Analiza matematyczna, kierunek Informatyka (WEiTI PW). Wykład: Ciągi liczbowe

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Oznaczenia:

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

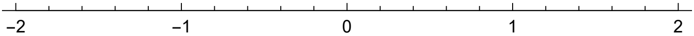
Zbiór liczb naturalnych to $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Zbiór liczb całkowitych to $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

Zbiór liczb wymiernych to $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.

Zbiór liczb rzeczywistych to

$$\mathbb{R} = \{\lim_{n\to\infty} a_n : (a_n) \text{ zbieżny, } a_n \in \mathbb{Q} \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}.$$



Zbiór liczb niewymiernych to $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Kwantyfikatory: ogólny i szczegółowy
Symbol $\forall\, x$ oznacza dla każdego x.
Symbol $\exists\, x$ oznacza istnieje x.
Przykład:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in N \quad n > x.$$

Wiadomości wstępne - funkcje

X, Y-zbiory

Wiadomości wstępne - funkcje

X, Y-zbiory

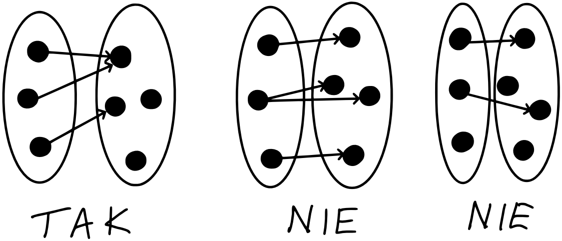
Definicja

Jeśli każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $y \in Y$, to takie przyporządkowanie nazywamy *funkcją* określoną na zbiorze X (dziedzina) o wartościach w zbiorze Y (przeciwdziedzina).

$f : X \to Y$, $\quad f(x) = y$, $\quad x$ - argument (zmienna niezależna), y - wartość (zmienna zależna).

Jeśli $X, Y \subset \mathbb{R}$, to f - funkcja liczbowa (jednej zmiennej rzeczywistej)

funkcja



Iloczyn (produkt) kartezjański zbiorów X i Y to zbiór

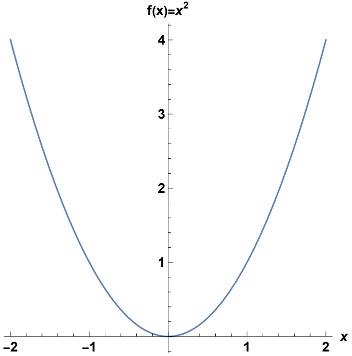
$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X,\ y \in Y\}.$$

Obraz f (obraz dziedziny f, zbiór wartości f) to

$$f(X) = \{f(x) \in Y :\ x \in X\}.$$

Wykres funkcji f to zbiór

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y |\ x \in X\}.$$

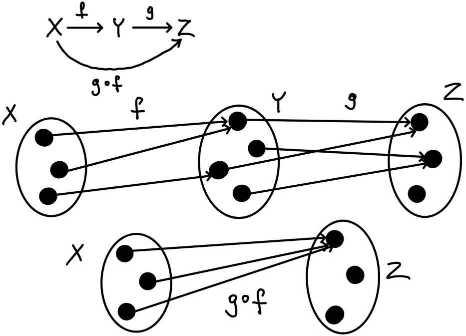


$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$

Definicja

Funkcję $h : X \to Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$

f - funkcja wewnętrzna, g - funkcja zewnętrzna



$f : X \to Y\,,\;\; g : Y \to Z$

Definicja

Funkcję $h : X \to Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$
f - funkcja wewnętrzna, g - funkcja zewnętrzna

np. (1) $f(x) = \sqrt{\log(\cos 2x)}$,

$f : X \to Y\,,\;\; g : Y \to Z$

Definicja

Funkcję $h : X \to Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$

f - funkcja wewnętrzna, g - funkcja zewnętrzna

np. (1) $f(x) = \sqrt{\log(\cos 2x)}$,
$f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \log(x)$, $f_4(x) = \sqrt{x}$, $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

$f : X \to Y\,,\ \ g : Y \to Z$

Definicja

Funkcję $h : X \to Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$
f - funkcja wewnętrzna, g - funkcja zewnętrzna

np. (1) $f(x) = \sqrt{\log(\cos 2x)}$,
$f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \log(x)$, $f_4(x) = \sqrt{x}$, $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

(2) $f(x) = 2^x$, $g(y) = \frac{1}{y}$, $g \circ f = ?$, $f \circ g = ?$

$f : X \to Y\,,\ \ g : Y \to Z$

Definicja

Funkcję $h : X \to Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$ nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$
f - funkcja wewnętrzna, g - funkcja zewnętrzna

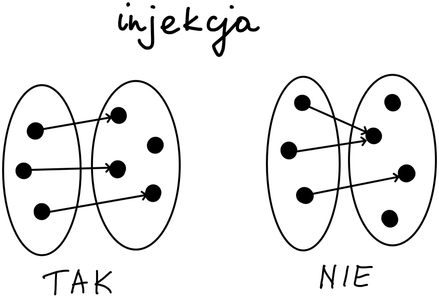
np. (1) $f(x) = \sqrt{\log(\cos 2x)}$,
$f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = \cos x,\ f_3(x) = \log(x),\ f_4(x) = \sqrt{x},\ f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

(2) $f(x) = 2^x\,,\ g(y) = \frac{1}{y}$, $g \circ f = ?$, $f \circ g = ?$
$(g \circ f)(x) = g(2^x) = 2^{-x}\,,\ (f \circ g)(x) = f(\frac{1}{x}) = 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$
$\Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$

Definicja

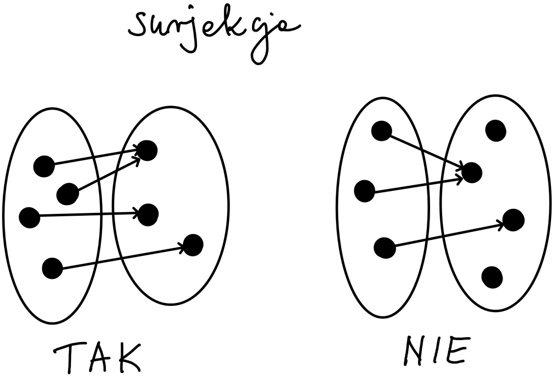
Funkcja $f : X \to Y$ jest *różnowartościowa* (injekcją) (ozn. $1-1$), jeśli

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Definicja

Funkcja $f : X \to Y$ jest *"na"* (surjekcją), jeśli $f(X) = Y$.

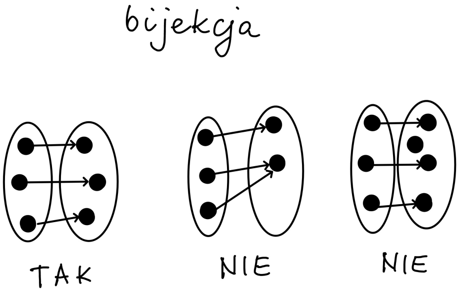


Definicja

Funkcja $f : X \to Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (bijekcją) jeśli jest injekcją i surjekcją. Wtedy funkcję $g : Y \to X$ określoną następująco

$$g(y) = x \quad \text{jeśli} \quad y = f(x)$$

nazywamy funkcją *odwrotną* do f i oznaczamy f^{-1}.

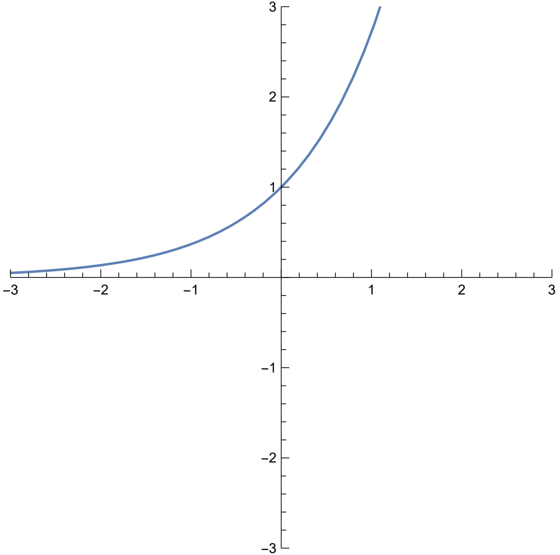


Uwagi:
(1)Funkcja identycznościowa na X to $\mathrm{id}_X : X \to X$ taka, że $\mathrm{id}_X(x) = x$. Wtedy $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$

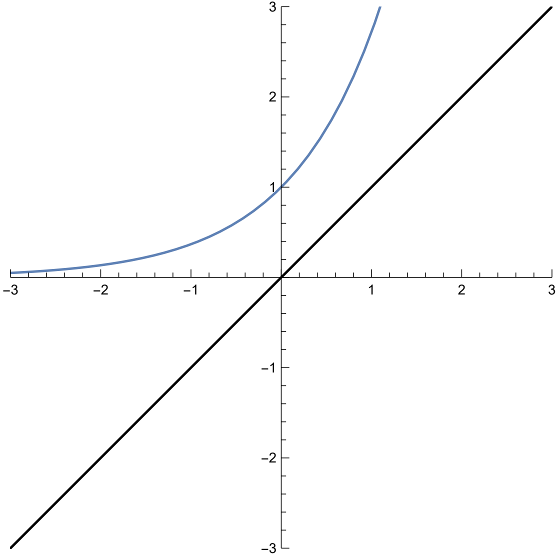
(2) Funkcja logarytmiczna $g(x) = \log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(y) = a^y$, gdzie $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$

$$a^{\log_a x} = x \,, \quad \log_a a^y = y$$

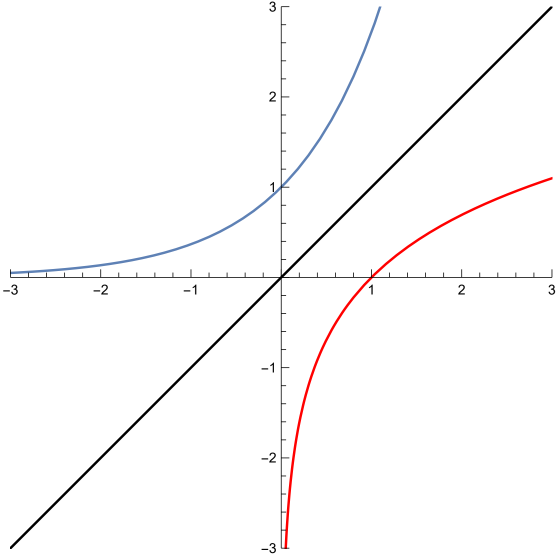
(3) Funkcje odwrotne do siebie, traktowane jako funkcje tej samej zmiennej, mają wykresy symetryczne względem prostej $y = x$.



(3) Funkcje odwrotne do siebie, traktowane jako funkcje tej samej zmiennej, mają wykresy symetryczne względem prostej $y = x$.



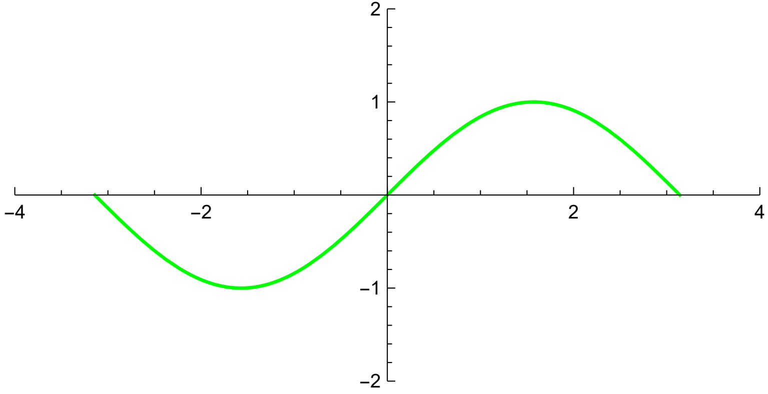
(3) Funkcje odwrotne do siebie, traktowane jako funkcje tej samej zmiennej, mają wykresy symetryczne względem prostej $y = x$.



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

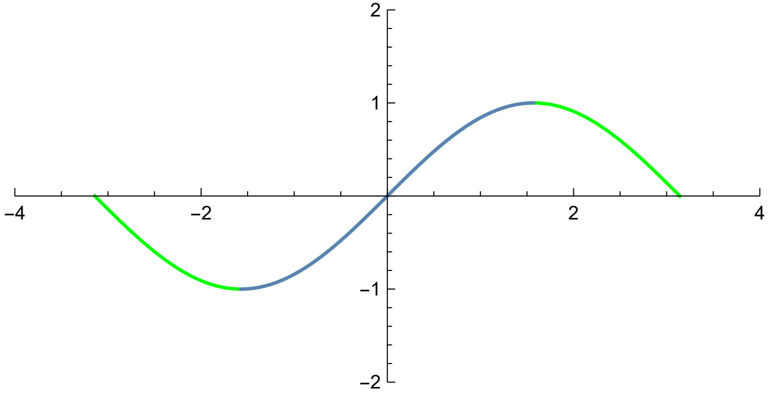
(1) $f(x) = \sin x$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

(1) $f(x) = \sin x$

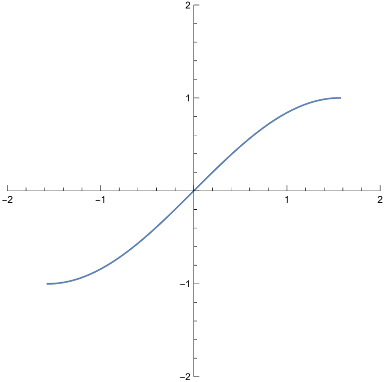


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

(1) $f(x) = \sin x\,,\quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \arcsin y \quad \text{jeżeli} \quad y = \sin x$$

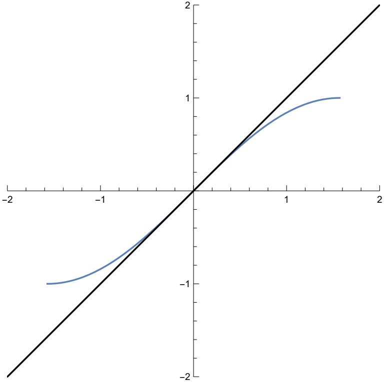


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

(1) $f(x) = \sin x\,,\quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \arcsin y \quad \text{jeżeli} \quad y = \sin x$$

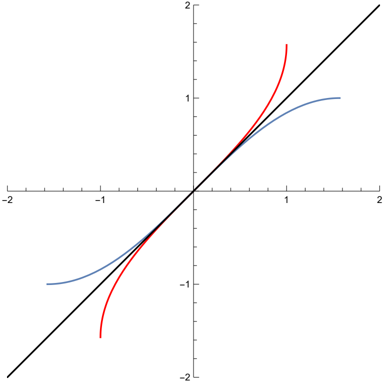


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

(1) $f(x) = \sin x\,,\quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \arcsin y \quad \text{jeżeli} \quad y = \sin x$$

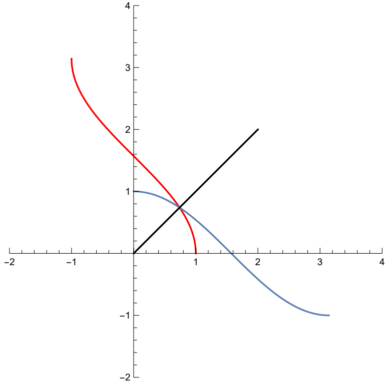


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cosinus

(2) $f(x) = \cos x\,,\quad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$x = \arccos y \quad \text{jeżeli} \quad y = \cos x$$

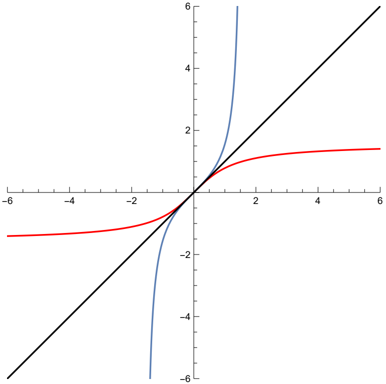
np. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,,\quad \arccos 1 = 0$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus tanges

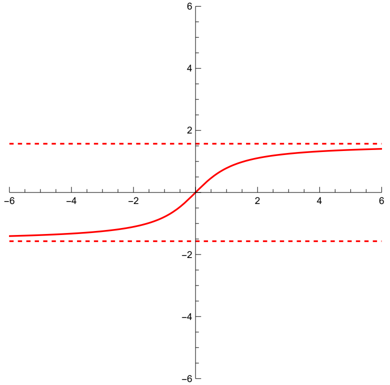
(2) $f(x) = \mathrm{tg} x$, $\quad \mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x = \mathrm{arctg} y \quad \text{jeżeli} \quad y = \mathrm{tg} x$$



(3) $f(x) = \mathrm{tg}x$, $\quad \mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

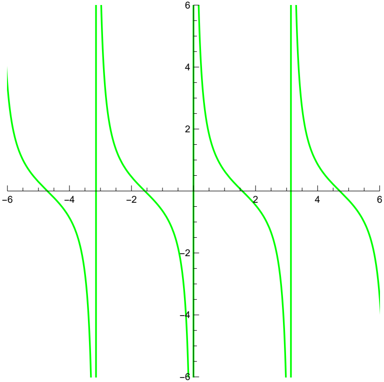
$$x = \mathrm{arctg}y \quad \text{jeżeli} \quad y = \mathrm{tg}x$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotanges

(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

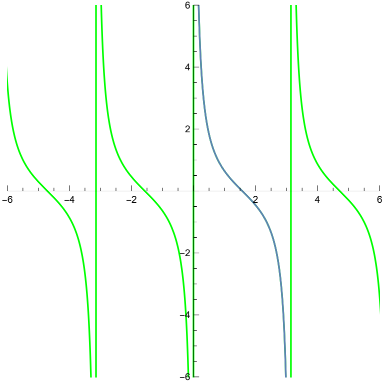
$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotanges

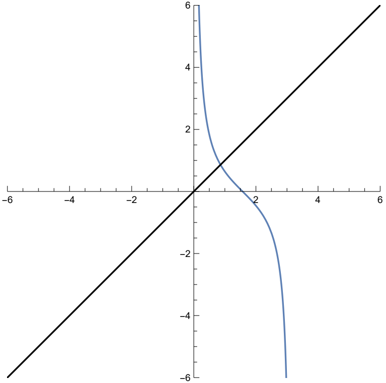
(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$



(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

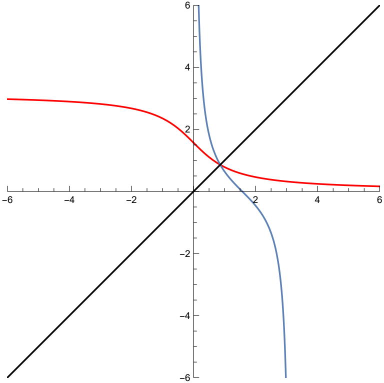
$$x = \operatorname{arcctg} y \quad \text{jeżeli} \quad y = \operatorname{ctg} x$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotanges

(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\quad \operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

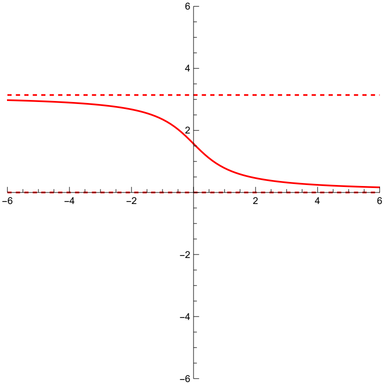
$$x = \operatorname{arcctg} y \quad \text{jeżeli} \quad y = \operatorname{ctg} x$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotanges

(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\quad \operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje funkcja odwrotna $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$x = \operatorname{arcctg} y \quad \text{jeżeli} \quad y = \operatorname{ctg} x$$

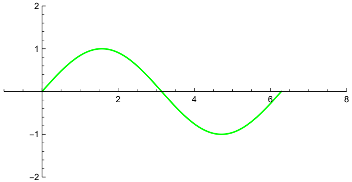


Przykład:

Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

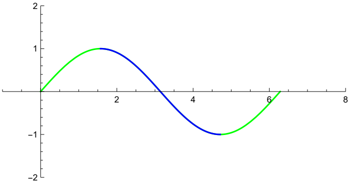
Przykład:

Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



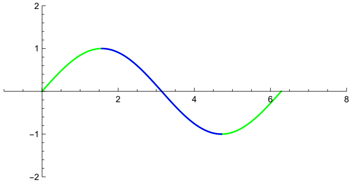
Przykład:

Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



Przykład:

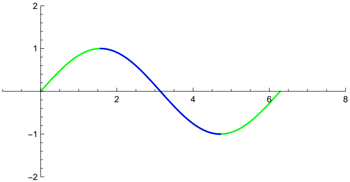
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Przykład:

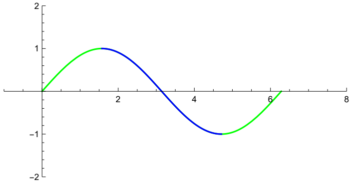
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy $t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$

Przykład:

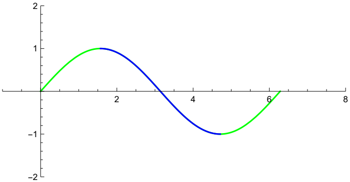
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy
$t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$
$y = \sin x = \sin(t + \pi) = -\sin t$

Przykład:

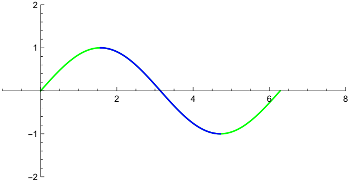
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy
$t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$
$y = \sin x = \sin(t + \pi) = -\sin t \Rightarrow -y = \sin t \wedge t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Przykład:

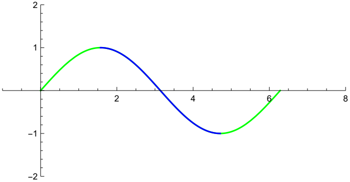
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy
$t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$
$y = \sin x = \sin(t + \pi) = -\sin t \Rightarrow -y = \sin t \wedge t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\Rightarrow \arcsin(-y) = \arcsin(\sin t) = t = x - \pi$

Przykład:

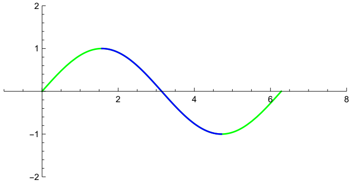
Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy
$t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$
$y = \sin x = \sin(t + \pi) = -\sin t \Rightarrow -y = \sin t \wedge t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\Rightarrow \arcsin(-y) = \arcsin(\sin t) = t = x - \pi \Rightarrow x = \pi + \arcsin(-y)$

Przykład:

Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x) = \sin x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



f jest bijekcją. $y = f(x) = \sin x \ \wedge \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Wtedy
$t = x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x = t + \pi$
$y = \sin x = \sin(t + \pi) = -\sin t \Rightarrow -y = \sin t \wedge t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\Rightarrow \arcsin(-y) = \arcsin(\sin t) = t = x - \pi \Rightarrow x = \pi + \arcsin(-y)$
$\Rightarrow x = f^{-1}(y) = \pi - \arcsin y$

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *nieparzysta*, jeśli

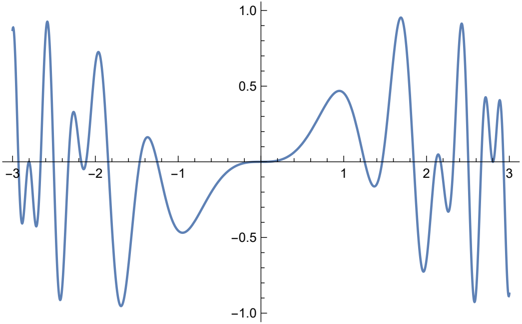
$$\forall x \in D \qquad -x \in D \ \wedge \ f(-x) = -f(x)$$

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *nieparzysta*, jeśli

$$\forall x \in D \qquad -x \in D \ \wedge \ f(-x) = -f(x)$$

Uwaga:
Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.



Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *parzysta*, jeśli

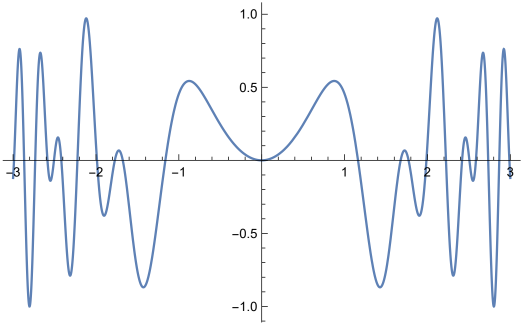
$$\forall x \in D \qquad -x \in D \ \wedge \ f(-x) = f(x)$$

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *parzysta*, jeśli

$$\forall x \in D \qquad -x \in D \ \wedge \ f(-x) = f(x)$$

Uwaga:
Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY



Przykłady:
(1) $x^{2n}, |x|, \cos x, x^{2n+1}\sin x$ są funkcjami parzystymi.

Przykłady:
(1) $x^{2n}, |x|, \cos x, x^{2n+1} \sin x$ są funkcjami parzystymi.
(2) $x^{2n+1}, \sin x, \operatorname{tg} x, x^{2n} \sin x$ są funkcjami nieparzystymi.

Przykłady:
(1) $x^{2n}, |x|, \cos x, x^{2n+1} \sin x$ są funkcjami parzystymi.
(2) $x^{2n+1}, \sin x, \operatorname{tg} x, x^{2n} \sin x$ są funkcjami nieparzystymi.
Stwierdzenie:
Iloczyn funkcji parzystych (nieparzystych) jest funkcją parzystą.
Iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej jest funkcją nieparzystą.

Ciągi liczbowe

Ciągi liczbowe

Definicja

Ciąg liczbowy jest to funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$f(n) = a_n$$

Ozn. $(a_n) = (a_1, a_2, \dots a_n, \dots)$
a_n - n-ty wyraz ciągu

Ciągi liczbowe

Definicja

Ciąg liczbowy jest to funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że

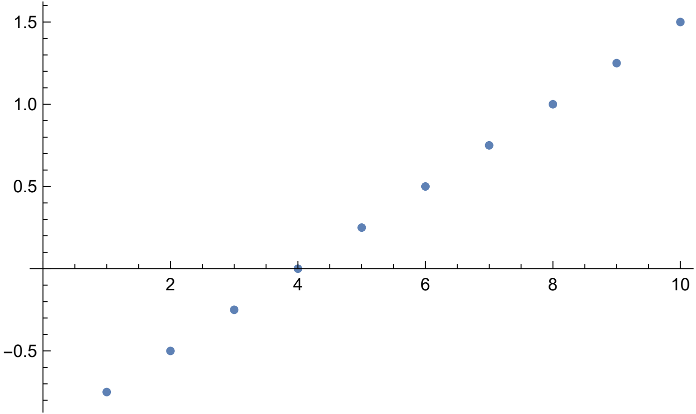
$$f(n) = a_n$$

Ozn. $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$
a_n - n-ty wyraz ciągu

Przykłady:
(1) $a_n = a + (n-1) \cdot r$, gdzie $a_{n+1} - a_n = r$ - ciąg arytmetyczny
(2) $a_n = a \cdot q^{n-1}$, gdzie $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ - ciąg geometryczny
(3) $a_n = \frac{1}{n}$ - ciąg harmoniczny
(4) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

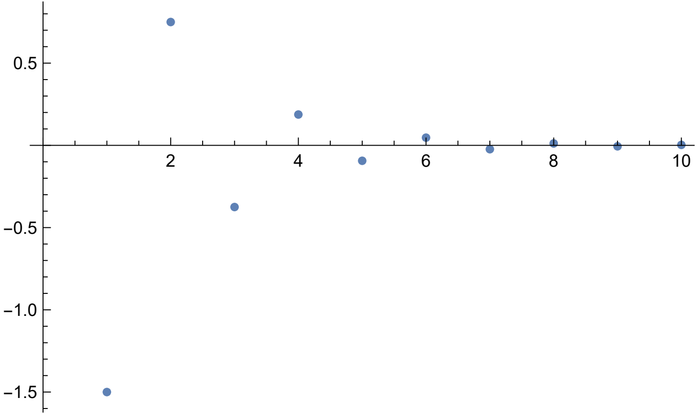
Wykresy ciągów liczbowych: arytmentyczny

$a_n = \frac{n}{4} - 1$, $(a_n) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \cdots\right)$



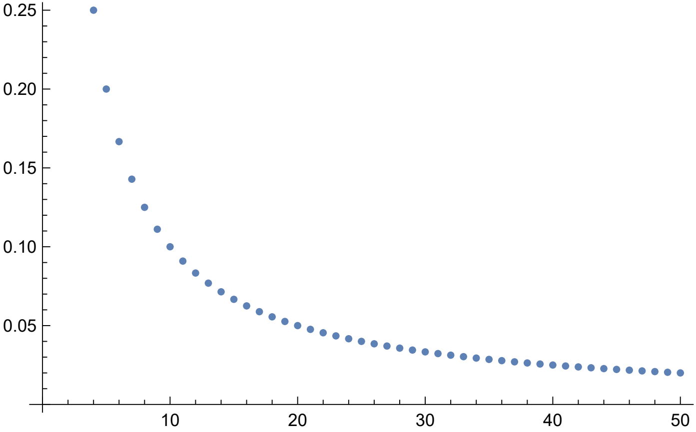
Wykresy ciągów liczbowych: geometryczny

$a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$



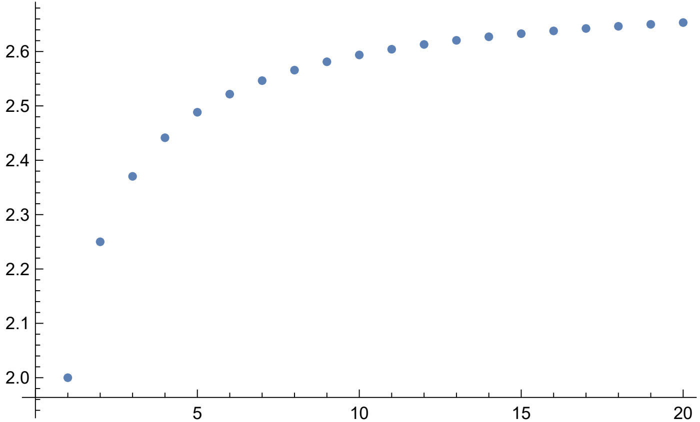
Wykresy ciągów liczbowych: harmoniczny

$$a_n = \frac{1}{n}$$



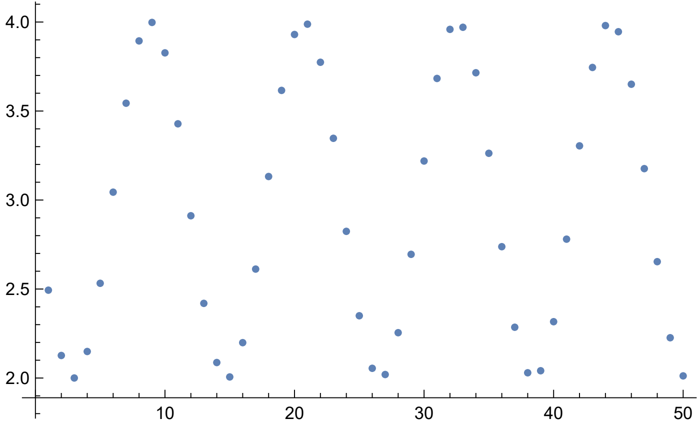
Wykresy ciągów liczbowych

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$



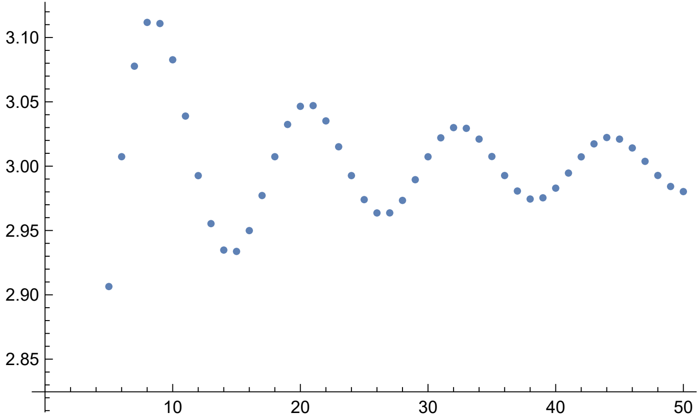
Wykresy ciągów liczbowych

$a_n = 3 + \sin(100n)$



Wykresy ciągów liczbowych

$a_n = 3 + \frac{1}{n}\sin(100n)$



Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$, jeżeli

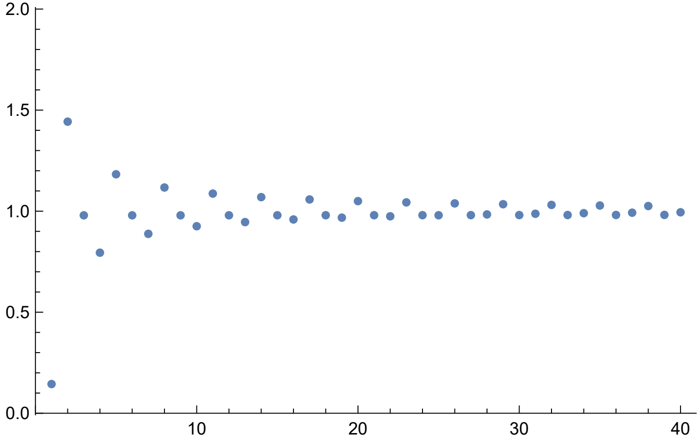
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \, \forall n > n_\varepsilon \, |a_n - g| < \varepsilon$$

Granicę ciągu (a_n) oznaczamy symbolem

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$

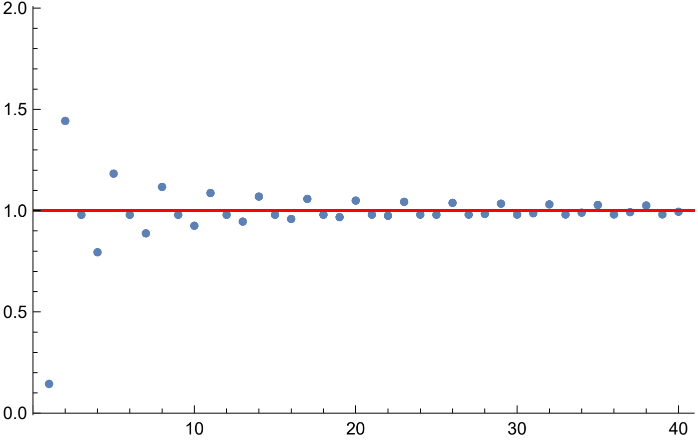
Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon.$



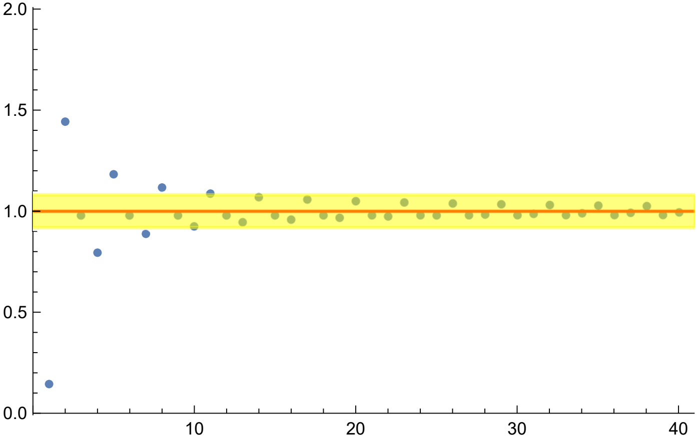
Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon$.



Definicja

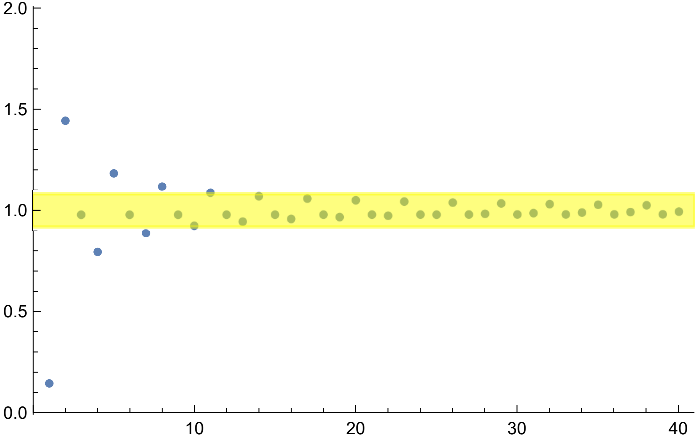
$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon$.



Warunek Cauchy'ego

Ciąg (a_n) jest zbieżny

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_\varepsilon \; \forall n > n_\varepsilon \; \forall m > n_\varepsilon \; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon.$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon.$

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_\varepsilon \;\forall n > n_\varepsilon \; |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_\varepsilon \;\forall n > n_\varepsilon \; |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ =0, bo dla $\varepsilon > 0\ |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_\varepsilon\; \forall n > n_\varepsilon\; |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ $=0$, bo dla $\varepsilon > 0$ $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_\varepsilon\; \forall n > n_\varepsilon\; |a_n - g| < \varepsilon.$

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, bo dla $\varepsilon > 0$ $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ i

wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$

Definicja

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ jeżeli $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_\varepsilon \;\forall n > n_\varepsilon \; |a_n - g| < \varepsilon.$

Przykłady:

(1) $a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$, bo

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ =0, bo dla $\varepsilon > 0 \; |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ i

wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$

(3) podobnie $\forall a > 0 \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
Dowód:

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon)$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
Dowód:
Dla $a = 1$ ciąg jest stały.
Dla $a > 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1 : \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ $\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$

Dla $0 < a < 1 : \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ $\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$

Dla $0 < a < 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
Dowód:
Dla $a = 1$ ciąg jest stały.
Dla $a > 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$
Dla $0 < a < 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1-\varepsilon)$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
Dowód:
Dla $a = 1$ ciąg jest stały.
Dla $a > 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$
Dla $0 < a < 1: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1-\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$

Stwierdzenie. $\forall\, a > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dowód:

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ czyli dla $a > 1$ wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$

Dla $0 < a < 1$: $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\iff \frac{1}{n} < \log_a(1-\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$ czyli dla $0 < a < 1$
$n_\varepsilon = \frac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$

Definicja

Ciąg jest ograniczony z góry jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$.
M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu.
Kres górny ciągu (a_n) $\sup(a_n)$ to najmniejsze z górnych ograniczeń.

Definicja

Ciąg jest ograniczony z góry jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$.
M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu.
Kres górny ciągu (a_n) $\sup(a_n)$ to najmniejsze z górnych ograniczeń.
Ciąg jest ograniczony z dolu jeżeli $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq m$.
m nazywamy dolnym ograniczeniem ciągu.
Kres dolny ciągu (a_n) $\inf(a_n)$ to największe z dolnych ograniczeń.

Definicja

Ciąg jest ograniczony z góry jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$.
M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu.
Kres górny ciągu (a_n) $\sup(a_n)$ to najmniejsze z górnych ograniczeń.
Ciąg jest ograniczony z dolu jeżeli $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq m$.
m nazywamy dolnym ograniczeniem ciągu.
Kres dolny ciągu (a_n) $\inf(a_n)$ to największe z dolnych ograniczeń.
Ciąg jest ograniczony jeżeli jest ograniczony z góry i z dolu czyli
$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$.

Stwierdzenie

Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Stwierdzenie

Ciąg zbieżny jest ograniczony.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Stwierdzenie

Ciąg zbieżny jest ograniczony.
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|$

Tw. (o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów)

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i $c \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b,$$

jeżeli $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0$ i $b \neq 0$ to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$)

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$

$\forall n > N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$

$n > \max\{N_1, N_2\}$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$
$n > \max\{N_1, N_2\}$
$|a_n b_n - ab|$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leq M$

$\forall n > N_1 \; |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \; |b_n - b| < \varepsilon$

$n > \max\{N_1, N_2\}$

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1\ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2\ |b_n - b| < \varepsilon$
$n > \max\{N_1, N_2\}$
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$
$n > \max\{N_1, N_2\}$
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$
$|a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leq M$

$\forall n > N_1 \; |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2 \; |b_n - b| < \varepsilon$

$n > \max\{N_1, N_2\}$

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$

$|a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\varepsilon + \varepsilon|b| = \varepsilon(M + |b|)$

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1\ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2\ |b_n - b| < \varepsilon$
$n > \max\{N_1, N_2\}$
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$
$|a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\varepsilon + \varepsilon|b| = \varepsilon(M + |b|)$ (Q.E.D)

Dowód ($\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$) $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$
$\forall n > N_1\ |a_n - a| < \varepsilon \wedge \forall n > N_2\ |b_n - b| < \varepsilon$
$n > \max\{N_1, N_2\}$
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$
$|a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\varepsilon + \varepsilon|b| = \varepsilon(M + |b|)$ (Q.E.D)
Przykład:
$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n+4}{5n^3-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{5-\frac{2}{n^2}} = \frac{3-0+0}{5-0} = \frac{3}{5}$

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = ?$,

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = ?$,

$4 = \sqrt[n]{0 + 0 + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = ?$,

$4 = \sqrt[n]{0 + 0 + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$, bo $\sqrt[n]{3} \to 1$

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = ?$,

$4 = \sqrt[n]{0 + 0 + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} =$
$4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$, bo $\sqrt[n]{3} \to 1$

czyli $4 \leftarrow 4 \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant 4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$.

Tw. (o trzech ciągach)

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad \wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Przykłady:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = ?$,

$4 = \sqrt[n]{0 + 0 + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} =$
$4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$, bo $\sqrt[n]{3} \to 1$

czyli $4 \leftarrow 4 \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leqslant 4 \cdot \sqrt[n]{3} \to 4$. Stąd
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4$,

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$
Dowód:
Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$n = (a_n + 1)^n$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a_n^k$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$

$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$$n = (a_n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$$

$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli

$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$
Dowód:
Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$$

$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli
$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n}{2} a_n^2$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$$

$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli

$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n}{2} a_n^2$.

Stąd $a_n^2 \leqslant \frac{2}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$
Dowód:
Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd
$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a_n^k$
$= \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) a_n + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) a_n^2 + \ldots + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) a_n^n \geqslant$
$\geqslant 1 + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli
$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n}{2} a_n^2$.
Stąd $a_n^2 \leqslant \frac{2}{n} \Rightarrow a_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}$ (Q.E.D).

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \geqslant$

$\geqslant 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli

$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n}{2} a_n^2$.

Stąd $a_n^2 \leqslant \frac{2}{n} \Rightarrow a_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}$ (Q.E.D).

$0 \leftarrow 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Stwierdzenie. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dowód:

Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Stąd

$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a_n^k$

$= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a_n + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a_n^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a_n^n \geqslant$

$\geqslant 1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ Stąd $n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. Czyli

$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n}{2} a_n^2$.

Stąd $a_n^2 \leqslant \frac{2}{n} \Rightarrow a_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}$ (Q.E.D).

$0 \leftarrow 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$

Wniosek

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg b_n jest ograniczony, to $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Wniosek

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg b_n jest ograniczony, to $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Przykład:

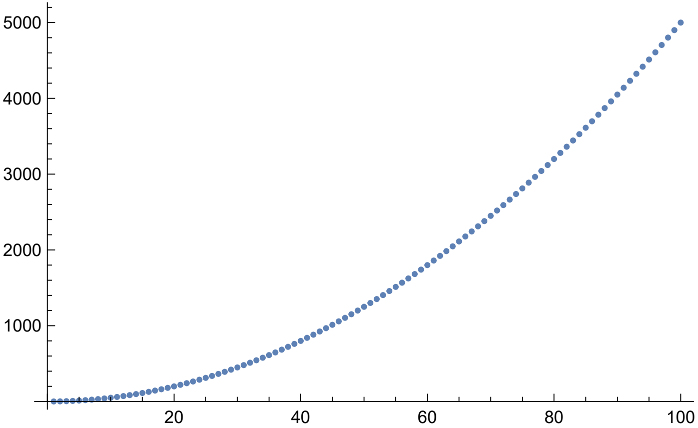
(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n} = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 10n} = 1$, bo $\sqrt[n]{n^2} \leqslant \sqrt[n]{n^2 + 10n} \leqslant \sqrt[n]{11n^2}$ i stosujemy tw. o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych.

Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

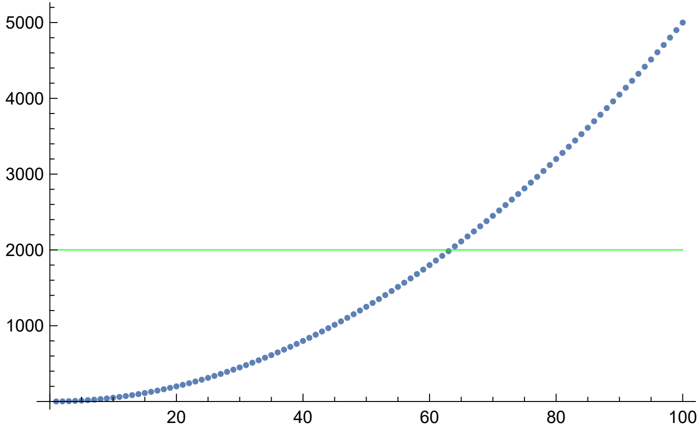
$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$



Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

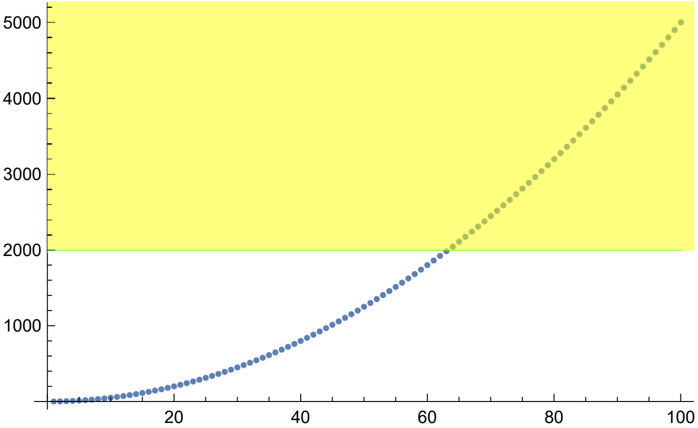
$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$



Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$



Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_m \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_m \quad a_n < m$$

Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_m \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_m \quad a_n < m$$

Przykład:

(1) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = +\infty, \quad a > 1,$

Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_m \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_m \quad a_n < m$$

Przykład:

(1) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = +\infty, \quad a > 1,$

$\log_a n > M \iff n > a^M$

Definicja (Granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_M \quad a_n > M$$

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ (oznaczenie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_m \in \mathbb{R} \quad \forall\, n > n_m \quad a_n < m$$

Przykład:

(1) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = +\infty, \quad a > 1,$

$\log_a n > M \iff n > a^M$

w definicji wystarczy przyjąć $n_M = a^M$

(2) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = -\infty, \quad 0 < a < 1,$
$\log_a n < m \iff n > a^m$
w definicji wystarczy przyjąć $n_m = a^m$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = -\infty, \quad 0 < a < 1,$
$\log_a n < m \iff n > a^m$
w definicji wystarczy przyjąć $n_m = a^m$.

Uwagi:

(1) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \log_a n = -\infty, \quad 0 < a < 1,$
$\log_a n < m \iff n > a^m$
w definicji wystarczy przyjąć $n_m = a^m$.

Uwagi:

(1) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
(2)
$a_n, b_n \to +\infty \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty\,,\ a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n, b_n \to -\infty \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty\,,\ a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty, b_n \to -\infty \Rightarrow a_n - b_n \to +\infty\,,\ a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty, b_n \to +\infty \Rightarrow a_n - b_n \to -\infty\,,\ a_n \cdot b_n \to -\infty$

(3) Symbole nieoznaczone są to wyrażenia typu:

$$\frac{\infty}{\infty}\,,\ \frac{0}{0}\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \infty^0\,,\ 1^\infty\,,\ 0^0\,,\ 0^\infty$$

wartości ich granic zależą od postaci danego wyrażenia

np. dla symbolu $[0 \cdot \infty]$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = +\infty$

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy

rosnącym (ściśle rosnącym) jeżeli $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$

niemalejącym (rosnącym) jeżeli $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geqslant a_n$

malejącym (ściśle malejącym) jeżeli $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$

nierosnącym (malejącym) jeżeli $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leqslant a_n$

Ciąg jest *monotoniczny*, gdy jest niemalejący lub nierosnący.

Ciąg jest *ściśle monotoniczny*, gdy jest malejący lub rosnący.

Przykłady:

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest ciągiem malejącym, bo $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, tzn. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$

Przykłady:

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest ciągiem malejącym, bo $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, tzn. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$

(2) Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r > 0$, bo
$a_{n+1} - a_n = r > 0 \iff a_{n+1} > a_n$

Przykłady:

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest ciągiem malejącym, bo $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, tzn. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$

(2) Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r > 0$, bo
$a_{n+1} - a_n = r > 0 \iff a_{n+1} > a_n$

(3) Ciąg $(a_n) : a_n = \frac{3^n}{n!}$ jest malejący od pewnego miejsca, bo:

$a_n > 0\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} < 1$ dla $n \geqslant 3$

Definicja

Jeśli $(n_k):\ n_1, n_2, n_3, \dots$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg

$$(a_{n_k}):\ a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n).

Definicja

Jeśli $(n_k): n_1, n_2, n_3, \ldots$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg

$$(a_{n_k}): a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n).

Twierdzenie

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} a_n$ (właściwa lub niewłaściwa) i (a_{n_k}) jest podciągiem ciągu (a_n), to istnieje również granica tego podciągu i

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Przykład:
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ nie istnieje

Przykład:

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ nie istnieje

Twierdzenie o ciągach zbieżnych

Ciąg motoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny.

Przykład:

(1) $\left(\frac{3^n}{n!}\right)$ jest zbieżny, bo jest malejący od pewnego miejsca i ograniczony z dołu przez 0.

Z twierdzenia $\exists\, g \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = g$

Pokażemy, że $g = 0$.

$a_{n+1} = \frac{3}{n+1} \cdot a_n$ oraz

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 0 \cdot g = 0$

$a_{n+1} = \frac{3}{n+1} \cdot a_n$ oraz

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 0 \cdot g = 0$

(2) Wykażemy, że ciąg (a_n) : $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony , więc jest zbieżny.

$a_{n+1} = \frac{3}{n+1} \cdot a_n$ oraz

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 0 \cdot g = 0$

(2) Wykażemy, że ciąg $(a_n):\ a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony , więc jest zbieżny.

Oznaczenie - stała Eulera

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = 2,71828...$

Ozn. $\log_e a = \ln a$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$
Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$
Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$
$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \;\wedge\; a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge\ a_{n+1} > a_n$
Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$
Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$
$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) =$$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1+na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3}$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1+na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{k!n^k} =$$

(2) Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \;\wedge\; a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{k!n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$
Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{k!n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{k!}$$

(2) Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy, że

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 3 \ \wedge \ a_{n+1} > a_n$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Aby wykazać, że $a_n \leqslant 3$ skorzystamy z następującej wskazówki

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{k!n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \quad k \geqslant 1$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{n^k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= 1 + 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Uwaga

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$

Uwaga

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e$

Przykład:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n+1}{n^2+1}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{-\frac{n^2+1}{n-1}}\right]^{\left(-\frac{n-1}{n^2+1}\right)\cdot(2n+1)} = e^{-2}$$

bo $\lim_{n\to\infty} -\frac{n^2+1}{n-1} = -\infty$ i $\lim_{n\to\infty} -\frac{(n-1)(2n+1)}{n^2+1} = -2$

Uzupełnienie

Uzupełnienie

Definicja

Symbol Newtona: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

gdzie

$k! = 1 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k\,,\ 0! = 1\,,\ 1! = 1\,,\ k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,\ n \geqslant k$

Dwumian Newtona: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$

Uzupełnienie

Definicja

Symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

gdzie

$k! = 1 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k\,,\ 0! = 1\,,\ 1! = 1\,,\ k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,\ n \geqslant k$

Dwumian Newtona: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Własności:

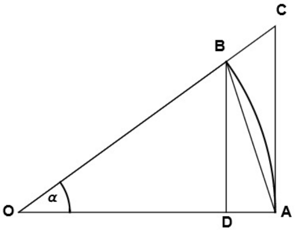
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,,$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Wykazać, że dla $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzą nierówności

(a) $\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$

(b) $\cos\alpha \geqslant 1 - |\alpha|$

(a) Dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rozważmy wycinek kołowy OAB o promieniu r oraz trójkąt OAB wpisany w niego oraz trójkąt prostokątny OAC.



$|OA| = |OB| = r$, $|BD| = r \sin \alpha$, $|AC| = r\mathrm{tg}\alpha$
$P_{\triangle OAB} < P_{\text{wycinka } OAB} < P_{\triangle OAC}$
$\frac{1}{2} r \cdot r \sin \alpha < \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha < \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} \alpha$

$\frac{1}{2}r^2 \sin\alpha < \frac{1}{2}r^2\alpha < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg}\alpha$
$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$
Dla $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow -\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i korzystamy z parzystości i nieparzystości funkcji trygonometrycznych.
$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1$
Stąd $\quad \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$
(b) $0 \leqslant 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant 2|\sin\frac{\alpha}{2}| \leqslant 2 \cdot \frac{|\alpha|}{2} = |\alpha|$