Wojciech Domitrz, Algebra Liniowa z Geometrią 1, wykład 9: Rząd macierzy.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ dla } j = 1, \ldots, n \qquad A_{(i)} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] \quad \text{dla } i = 1, \ldots, m$$

Def. **Rząd kolumnowy** macierzy A to $r_k(A) = \operatorname{rank}[A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}] = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$

Def. **Rząd wierszowy** macierzy A to $r_w(A) = \operatorname{rank}[A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}] = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}\}$

Przykład 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(1)} = [1,2], \; A_{(2)} = [2,0], \; A_{(3)} = [0,3], \; A_{(4)} = [-1,0]$$

$$r_k(A) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2 \qquad r_w(A) = \operatorname{rank}\left([1,2], [2,0], [0,3], [-1,0] \right) = 2$$

Przykład 2)

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 4 \\ 0 & 2, & 3, & 0 \\ 1, & 2, & 2, & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{(i)} \in \mathbb{R}^3 \text{ dla } i = 1,2,3,4 \qquad \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \leq 3$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_k(A) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

$$A_{(3)} = [1,2,2,4] = [1,0,-1,4] + [0,2,3,0] = A_{(1)} + A_{(2)}$$

$$\lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$r_w(A) = \operatorname{rank}\left(A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \right) = 2$$

Lemat. Jeżeli macierz A' powstaje z macierzy A przez zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach to: (i) $r_w(A) = r_w(A')$

(ii) $r_k(A) = r_k(A')$

Dowód: a) operacje elementarne na wierszach to

1) $A_{(i)} \leftrightarrow A_{(j)}$ czyli zmiana kolejności wektorów

2) $A_{(i)} \to \alpha \cdot A_{(i)}$ pomnożenie jednego z wektorów rozpinających powłokę przez liczbę $\alpha \neq 0$.

$\alpha \neq 0$

3) $A_{(i)} \to A_{(i)} + \alpha \cdot A_{(j)}$ dodanie do wektora innego wektora pomnożonego przez liczbę

Operacje (1)-(3) nie zmieniają powłoki rozpiętej przez wiersze macierzy A.

b) Układy równań (*) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A^{(j)} = 0$ oraz (**) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A'^{(j)} = 0$ są równoważne, gdyż macierz A' powstała z macierzy A za pomocą skończonej liczby operacji elementarnych.

Stąd każde rozwiązanie (*) jest też rozwiązaniem (**) i odwrotnie.

Czyli każdemu maksymalnemu podukładowi l. niezależnemu układu $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ odpowiada maksymalny podukład l. niezależny układu $A'^{(1)}, \dots, A'^{(n)}$ $\blacksquare$

Tw. Dla dowolnej macierzy A $r_w(A) = r_k(A)$.

Dowód.: Sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
p_1 & & & & p_2 & & & & p_3 & & & & p_4 & & & & p_r & & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & &
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

kolumny główne

$$\tilde{A}^{(p_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(p_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \tilde{A}^{(p_i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad \dots, \quad \tilde{A}^{(p_r)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\tilde{A}^{(p_1)}, \dots, \tilde{A}^{(p_r)}$ są l. niezależne $\quad \operatorname{rank}\{\tilde{A}^{(p_1)}, \dots, \tilde{A}^{(p_r)}\} = r \quad \Rightarrow \quad r_k(\tilde{A}) \geq r$

$\tilde{V} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{ \tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)} \}$

$v \in \tilde{V} \Rightarrow v = \left.\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} r \qquad \tilde{V} \subset \{ x \in \mathbb{K}^m : x_i = 0 \text{ dla } i > r \} \qquad r_k(\tilde{A}) = \dim \tilde{V} \leq r$

Stąd $\quad r_k(\tilde{A}) \geq r \quad$ i $\quad r_k(\tilde{A}) \leq r \Rightarrow r_k(\tilde{A}) = r$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{(r)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_{(i)} = [0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p_i}}{1}, * \dots *] \quad$ dla $i = 1, \dots, r$

$1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq n$

$\lambda_1 \tilde{A}_{(1)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}_{(r)} = 0 \qquad \lambda_1 \tilde{A}_{(1)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}_{(r)} = [0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p_1}}{\lambda_1}, *, \dots, *, \underset{\substack{\uparrow \\ p_2}}{\lambda_2} *, \dots, * \underset{\substack{\uparrow \\ p_3}}{\lambda_3} * \dots * \underset{\substack{\uparrow \\ p_r}}{\lambda_r} * \dots *] = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \quad$ czyli $\quad \tilde{A}_{(1)}, \dots, \tilde{A}_{(r)}$ l. niezależne. Stąd $\quad r_w(\tilde{A}) = r$

$r_w(A) = r_w(\tilde{A}) = r = r_k(\tilde{A}) = r_k(A) \quad \blacksquare$

Def. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę $\operatorname{rank} A = r_k(A) = r_w(A)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (***)$$

Wniosek. Liczba niewiadomych głównych układu liniowego $(***)$ nie zależy od sposobu sprowadzenia do postaci schodkowej i jest równa $\operatorname{rank} A$, gdzie A to macierz układu $(***)$.

Tw. Kroneckera - Capellego.

Układ $(***)$ jest niesprzeczny $\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \mid b]$

Dowód: $\Rightarrow$ $(***)$ jest niesprzeczny jeśli b jest kombinacją liniową $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ czyli

czyli $b \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$. Stąd $\operatorname{rank}\left(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b\right) = \operatorname{rank}\left(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\right)$ czyli

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \mid b]$

$\Leftarrow$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \mid b]$ Wtedy $\left(A^{(p_1)}, \ldots, A^{(p_r)}\right)$ - baza $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b\}$

$A^{(p_1)}, \ldots, A^{(p_r)}, b \in \mathbb{K}^m$ l. zależne $\Rightarrow b \in \operatorname{span}\{A^{(p_1)}, \ldots, A^{(p_r)}\} = \operatorname{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$ ∎