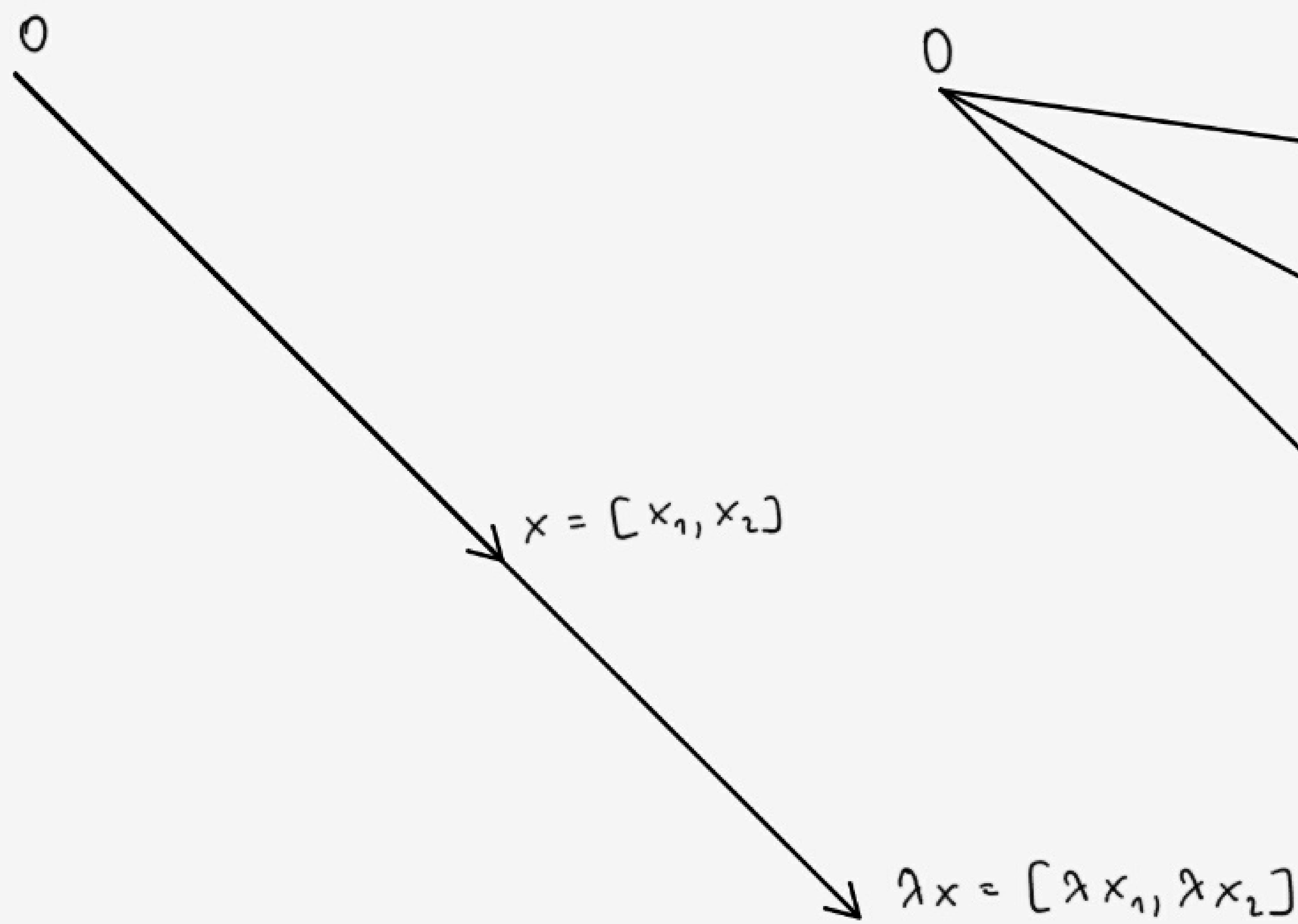
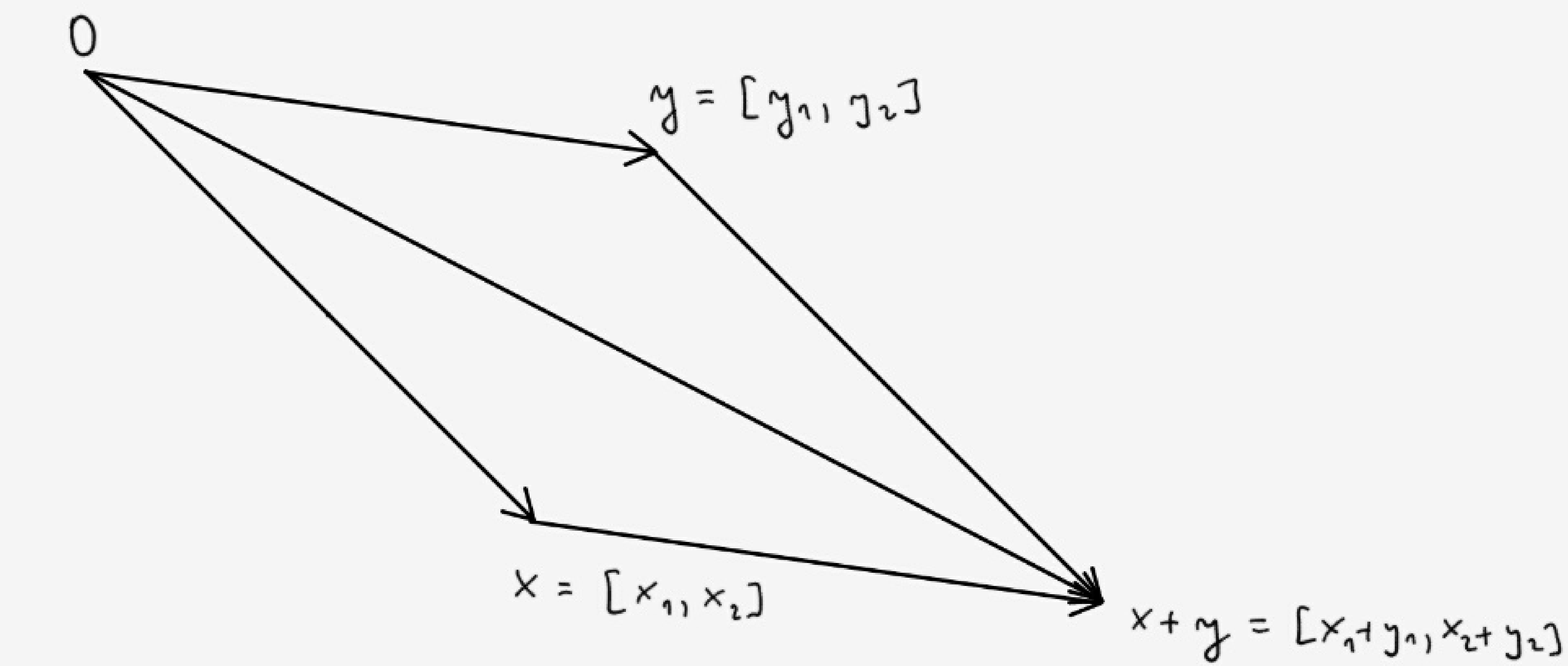
Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykład 6: Przestrzenie liniowe

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Mnożenie wektora $x \in \mathbb{R}^2$ przez liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$



Dodawanie wektorów $x, y \in \mathbb{R}^2$



$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n}$

Dodawanie wektorów $x, y \in \mathbb{K}^n$ $: x + y = [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$

Mnożenie wektora $x \in \mathbb{K}^n$ przez liczbę $\lambda \in \mathbb{K}$ $: \lambda \cdot x = \lambda \cdot [x_1, \dots, x_n] = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$

Własności działań dodawania i mnożenia

$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{K}^n \qquad \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in \mathbb{K}^n$

dodawanie : łączne $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

przemienne $\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad x + y = y + x$

istnienie elementu neutralnego $0 = [0, \dots, 0] \in \mathbb{K}^n \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad x + 0 = 0 + x = x$

istnienie elementu przeciwnego $\forall x \in \mathbb{K}^n \; \exists -x = [-x_1, \dots, -x_n] \in \mathbb{K}^n \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$

mnożenie : unitarne $1 \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad 1 \cdot x = x$

łączne $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania : $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda \cdot y$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Def. Przestrzenią liniową (przestrzenią wektorową) nad ciałem $\mathbb{K}$

nazywamy zbiór V z dwoma działaniami:

dodawaniem $V \times V \ni (x,y) \mapsto x+y \in V$ i

mnożeniem $\mathbb{K} \times V \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in V$

spełniającymi następujące warunki:

dodawanie: łączne $\forall x,y,z \in V \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

przemienne $\forall x,y \in V \quad x+y = y+x$

istnienie elementu neutralnego $\exists y \in V \quad \forall x \in V \; x+y = y+x = x$ element neutralny oznaczamy $0 \in V$

istnienie elementu przeciwnego $\forall x \in V \quad \exists y \in V \quad x+y = y+x = 0$ element przeciwny do x oznaczamy przez $(-x) \in V$

mnożenie: unitarne $1 \in \mathbb{K} \quad \forall x \in V \quad 1 \cdot x = x$

łączne $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x \in V \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania: $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x,y \in V \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x \in V \quad (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Elementy V nazywamy wektorami.

Elementy $\mathbb{K}$ nazywamy skalarami.

Oznaczenie przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$ to $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$

Przykłady:

1) $V = \mathbb{K}^n$ z naturalnymi działaniami (najważniejszy przykład)

2) X - zbiór $\mathbb{K}^X = \{f \mid f: X \to \mathbb{K}\}$ z działaniami $f, g \in \mathbb{K}^X$ $(f+g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $(\lambda \cdot f)(x) \overset{def}{=} \lambda \cdot f(x)$

3) $V = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ $x, y \in \mathbb{R}_+$ $x \oplus y = x \cdot y$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \odot y = x^\lambda$

4) V_1, V_2 - p. liniowe nad $\mathbb{K}$, $V_1 \times V_2$ - p. liniowa nad $\mathbb{K}$ z działaniami

$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ $\forall (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) \overset{def.}{=} (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda \cdot (v_1, v_2) \overset{def}{=} (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$

5) V - p. liniowa nad $\mathbb{K}$, V^n - p. liniowa nad $\mathbb{K}$ z naturalnymi działaniami,

bo $V^2 = V \times V$, a $V^n = V^{n-1} \times V$

Własności działań w abstrakcyjnej przestrzeni liniowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$

1) $\forall x, y, z \in V$ $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ Dowód: $y = 0 + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z) = ((-x) + x) + z = z$

2) $0 \in \mathbb{K}$ $\forall x \in V$ $0 \cdot x = 0 \in V$ Dowód: $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0 \cdot x$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $0 \in V$ $\lambda \cdot 0 = 0$ Dowód: $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ $\lambda \cdot 0 + 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 \Rightarrow 0 = \lambda \cdot 0$

4) $\underbrace{x + \ldots + x}_{n} = n \cdot x$ Dowód: $2 \cdot x = (1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x$, $n \cdot x = ((n-1) + 1) \cdot x = (n-1) \cdot x + 1 \cdot x = \underbrace{(x + \ldots + x)}_{n-1} + x$

5) $(-1) \cdot x = -x$ Dowód: $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow (-1) \cdot x = -x$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

V - p. liniowa nad $\mathbb{K}$, $\quad v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

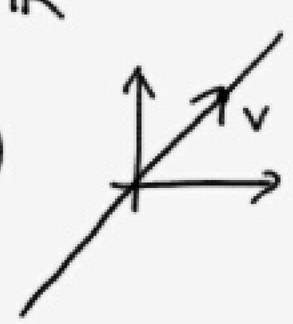
Def. Kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$ ze współczynnikami $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazywamy

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

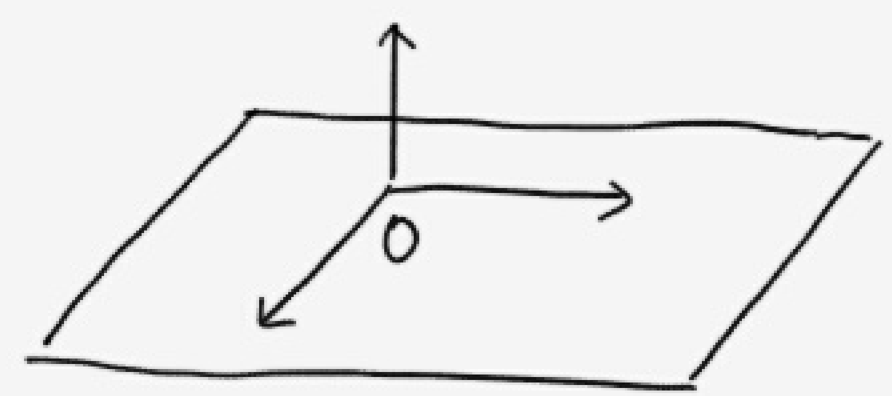
Przykłady. 1) $x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2) $r_1 + \lambda r_2$

Def. Powłoka liniowa układu wektorów $v_1, \ldots, v_k$ to zbiór

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \ldots, v_k) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \overset{\text{df.}}{=} \{ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} \}$$

Przykłady: 1) 

2) $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

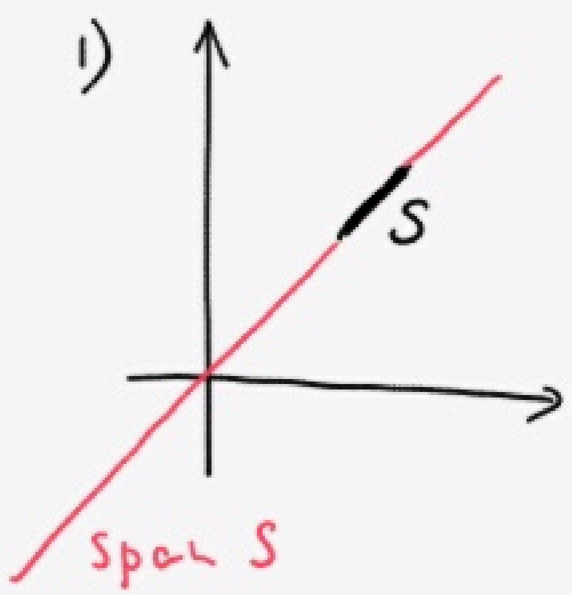


$S \subset V$ podzbiór $\quad S \neq \emptyset$

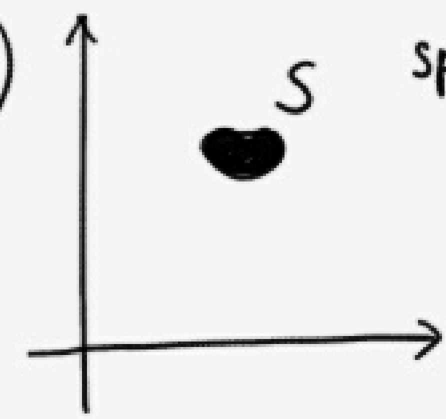
Def. Powłoką liniową rozpiętą przez S nazywamy zbiór

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \mid k \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_k \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

Przykłady. 1)



2)

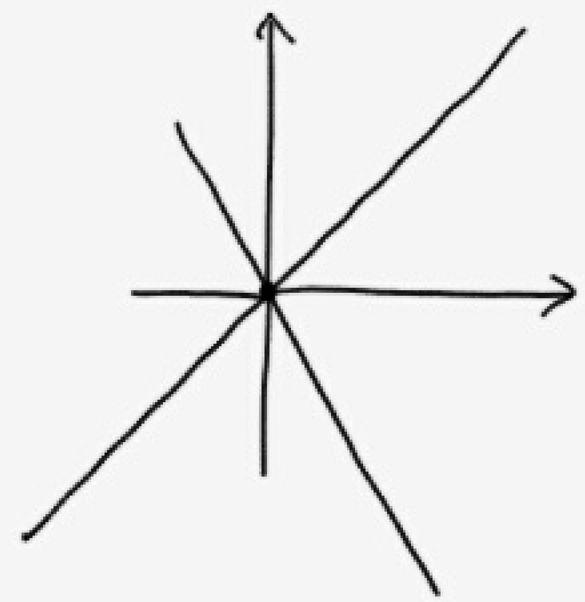


$\operatorname{span} S = \mathbb{R}^2$

Def. Podzbiór $W \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ jeśli W wraz z działaniami $+|_{W \times W} : W \times W \ni (v, w) \mapsto v + w \in W$ oraz $\cdot|_{\mathbb{K} \times W} : \mathbb{K} \times W \ni (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \in W$ jest przestrzenią liniową.

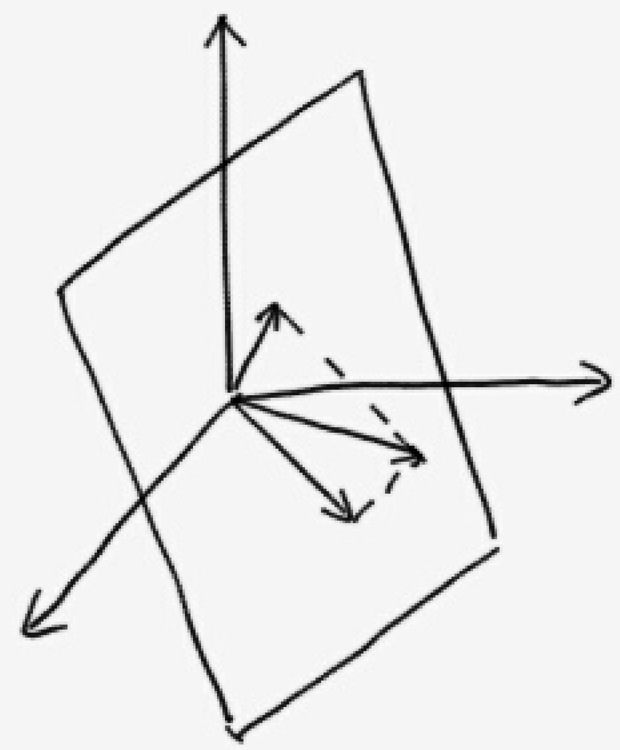
Tw. Niepusty podzbiór $W \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, v, w \in W \quad v + w \in W \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in W \quad \lambda \cdot v \in W$

Przykłady: 1) span S jest podprzestrzenią liniową 2)



proste przechodzące przez 0 są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^2$

3) proste przechodzące przez 0, płaszczyzny zawierające 0 to podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$



Tw. $\operatorname{span} S = \bigcap\limits_{\substack{S \subset W \\ W \text{ podprzestrzeń} \\ \text{liniowa } V}} W$

Dowód: $S \subset W \Rightarrow \operatorname{span} S \subset W \Rightarrow \operatorname{span} S \subset \bigcap\limits_{\substack{S \subset W \\ W \text{ podprzestrzeń} \\ \text{liniowa } V}} W$

$S \subset \operatorname{span} S$ i $\operatorname{span} S$ podprzestrzeń liniowa $V \Rightarrow \bigcap\limits_{\substack{S \subset W \\ W \text{ podprzestrzeń} \\ \text{liniowa } V}} W \subset \operatorname{span} S$