Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykłady 4-5: Metoda eliminacji Gaussa

<u>Zadanie</u>. Po podwórku chodzą kury i koty. Zwierząt jest w sumie 10 i mają w sumie 28 nóg. Ile jest kur, a ile kotów?

<u>Rozwiązanie</u> (bez zapisania układu równań) Policzmy pary nóg zwierząt. Jest ich $28 : 2 = 14$. Jeśli od par nóg odejmiemy liczbę zwierząt $14 - 10 = 4$ to otrzymamy liczbę kotów. Wyjaśnij dlaczego. Czyli są 4 koty i $10 - 4 = 6$ kur.

Układ równań: x - liczba kur, y - liczba kotów

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 28 \end{cases} \quad r_2 \to \tfrac{1}{2} r_2 \qquad \begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 14 \end{cases} \quad r_2 \to r_2 - r_1$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 4 \end{cases} \quad r_1 \to r_1 - r_2 \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 9 \\ x - 2y + 3z = 8 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases} \quad r_1 \to \tfrac{1}{2} r_1 \qquad \begin{cases} x - \frac{y}{2} + z = \frac{9}{2} \\ x - 2y + 3z = 8 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} r_2 \mapsto r_2 - r_1 \\ r_3 \mapsto r_3 - 2r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} + z = \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2}y + 2z = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}y - 4z = -\frac{29}{2} \end{cases} \quad r_2 \to -\frac{2}{3} r_2 \quad \begin{cases} x - \frac{y}{2} + z = \frac{9}{2} & r_1 \mapsto r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ y - \frac{4}{3}z = -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{2}y - 4z = -\frac{29}{2} & r_3 \mapsto r_3 - \frac{1}{2} r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \qquad + \frac{1}{3}z = \frac{10}{3} & r_1 \mapsto r_1 - \frac{1}{3} z \\ y - \frac{4}{3}z = -\frac{7}{3} & r_2 \mapsto r_2 + \frac{4}{3} z \\ z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ten sam układ w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2, & -1, & 2 & 9 \\ 0, & -2, & 3 & 8 \\ 3, & -1, & -1 & -1 \end{array}\right] \quad r_1 \to \frac{1}{2} r_1 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & -\frac{1}{2}, & 1 & \frac{9}{2} \\ 1, & -2, & 3 & 8 \\ 3, & -1, & -1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_2 \mapsto r_2 - r_1 \\ r_3 \mapsto r_3 - 2r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & -\frac{1}{2}, & 1 & \frac{9}{2} \\ 0, & -\frac{3}{2}, & 2 & \frac{7}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & -4 & -\frac{29}{2} \end{array}\right] \quad r_2 \to -\frac{2}{3} r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & -\frac{1}{2}, & 1 & \frac{9}{2} \\ 0, & 1, & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0, & \frac{1}{2}, & -4 & -\frac{29}{2} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_1 \mapsto r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ \\ r_3 \mapsto r_3 - \frac{1}{2} r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0, & 1, & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0, & 0, & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_1 \mapsto r_1 - \frac{1}{3} z \\ r_2 \mapsto r_2 + \frac{4}{3} z \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & 2 \\ 0, & 1, & 0 & 3 \\ 0, & 0, & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$ – układ równań liniowych

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ – macierz układu równań liniowych

macierz $m \times n$

m - liczba wierszy

n - liczba kolumn

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1j}, & \dots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2j}, & \dots, & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots, & a_{ij}, & \dots, & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mj}, & \dots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$= r_i$ - i-ty wiersz macierzy

$= c_j$ - j-ta kolumna macierzy

a_{ij} - (i,j) wyraz macierzy

Def. Macierzą $m \times n$ nad $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(i,j) \mapsto a_{ij}$

$A_{(i)} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ - i-ty wiersz macierzy A $\qquad A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$

$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ - j-ta kolumna macierzy A $\qquad A = [A^{(1)}, \dots, A^{(n)}]$

Operacje elementarne na wierszach

1) Zamiana wierszy miejscami i-tego wiersza z j-tym wierszem dla $i \neq j$

$r_i \leftrightarrow r_j \qquad r_i \mapsto r_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}, b_j] \qquad r_j \mapsto r_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}, b_i]$

2) Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę $\lambda \neq 0$.

$r_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}, b_j] \qquad r_i \mapsto r_i + \lambda r_j = [a_{i1} + \lambda a_{j1}, a_{i2} + \lambda a_{j2}, \dots, a_{in} + \lambda a_{jn}, b_i + \lambda b_j]$

3) Pomnożenie wiersza przez liczbę $\lambda \neq 0$

$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i] \qquad r_i \mapsto \lambda r_i = [\lambda a_{i1}, \lambda a_{i2}, \dots, \lambda a_{in}, \lambda b_i]$

Przykład

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_1 \to r_1 - r_2 \end{array}$$

postać schodkowa macierzy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

niewiadome główne : x_1, x_2

pozostałe niewiadome to niewiadome wolne : x_3

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{9}{2} \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = 5 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}t \\ x_2 = 5 - t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad\;\; = 7 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad r_1 \leftrightarrow r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad r_1 \rightarrow \frac{1}{2} r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad r_3 \rightarrow r_3 - 2r_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_3 \rightarrow r_3 - r_2 \\ r_1 \rightarrow r_1 - r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

niewiadome główne x_1, x_2 niewiadome wolne x_3

$$x_1 - \frac{3}{2} x_3 = -\frac{9}{2}$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$0 = 1$ – sprzeczność

Układ nie ma rozwiązań!

Tw. Jeśli układ równań liniowych ma dwa różne rozwiązania to ma ich nieskończenie wiele.

Dowód: $(x_1, \dots, x_n)$ oraz $(y_1, \dots, y_n)$ rozwiązania układu

Wtedy $\forall t \in \mathbb{K}$ $(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n))$ też są rozwiązaniami tego układu.

Sprawdzenie przez bezpośredni rachunek. ∎

Def. Układ równań liniowych jest sprzeczny jeśli nie ma rozwiązań, jest oznaczony jeśli ma dokładnie jedno rozwiązanie, jest nieoznaczony jeśli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Sprowadzanie do postaci schodkowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$r_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}, b_i]$ – i-ty wiersz

$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ – j-ta kolumna $\qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ – kolumna wyrazów wolnych

1)

Niech $p = \min\{ j \mid c_j \neq 0 \}$

$$\begin{array}{cccc} & & c_p & \\ & & \downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0, \dots, 0, & 0 & * & \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & & \\ 0, \dots, 0, & 0 & * & \\ 0, \dots, 0, & a_{ip} & * & * \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & & \\ 0, \dots, 0 & a_{mp} & & \end{bmatrix} \quad r_1 \leftrightarrow r_i \quad \left[\begin{array}{c|ccc} & a_{1p} & * & * \\ & * & & \\ 0 & * & & * \\ & \vdots & & \\ & * & & \end{array}\right]$$

$$r_1 \to \frac{1}{a_{1p}} r_2 \qquad \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & * \dots & * \\ & * & & \\ 0 & \vdots & & \\ & * & & \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} r_k \to r_k - a_{kp} r_1 \\ \text{dla } k \neq 1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c|cc} & 1 & * \\ & 0 & * \\ 0 & \vdots & * \\ & 0 & * \end{array}\right]$$

Niech $q = \min\{ j \mid j \geq p \ \exists\, i \geq 2 \ \ a_{ij} \neq 0 \}$

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & * \cdots * & * & * & \\ \cline{2-4} & & & 0 & * & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & 0 & * & * \\ & & & a_{iq} & & \\ & & & * & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & * & & \end{array}\right] \qquad i \neq 2 \Rightarrow r_2 \Leftrightarrow r_i \qquad \left[\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & * \cdots * & * & \\ \cline{2-3} & & & a_{2q} & \\ & & & * & \\ 0 & & 0 & \vdots & * \\ & & & * & \end{array}\right] \quad a_{2q} \neq 0$$

$$r_2 \to \frac{1}{a_{2q}} r_2$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & * \cdots * & * & \\ \cline{2-3} & & & 1 & \\ & & & * & \\ 0 & & 0 & \vdots & * \\ & & & * & \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} r_k \to r_k - a_{kq} r_2 \\ k \neq 2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & * \cdots * & 0 & * & \\ \cline{2-3} & & & 1 & * & \\ & & & 0 & * & \\ 0 & & 0 & \vdots & & * \\ & & & 0 & * & \end{array}\right] \quad \text{itd.}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\downarrow i_1 & & & \downarrow i_2 & & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_r \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & * & \dots & * & 0 & & & 0 & & 0 & b_1 \\
 & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & * & \vdots \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & 1 & b_r \\
 & & & 0 & & & & & & & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & b_m
\end{array}\right]
$$

← postać schodkowa układu

$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_r}$ niewiadome główne

pozostałe niewiadome to niewiadome wolne

<u>Tw.</u> Każdą macierz można sprowadzić do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych na wierszach

Tw. Układ jest sprzeczny $\iff$ w postaci schodkowej w kolumnie wyrazów wolnych istnieje element niezerowy $b_i \neq 0$ dla $i > r$, gdzie r jest liczbą niewiadomych głównych. Jeśli układ nie jest sprzeczny to niewiadome wolne mogą przyjmować dowolne wartości z ciała $\mathbb{K}$, przy zadanych wartościach niewiadomych wolnych niewiadome główne można jednoznacznie wyznaczyć z układu

Dowód.: Bezpośrednio po zapisaniu układu w postaci schodkowej otrzymujemy, że równania dla $i > r$ mają postać $0 = b_i$. Z pozostałych równań można wyznaczyć niewiadome główne za pomocą niewiadomych wolnych. ∎

Wniosek. Niesprzeczny układ jest oznaczony $\iff$ wszystkie niewiadome są główne.

Def. Układ jest kwadratowy jeśli liczba równań jest równa liczbie niewiadomych $m = n$.

Wniosek. Układ kwadratowy jest oznaczony $\iff$ postać schodkowa układu jest następująca

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & * \\ & 1 & & & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & * \end{array}\right]$$

Def. Układ jest jednorodny jeśli kolumna wyrazów wolnych jest zerowa $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Def. Układ niejednorodny to układ, który nie jest jednorodny.

Tw. Układ jednorodny ma zawsze rozwiązanie zerowe. Dowód.: Bezpośrednie sprawdzenie.

Wniosek. Układ kwadratowy jest oznaczony $\Leftrightarrow$ odpowiadający mu układ jednorodny ma tylko rozwiązanie zerowe.

Dowód.: $\Rightarrow$ postać schodkowa $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * \end{array}\right]$. $\Leftarrow$ postać schodkowa jednorodnego $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right]$

Wniosek. Niesprzeczny układ z $n > m$ (liczbą niewiadomych większą od liczby równań) jest nieoznaczony. Układ jednorodny z $n > m$ ma zawsze rozwiązanie niezerowe.

Dowód.: liczba niewiadomych głównych $r \leq m$ i $m < n$. Stąd nie wszystkie zmienne są główne.

Układ liniowy	liczba rozwiązań
niejednodny	0, 1, ∞
jednorodny	1, ∞
niejednorodny n>m	0, ∞
jednorodny n>m	∞