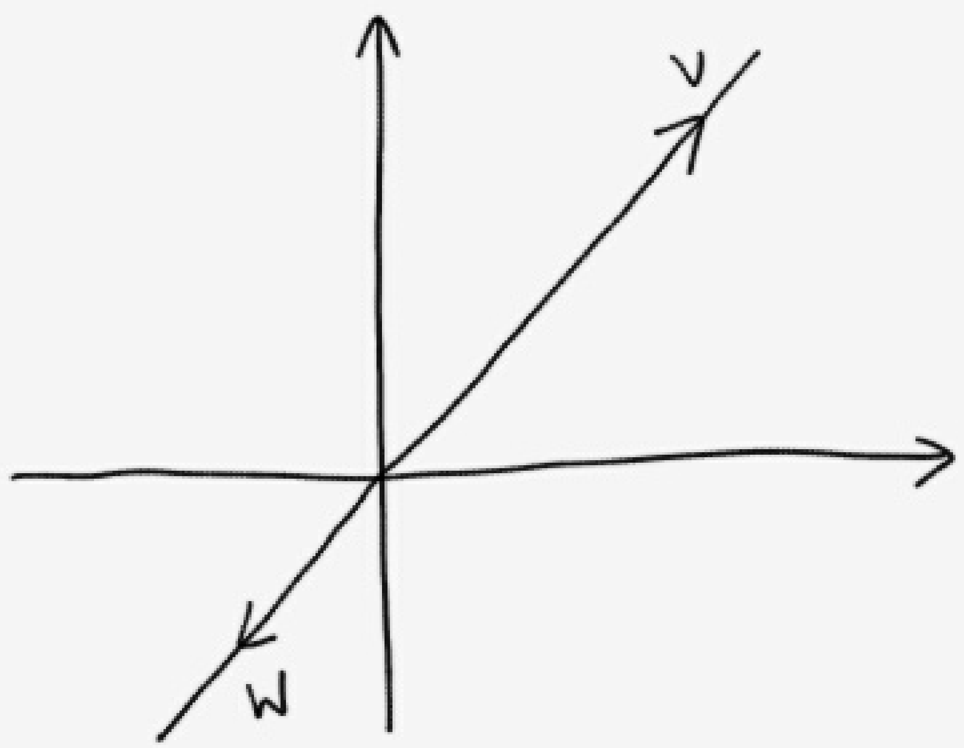
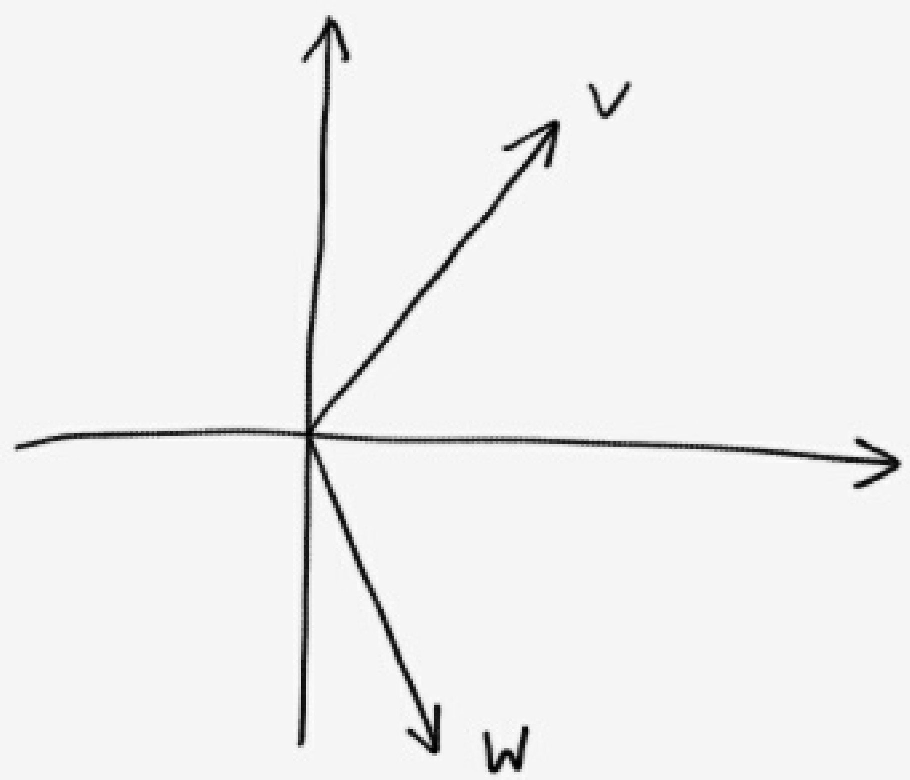
Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykład 7-8: Liniowa niezależność, baza, wymiar.

Przykład. 1) $v, w \in \mathbb{R}^2$ należą do jednej prostej na $\mathbb{R}^2$, przechodzącej przez 0. Wtedy jeśli $v \neq 0$ to $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ $w = \alpha \cdot v$ czyli $\alpha v - 1 \cdot w = 0$, a jeśli $w \neq 0$ to $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$ $v = \beta \cdot w$ czyli $1 \cdot v - \beta \cdot w = 0$. Stąd $\exists (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ t, że $\alpha v + \beta w = 0$

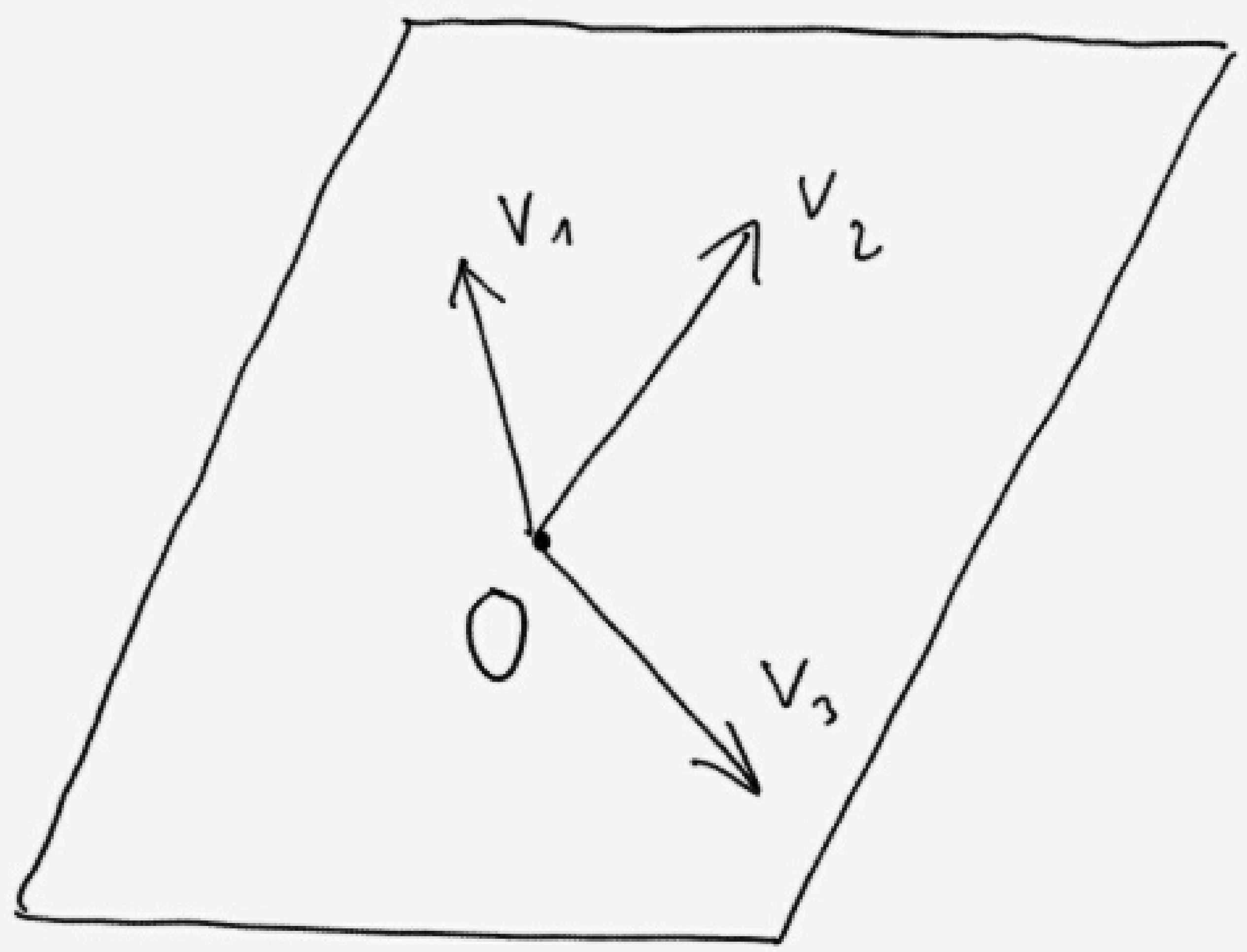




2) $v, w \in \mathbb{R}^2$ nie należą do jednej prostej na $\mathbb{R}^2$ przechodzącej przez 0.

Wtedy $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot v + \beta \cdot w = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0)$ czyli $\alpha = \beta = 0$

Przykład 3) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ leżą na jednej płaszczyźnie przechodzącej przez 0 jeżeli
$\exists\, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ $\quad v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ lub $\exists\, \alpha_1, \alpha_3$ $\quad v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ lub $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\quad v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$
czyli $\exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$ $\quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$



4) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ nie leżą na jednej płaszczyźnie przechodzącej przez 0, jeżeli
$\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

V - przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$, $v_1, \dots, v_k \in V$

Def. Wektory $v_1, \dots, v_k$ są **liniowo niezależne** jeśli $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ $\quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory $v_1, \dots, v_k$ są **liniowo zależne**.

Def. **Układem wektorów** $v_1, \dots, v_k \in V$ nazywamy element $V^k = \underbrace{V \times \dots \times V}_{k}$

Def. Układ wektorów $v_1, \dots, v_k \in V$ jest **liniowo (nie)zależny** jeśli wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo (nie)zależne.

Def. **Podukładem wektorów układu** $v_1, \dots, v_k \in V$ nazywamy układ wektorów $v_{i_1}, \dots, v_{i_l} \in V$, gdzie $l \leq k$ oraz $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$.

Przykład. v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 - układ, v_2, v_4 - podukład, v_1, v_3, v_4, v_5 - podukład, v_5 - podukład

Tw. Jeżeli układ wektorów $v_1, \dots, v_k$ zawiera podukład wektorów $v_{i_1}, \dots, v_{i_l}$, gdzie $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$ które są liniowo zależne to $v_1, \dots, v_k$ są liniowo zależne.

Dowód. $v_{i_1}, \dots, v_{i_l}$ - l. zależne $\Rightarrow \exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq (0, \dots, 0)$ $\quad \alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_l v_{i_l} = 0$

$$\beta_j \overset{def.}{=} \begin{cases} \alpha_s & \text{dla } j = i_s \quad \text{dla } s = 1, \dots, l \\ 0 & \text{dla } j \neq i_s \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = \alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_l v_{i_l} = 0 \\ &(\beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0) \end{aligned}\right\} \text{stąd } v_1, \dots, v_k \text{ l. zależne} \blacksquare$$

Wniosek. Dowolny podukład wektorów układu wektorów liniowo niezależnych jest liniowo niezależny.

Tw. Wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne $\iff$ conajmniej jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód.: $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne $\Rightarrow \exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$ takie, że $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0) \Rightarrow \exists\, i \quad \alpha_i \neq 0 \qquad \alpha_i v_i = \sum_{j \neq i} -\alpha_j v_j \Rightarrow v_i = \sum_{j\neq i} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) v_j$ czyli

v_i jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ ■

$\Leftarrow$ $v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_i \qquad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_k v_k = 0$ oraz

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, -1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$. Stąd $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k$ są l. zależne ■

Tw. Niech $v_1, \ldots, v_k$ będą liniowo niezależne oraz niech $w \in V$. Wtedy
Wektory $v_1, \ldots, v_k, w$ są liniowo zależne $\iff$ w jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_k$.

Dowód.: $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_k, w$ są liniowo zależne $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta w = 0$ oraz $(*)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta) \neq (0, \ldots, 0)$

załóżmy, że $\beta = 0$ wtedy $\alpha v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + 0 \cdot w = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$ i $v_1, \ldots, v_k$ l. niezależne

Stąd $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta) = (0, \ldots, 0)$ sprzeczność z $(*)$. Stąd $\beta \neq 0$

$\beta w = (-\alpha_1) v_1 + \ldots + (-\alpha_k) v_k \qquad w = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right) v_1 + \ldots + \left(\frac{-\alpha_k}{\beta}\right) v_k$ czyli w jest kombinacją liniową $v_1, \ldots, v_k$

$\Leftarrow$ oczywiste ■

Przykład 1) $V=\mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=0$ $\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}$ $r_2 \to r_2 - 2r_1$

$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 7\end{bmatrix}$ $r_2 \to \frac{1}{7}\cdot r_2$ $\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{cases}\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0\\ \alpha_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\end{cases}$ stąd $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ są l. niezależne.

$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $\exists\, \beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ $\beta_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ czyli $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right)$.

2) $v, w \in \mathbb{R}^2$ l. niezależne to $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v,w)$

V – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$

Def. Układ wektorów $v_1,\dots,v_n$ jest bazą przestrzeni wektorowej V jeśli:

1) Wektory $v_1,\dots,v_n$ są liniowo niezależne

2) V jest rozpięty przez układ wektorów $v_1,\dots,v_n$ tzn. $V=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1,\dots,v_n)$

Przykłady 1) baza $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ – są liniowo niezależne oraz $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

2) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ l. niezależne to v_1, v_2, v_3 – baza $\mathbb{R}^3$

3) baza $\mathbb{K}^n$: $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, e_i=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow i\text{-te}, \dots, e_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ – l. niezależne oraz $\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

4) $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ $\quad v_1, \dots, v_n$ - l. niezależne to układ $v_1, \dots, v_n$ jest bazą $\mathbb{K}^n$.

5) $\mathbb{K}[x]$ - p. liniowa wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$w(x) \in \mathbb{K}[x]$ $\quad w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $\quad$ Załóżmy, że $v_1(x), \dots, v_m(x)$ stanowią bazę $\mathbb{K}[x]$

Wtedy $d_i = \deg v_i(x)$ $\quad d = \max_{i=1,\dots,m} d_i$ $\quad w(x) = x^{d+1}$

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i(x)$ - wielomian stopnia $\leq d$ więc $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ $\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i(x) \neq w(x)$

czyli nie istnieje (skończona) baza przestrzeni liniowej $\mathbb{K}[x]$.

Tw. Jeżeli $v_1, \dots, v_n$ jest bazą p. liniowej V to $\forall\, v \in V$ $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ $\quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Dowód: Załóżmy, że v można także przedstawić jako $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$. Wtedy

$$0 = v - v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$. Ale $v_1, \dots, v_n$ l. niezal.

Stąd $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ czyli $\alpha_i = \beta_i$ dla $i = 1, \dots, n$. ∎

Def. Jeśli układ $v_1, \dots, v_n$ jest bazą p. liniowej V oraz $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ to liczby

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **współrzędnymi wektora v w bazie** $v_1, \dots, v_n$.

Przykład. 1) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – baza $\mathbb{R}^2$

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (x, y)$ – współrzędne wektora v względem bazy $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ – baza $\mathbb{R}^2$

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha = y \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \alpha = y \\ \beta = y - x \end{matrix}$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - y + x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

współrzędne wektora $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ względem bazy $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ to $(y, y-x)$

Przykład 2) $\mathbb{R}_1[x]$ – przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia ≤ 1

$w(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ $\quad w(x) = a_0 + a_1 x$ $\quad$ wielomiany $v_0(x) = 1$ $\quad v_1(x) = x$ to baza $\mathbb{R}_1[x]$

Współrzędne $w(x)$ względem bazy $v_0(x), v_1(x)$ to (a_0, a_1)

Wielomiany $u_1(x) = 1 + x$, $u_2(x) = 1 - x$ to baza $\mathbb{R}_1[x]$

$w(x) = a_0 + a_1 x = \beta_1 (1 + x) + \beta_2 (1 - x) = \beta_1 + \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) x$ $\quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = a_0 \\ \beta_1 - \beta_2 = a_1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \beta_1 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \\ \beta_2 = \frac{1}{2}(a_0 - a_1) \end{matrix}$

Współrzędne $w(x)$ względem bazy $u_1(x), u_2(x)$ to $\left(\frac{1}{2}(a_0 + a_1), \frac{1}{2}(a_0 - a_1) \right)$

Tw. V - p. liniowa. Niech wektory $e_1, \dots, e_s \in V$ będą l. niezależne.
Jeśli każdy z wektorów e_i dla $i = 1, \dots, s$ jest kombinacją liniową wektorów $f_1, \dots, f_t \in V$ to $s \leq t$.

Dowód: $e_1 = \alpha_{11} f_1 + \dots + \alpha_{t1} f_t \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ dla $i = 1, \dots, t$ i $j = 1, \dots, s$

$$\vdots$$

$$e_s = \alpha_{1s} f_1 + \dots + \alpha_{ts} f_t$$

zał, że $s > t \qquad \beta_1 e_1 + \dots + \beta_s e_s = 0 \qquad (\beta_1 \alpha_{11} + \dots + \beta_s \alpha_{1s}) f_1 + \dots + (\beta_1 \alpha_{t1} + \dots + \beta_s \alpha_{ts}) f_t = 0$

Szukamy $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{K}$ spełniających jednorodny układ równań (zawsze posiadający rozwiązania)

$$\begin{cases} \alpha_{11} \beta_1 + \dots + \alpha_{1s} \beta_s = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{t1} \beta_1 + \dots + \alpha_{ts} \beta_s = 0 \end{cases}$$

Liczba niewiadomych $- s > t -$ liczba równań

Istnieje więc rozwiązanie niezerowe tego układu $(\beta_1, \dots, \beta_s) \neq (0, \dots, 0)$

Stąd wektory $e_1, \dots, e_s$ nie są l. niezależne. Sprzeczność z zał.

Dlatego $s \leq t$. ∎

Def. Dwa układy wektorów $v_1, \dots, v_s \in V$ i $w_1, \dots, w_t \in V$ nazywamy **równoważnymi** jeśli każdy wektor jednego układu jest kombinacją liniową wektorów drugiego układu (i odwrotnie)

Przykład. $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}\right)$ to układy równoważne, bo

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\-1\\-4\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ - l. niezal. $\quad \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}$ - l. niezal. $\quad \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}$ - l. zal.

Wniosek z tw. Dowolne dwa równoważne układy liniowo niezależne zawierają tę samą liczbę wektorów (może to być liczba nieskończona)

Def. **Rzędem** układu wektorów nazywamy liczbę wektorów dowolnego maksymalnego podukładu liniowo niezależnego tego układu.

Przykład. 1) Rząd układu $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ to 2, rząd układu $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}\right)$ to też 2

Przykład 1) $V=\mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ - l. niezależne, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ - l. zależne, bo $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$v, w \in \mathbb{R}^2$ l. niezależne. Wtedy $\forall u \in \mathbb{R}^2$ u, v, w są liniowo zależne.

2) $V=\mathbb{R}^3$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ - l. niezależne $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, w \in \mathbb{R}^3$ - l. zależne.

Def. Przestrzeń liniową V nazywamy **n-wymiarową** jeśli istnieje układ n wektorów liniowo niezależnych w V i nie ma układu liniowo niezależnego o większej liczbie wektorów niż n. Liczbę n nazywamy **wymiarem** przestrzeni liniowej V i oznaczamy $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Wymiar przestrzeni zerowej $V=\{0\}$ wynosi 0 czyli $\dim_{\mathbb{K}}\{0\}=0$.

Tw. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową. Wtedy każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę V.

Dowód: $v_1, \dots, v_n \in V$ l. niezależne. Niech $w \in V$ wtedy $v_1, \dots, v_n, w$ są l. zależne czyli w jest kombinacją liniową $v_1, \dots, v_n$. Więc $v_1, \dots, v_n$ jest bazą.

Wniosek. Każdy maksymalny (skończony) układ wektorów liniowo niezależnych V stanowi bazę V. Wymiar V jest równy liczbie elementów bazy.

Tw. Niech $e_1, \dots, e_n$ – baza p. liniowej V.

Jeśli $f_1, \dots, f_s \in V$ jest układem liniowo niezależnym i $s < n$ to układ $f_1, \dots, f_s$ można wektorami z bazy $e_1, \dots, e_n$ uzupełnić do bazy.

Dowód.: (*) $f_1, \dots, f_s, e_1, \dots, e_n$ jest l. zależny.

$f_1, \dots, f_s$ jest l. niezal. Usuwamy z ciągu (*) po kolei te elementy które są l. zależne od poprzednich wektorów Otrzymujemy ciąg $f_1, \dots, f_s, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$

$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = 0$ Jeśli $\exists i$ $\beta_i \neq 0$ to niech $k = \max\{i : \beta_i \neq 0\}$

Wtedy $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_k e_{i_k} = 0$ i $\beta_k \neq 0$ Stąd otrzymujemy, że

$e_{i_k} = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta_k}\right) f_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_s}{\beta_k}\right) + \left(-\frac{\beta_1}{\beta_k}\right) e_{i_1} + \dots + \left(-\frac{\beta_{k-1}}{\beta_k}\right) e_{i_{k-1}}$ a to sprzeczność z konstrukcją e_{i_k}

Czyli $\beta_l = 0$ dla $l = 1, \dots, t$. Wtedy $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s = 0$ i $f_1, \dots, f_s$ l. niezal. Stąd $\alpha_j = 0$ dla $j = 1, \dots, s$. Czyli $f_1, \dots, f_s, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$ – l. niezal.

Każdy wektor z V jest kombinacją liniową $e_1, \dots, e_n$. Stąd także kombinacją lin. wektorów $f_1, \dots, f_s, e_1, \dots, e_n$. Z konstrukcji wynika, że także $f_1, \dots, f_s, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$. Stąd wynika, że $s+t=n$ ($f_1, \dots, f_s, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$ – jest maksymalnym układem liniowo niezależnym ■

Wniosek. W – podprzestrzeń liniowa skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V.
Wtedy W jest skończenie wymiarowa oraz każdą bazę W można rozszerzyć do bazy V.

Wniosek. $W \subset \mathbb{K}^n$ W jest powłoką liniową. Wtedy W ma skończoną bazę.