_{\rho_d}(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{dla } r \leq 1 \\ X & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

Metryka euklidesowe na $\mathbb{R}^n$

$X = \mathbb{R}^n \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Tw. Funkcja $d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ jest metryką na $\mathbb{R}^n$

Dowód.: Tylko nierówność trójkąta wymaga dowodu

Tw. (nierówność Schwarza) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

Dowód (nierówności Schwarza). : $0 \le \sum_{i=1}^{n} (v_i - t u_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

zał., że $\exists i \ u_i \neq 0$ $\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \le 0$ ■ (dowodu nierówności Schwarza)

cd. dowodu nierówności trójkąta dla d_e

$$\left(d_e(x,y)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - z_i) + (z_i - y_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \le$$

korzystam z n. Schwarza

$$\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \right)^2 =$$

$$= \left(d_e(x,z) + d_e(z,y) \right)^2 \quad \blacksquare$$

$X = C([a,b], \mathbb{R})$ – funkcje ciągłe na przedziale $[a,b]$ w $\mathbb{R}$

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe $\quad \rho(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$