

Analiza matematyczna
Kierunek: informatyka (WEiT PW)
Wykład: Ciągi liczbowe

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Oznaczenia:

Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$.

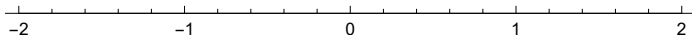
Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

Zbiór liczb wymiernych:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$. Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych.



Zbiór liczb niewymiernych to $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\emptyset \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Kwantyfikatory: ogólny i szczegółowy.

Symbol $\forall x$ oznacza: *dla każdego* x .

Symbol $\exists x$ oznacza: *istnieje* x .

Przykład:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x.$$

Wiadomości wstępne – funkcje

Niech X i Y będą zbiorami.

Wiadomości wstępne – funkcje

Niech X i Y będą zbiorami.

Definicja

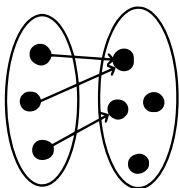
Jeśli każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $y \in Y$, to takie przyporządkowanie nazywamy *funkcją* określoną na zbiorze X o wartościami w zbiorze Y . Zbiór X jest jej *dziedziną*, a Y – *przeciwdziedziną*.

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = y.$$

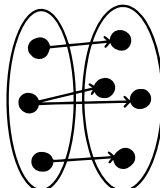
x – argument (zmienna niezależna),
 y – wartość funkcji (zmienna zależna).

Jeśli $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, to f jest *funkcją liczbową* jednej zmiennej rzeczywistej.

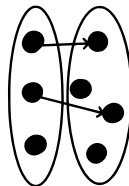
funkcja



TAK



NIE



NIE

Iloczyn (produkt) kartezjański zbiorów X i Y to zbiór

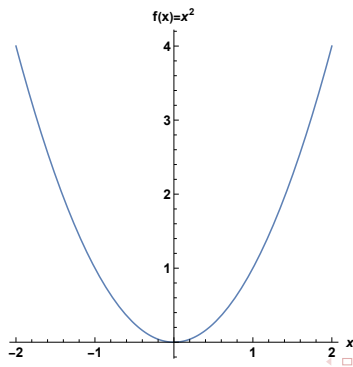
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Niech $f : X \rightarrow Y$. Obraz dziedziny f , czyli zbiór wartości funkcji f , to

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y.$$

Wykres funkcji f to zbiór

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

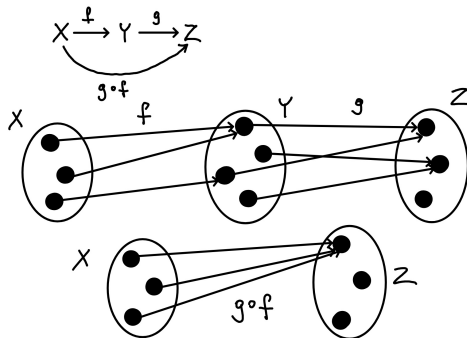


Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$.

Definicja

Funkcję $h : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$, nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$.

f – funkcja wewnętrzna, g – funkcja zewnętrzna.



Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$.

Definicja

Funkcję $h : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$, nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$.

f – funkcja wewnętrzna, g – funkcja zewnętrzna.

Przykłady:

(1) $f(x) = \sqrt{\log_a(\cos 2x + 4)}$, gdzie $a > 1$.

Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$.

Definicja

Funkcję $h : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$, nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$.

f – funkcja wewnętrzna, g – funkcja zewnętrzna.

Przykłady:

(1) $f(x) = \sqrt{\log_a(\cos 2x + 4)}$, gdzie $a > 1$.

$f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = x+4$, $f_4(x) = \log_a x$, $f_5(x) = \sqrt{x}$.

Wtedy $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$.

Definicja

Funkcję $h : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$, nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$.

f – funkcja wewnętrzna, g – funkcja zewnętrzna.

Przykłady:

$$(1) f(x) = \sqrt{\log_a(\cos 2x + 4)}, \text{ gdzie } a > 1.$$

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x+4, \quad f_4(x) = \log_a x, \quad f_5(x) = \sqrt{x}.$$

Wtedy $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

$$(2) f(x) = 2^x \text{ dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } g(x) = 1/x \text{ dla } x \neq 0.$$

Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$.

Definicja

Funkcję $h : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in X$, nazywamy *złożeniem (superpozycją)* funkcji f i g i oznaczamy $h = g \circ f$.

f – funkcja wewnętrzna, g – funkcja zewnętrzna.

Przykłady:

$$(1) f(x) = \sqrt{\log_a(\cos 2x + 4)}, \text{ gdzie } a > 1.$$

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x+4, \quad f_4(x) = \log_a x, \quad f_5(x) = \sqrt{x}.$$

Wtedy $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

$$(2) f(x) = 2^x \text{ dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } g(x) = 1/x \text{ dla } x \neq 0.$$

$$(g \circ f)(x) = 2^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(f \circ g)(x) = 2^{1/x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

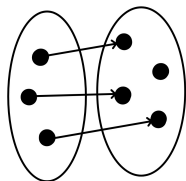
Zatem $g \circ f \neq f \circ g$.

Definicja

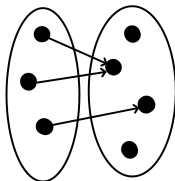
Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest *różnowartościowa* (jest iniekcją; oznaczenie: 1–1), jeśli

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

iniekcja



TAK

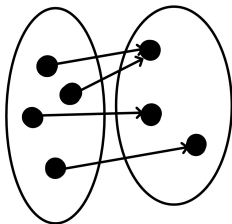


NIE

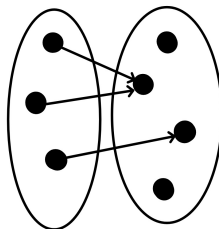
Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest *surjekcją* (funkcją „na”), jeśli $f(X) = Y$.

surjekcja



TAK



NIE

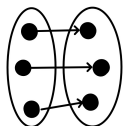
Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest *wzajemnie jednoznaczna* (jest bijekcją), jeśli jest iniekcją i surjekcją. Wtedy funkcję $g : Y \rightarrow X$, określoną warunkiem

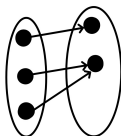
$$g(y) = x \iff f(x) = y, \quad x \in X, y \in Y,$$

nazywamy *funkcją odwrotną* do f i oznaczamy f^{-1} .

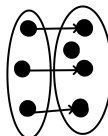
bijekcja



TAK



NIE



NIE

Uwagi:

(1) Funkcja identycznościowa na X to funkcja $\text{id}_X : X \rightarrow X$ określona wzorem $\text{id}_X(x) = x$. Dla bijekcji $f : X \rightarrow Y$ zachodzą równości

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

Uwagi:

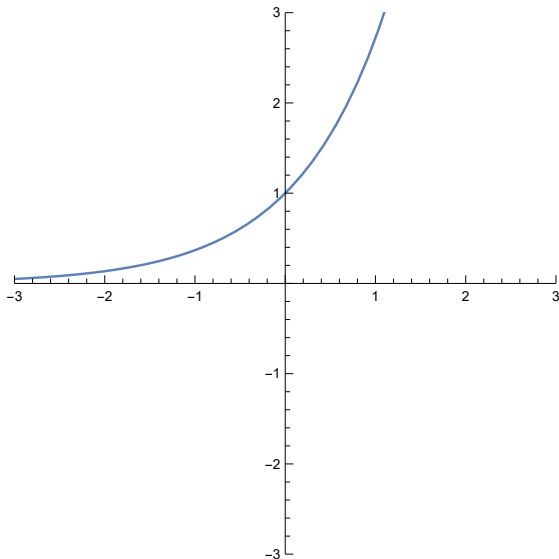
(1) Funkcja identycznościowa na X to funkcja $\text{id}_X : X \rightarrow X$ określona wzorem $\text{id}_X(x) = x$. Dla bijekcji $f : X \rightarrow Y$ zachodzą równości

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

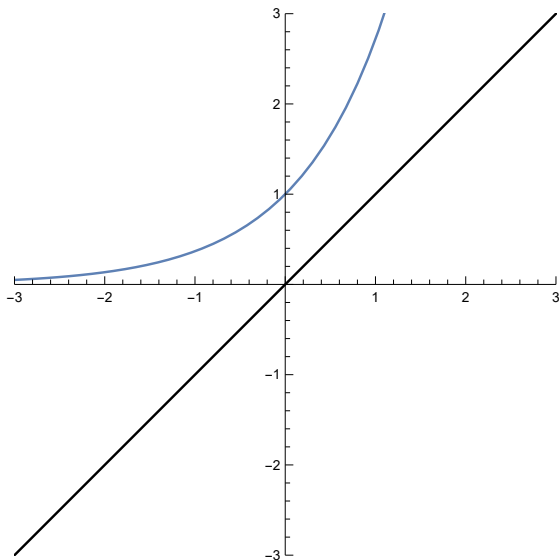
(2) Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcja logarytmiczna $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, jest odwrotna do funkcji wykładniczej $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(y) = a^y$.

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0), \quad \log_a(a^y) = y \quad (y \in \mathbb{R}).$$

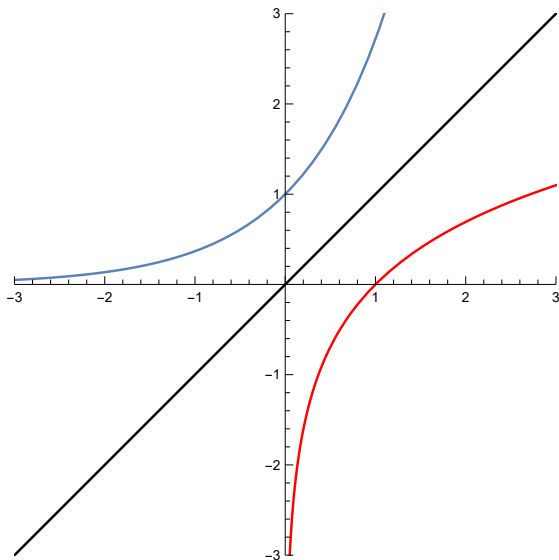
(3) Wykresy funkcji liczbowej i jej funkcji odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.



(3) Wykresy funkcji liczbowej i jej funkcji odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.



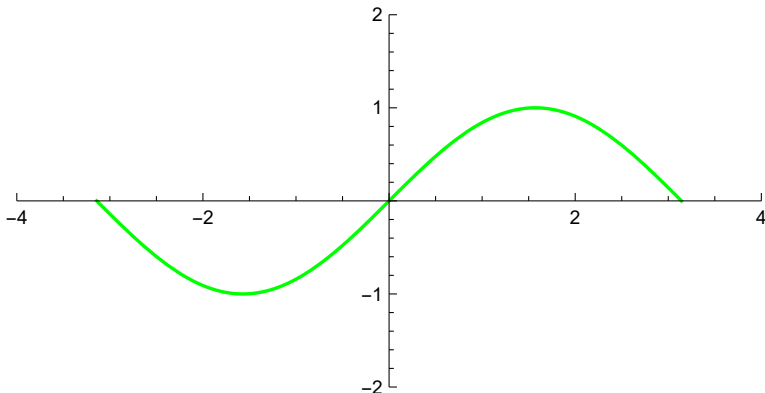
(3) Wykresy funkcji liczbowej i jej funkcji odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do odpowiednich ograniczeń dziedzin funkcji trygonometrycznych.

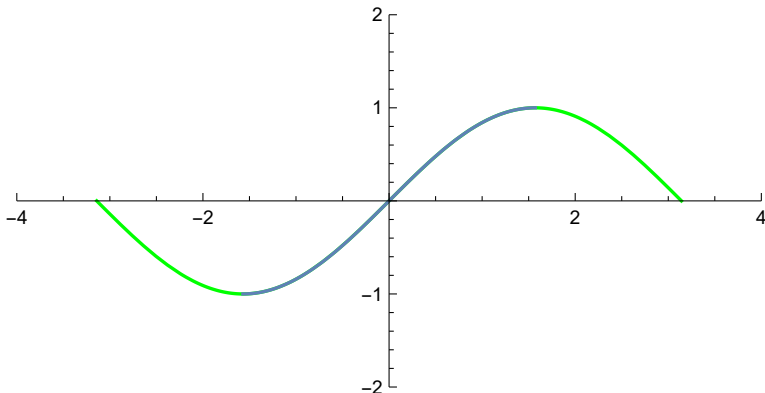
(1) $f(x) = \sin x$.



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus sinus

Są to funkcje odwrotne do odpowiednich ograniczeń dziedzin funkcji trygonometrycznych.

(1) $f(x) = \sin x$.



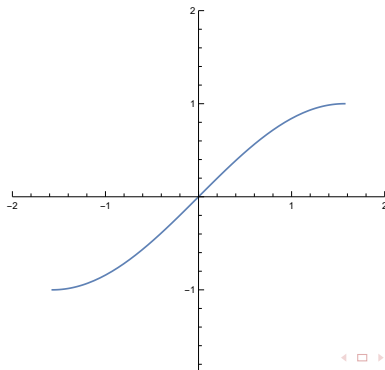
Funkcje cyklotometryczne (kołowe): arcus sinus

(1) Funkcja $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ i $y \in [-1, 1]$ mamy

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x.$$



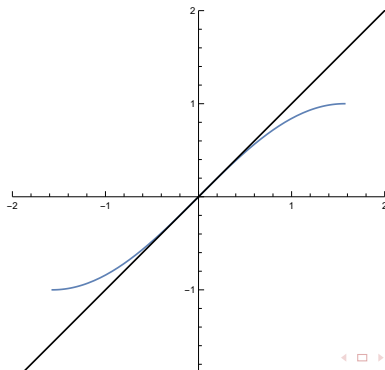
Funkcje cyklotometryczne (kołowe): arcus sinus

(1) Funkcja $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ i $y \in [-1, 1]$ mamy

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x.$$



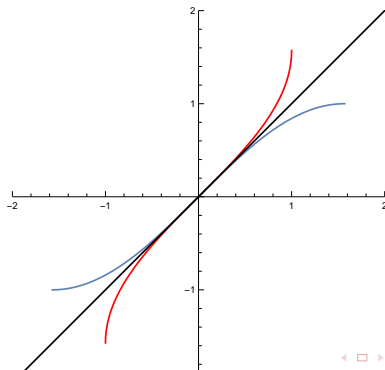
Funkcje cyklotometryczne (kołowe): arcus sinus

(1) Funkcja $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ i $y \in [-1, 1]$ mamy

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x.$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cosinus

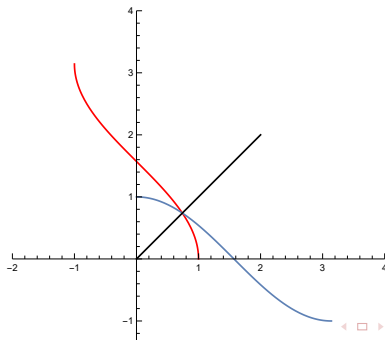
(2) Funkcja $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Dla $x \in [0, \pi]$ i $y \in [-1, 1]$ mamy

$$x = \arccos y \iff y = \cos x.$$

Na przykład $\arccos 0 = \pi/2$ oraz $\arccos 1 = 0$.



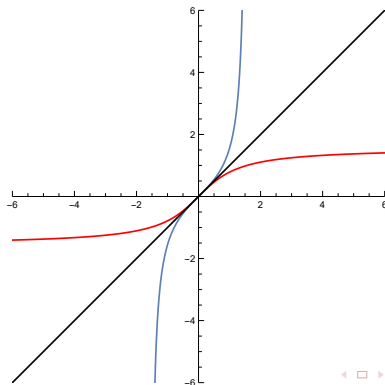
Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus tangens

(3) Funkcja $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy

$$x = \operatorname{arctg} y \iff y = \operatorname{tg} x.$$



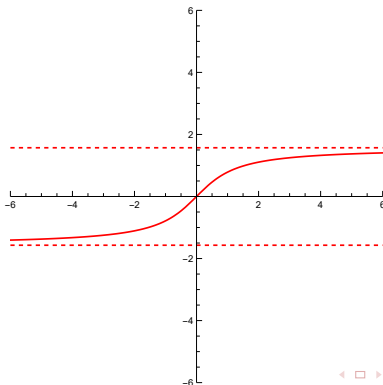
Funkcje cyklotometryczne (kołowe): arcus tangens

(3) Funkcja $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy

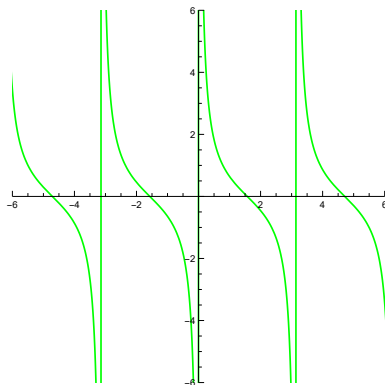
$$x = \operatorname{arctg} y \iff y = \operatorname{tg} x.$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotangens

(4) Funkcja cotangens jest określona wzorem

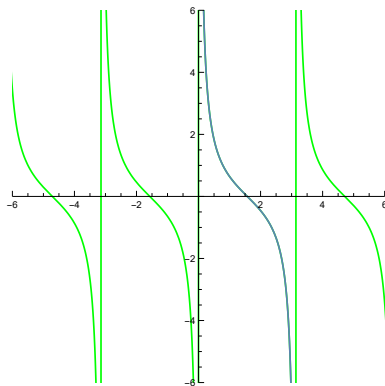
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotangens

(4) Funkcja cotangens jest określona wzorem

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

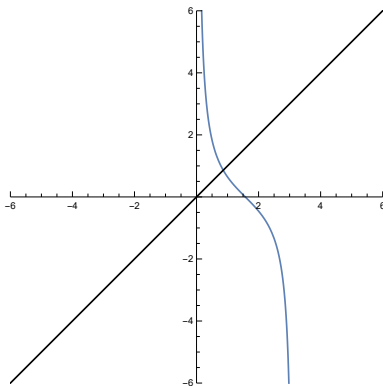


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotangens

(4) Funkcja $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest $\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Dla $x \in (0, \pi)$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy

$$x = \text{arcctg } y \iff y = \text{ctg } x.$$

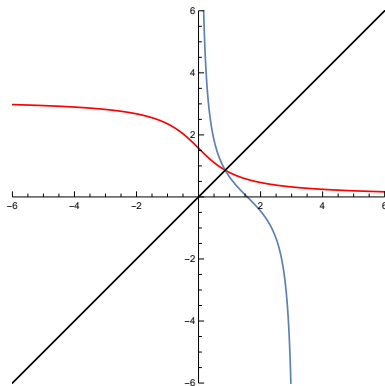


Funkcje cyklotometryczne (kołowe): arcus cotangens

(4) Funkcja $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest $\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Dla $x \in (0, \pi)$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy

$$x = \text{arcctg } y \iff y = \text{ctg } x.$$

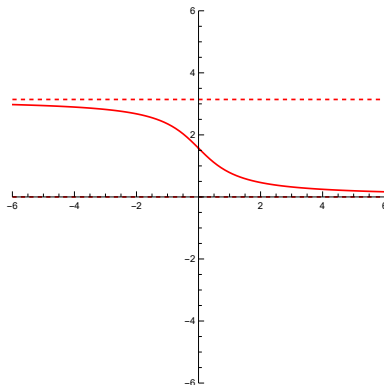


Funkcje cyklometryczne (kołowe): arcus cotangens

(4) Funkcja $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją. Jej funkcją odwrotną jest $\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Dla $x \in (0, \pi)$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy

$$x = \text{arcctg } y \iff y = \text{ctg } x.$$



Przykład:

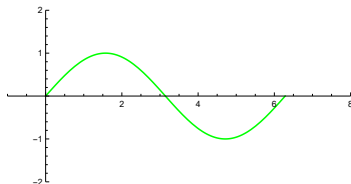
Wyznaczyć funkcję odwrotną do bijekcji

$$f : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x.$$

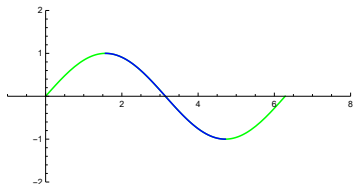
Przykład:

Wyznaczyć funkcję odwrotną do bijekcji

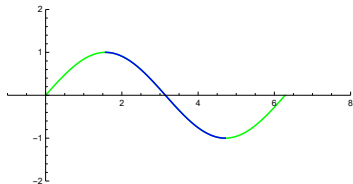
$$f : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x.$$



Wyznaczyć funkcję odwrotną do bijekcji $f : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$,
 $f(x) = \sin x$.



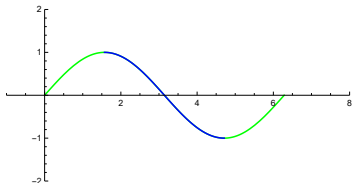
Wyznaczyć funkcję odwrotną do bijekcji $f : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$,
 $f(x) = \sin x$.



Niech $y = \sin x$ i $t = x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$y = \sin(t + \pi) = -\sin t.$$

Wyznaczyć funkcję odwrotną do bijekcji $f : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$,
 $f(x) = \sin x$.



Niech $y = \sin x$ i $t = x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$y = \sin(t + \pi) = -\sin t.$$

Stąd $t = \arcsin(-y) = -\arcsin y$, więc

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [\pi/2, 3\pi/2], \quad f^{-1}(y) = \pi - \arcsin y.$$

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$, jest *nieparzysta*, jeśli jej dziedzina jest symetryczna względem zera, tzn. $x \in D \Rightarrow -x \in D$, oraz

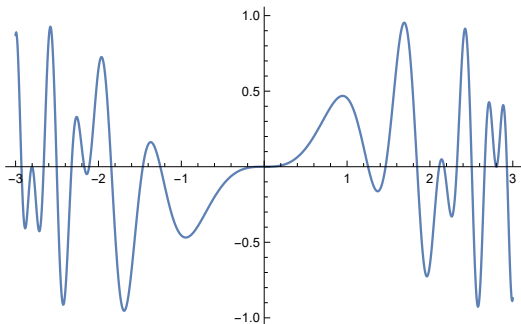
$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x).$$

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$, jest *nieparzysta*, jeśli jej dziedzina jest symetryczna względem zera, tzn. $x \in D \Rightarrow -x \in D$, oraz

$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x).$$

Uwaga: wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.



Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$, jest *parzysta*, jeśli jej dziedzina jest symetryczna względem zera, tzn. $x \in D \Rightarrow -x \in D$, oraz

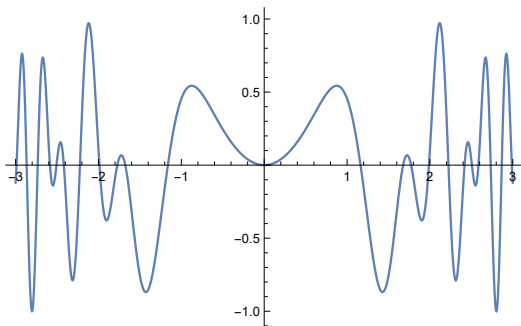
$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x).$$

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$, jest *parzysta*, jeśli jej dziedzina jest symetryczna względem zera, tzn. $x \in D \Rightarrow -x \in D$, oraz

$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x).$$

Uwaga: wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .



Przykłady (dla $n \in \mathbb{N}$):

(1) Funkcje x^{2n} , $|x|$, $\cos x$ oraz $x^{2n+1} \sin x$ są parzyste.

Przykłady (dla $n \in \mathbb{N}$):

(1) Funkcje x^{2n} , $|x|$, $\cos x$ oraz $x^{2n+1} \sin x$ są parzyste.

(2) Funkcje x^{2n+1} , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ oraz $x^{2n} \sin x$ są nieparzyste na swoich naturalnych dziedzinach.

Przykłady (dla $n \in \mathbb{N}$):

(1) Funkcje x^{2n} , $|x|$, $\cos x$ oraz $x^{2n+1} \sin x$ są parzyste.

(2) Funkcje x^{2n+1} , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ oraz $x^{2n} \sin x$ są nieparzyste na swoich naturalnych dziedzinach.

Stwierdzenie

Na wspólnej dziedzinie symetrycznej względem zera:

- iloczyn dwóch funkcji parzystych jest parzysty;
- iloczyn dwóch funkcji nieparzystych jest parzysty;
- iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej jest nieparzysty.

Ciągi liczbowe

Ciągi liczbowe

Definicja

Ciąg liczbowy to funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Jej wartości zapisujemy jako $f(n) = a_n$.

Oznaczenie: $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

a_n – n -ty wyraz ciągu.

Ciągi liczbowe

Definicja

Ciąg liczbowy to funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Jej wartości zapisujemy jako $f(n) = a_n$.

Oznaczenie: $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

a_n – n -ty wyraz ciągu.

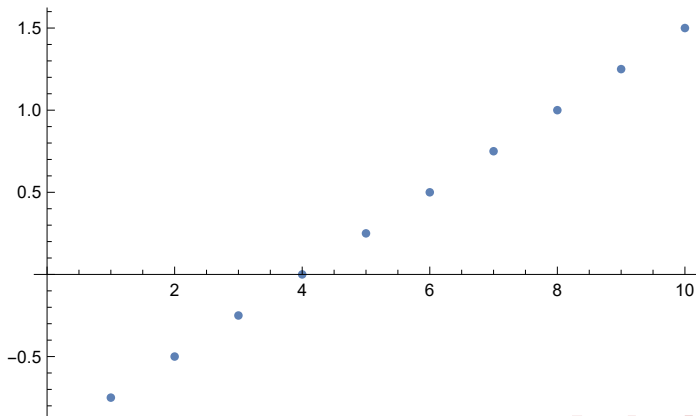
Przykłady (gdzie $a, r, q \in \mathbb{R}$):

- (1) Ciąg arytmetyczny: $a_n = a + (n-1)r$; $a_{n+1} - a_n = r$.
- (2) Ciąg geometryczny: $a_1 = a$, $a_{n+1} = qa_n$. Dla $n \geq 2$ mamy $a_n = aq^{n-1}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to $a_{n+1}/a_n = q$.
- (3) Ciąg harmoniczny: $a_n = 1/n$.
- (4) $a_n = (1 + 1/n)^n$.

Wykresy ciągów liczbowych: ciąg arytmetyczny

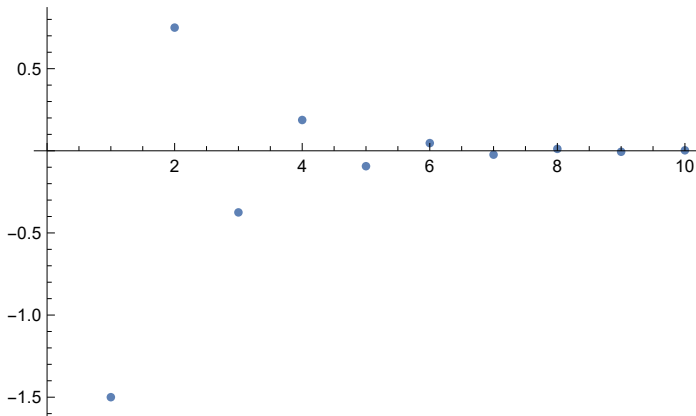
$$a_n = \frac{n}{4} - 1.$$

$$(a_n) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \dots\right).$$



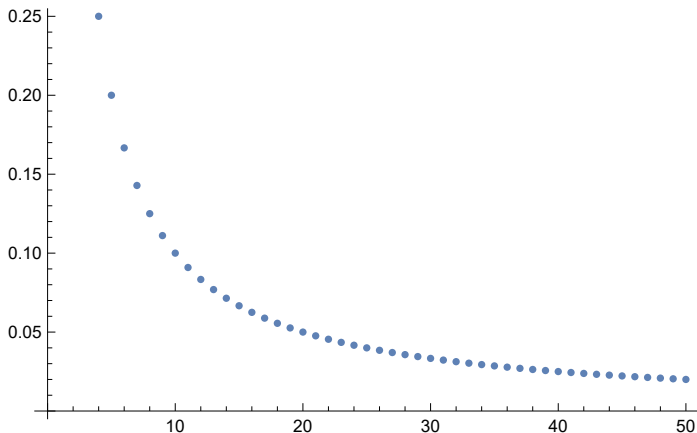
Wykresy ciągów liczbowych: ciąg geometryczny

$$a_n = 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$



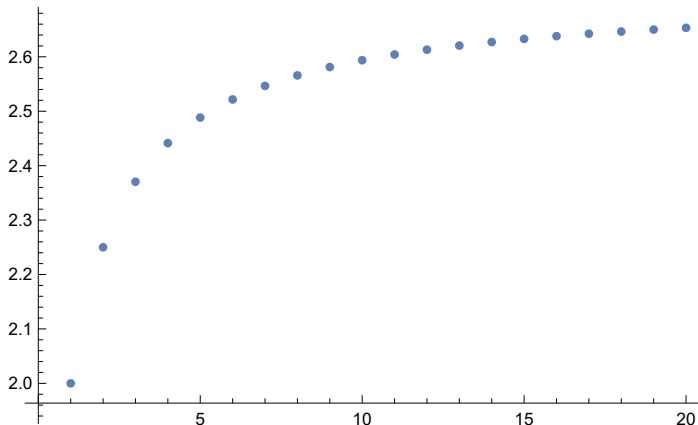
Wykresy ciągów liczbowych: ciąg harmoniczny

$$a_n = \frac{1}{n}.$$



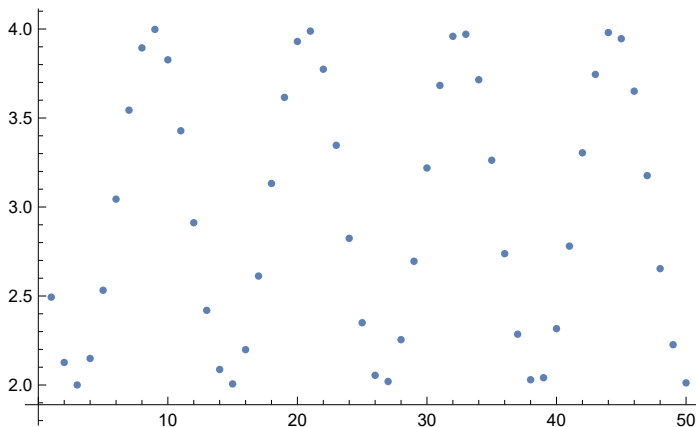
Wykresy ciągów liczbowych

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



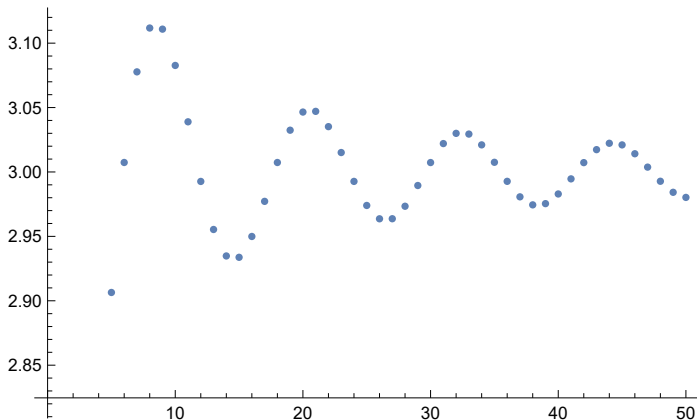
Wykresy ciągów liczbowych

$$a_n = 3 + \sin(100n).$$



Wykresy ciągów liczbowych

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \sin(100n).$$



Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

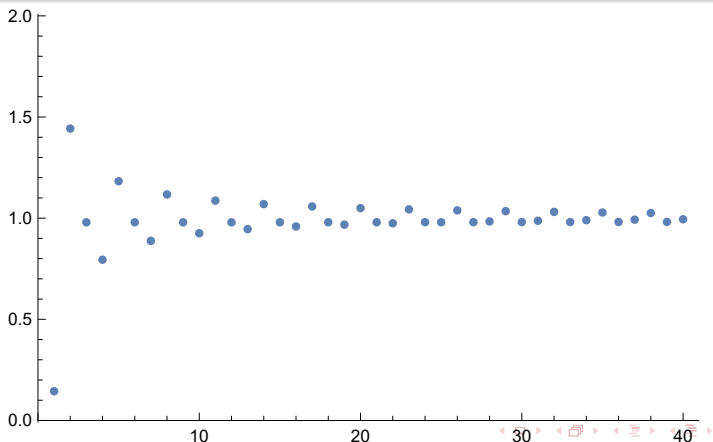
Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

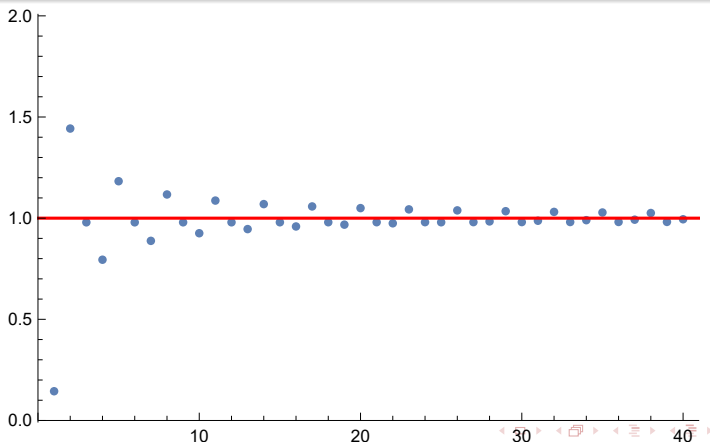


Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

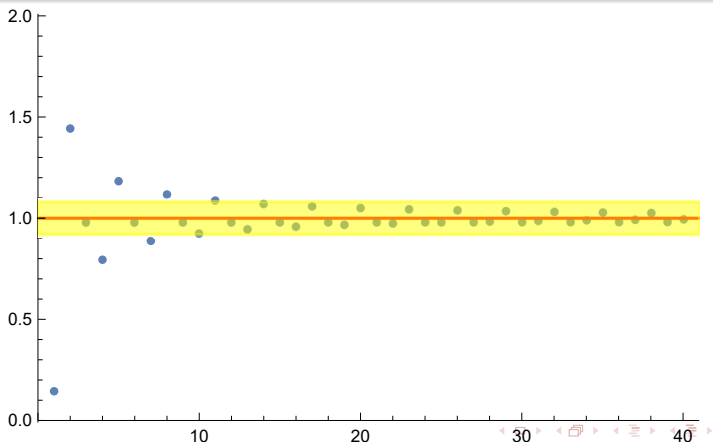


Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

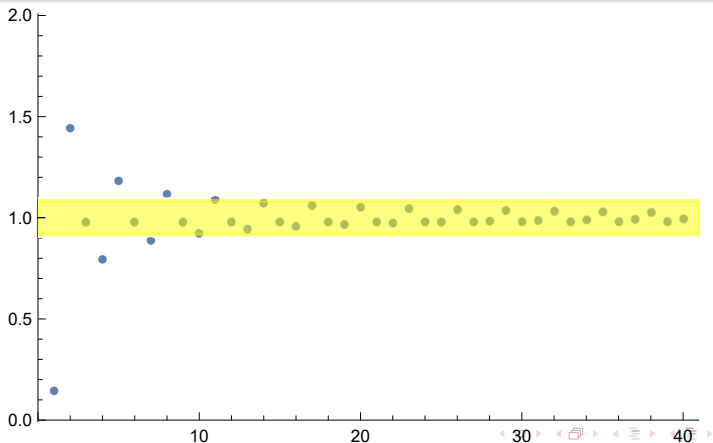


Warunek Cauchy'ego

Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest **zbieżny** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$(n > n_\varepsilon \wedge m > n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Przykłady:

(1) Jeśli $a_n = c \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, ponieważ $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Przykłady:

(1) Jeśli $a_n = c \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, ponieważ $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ponieważ dla $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

Definicja

Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do **granicy** $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Zapisujemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Przykłady:

(1) Jeśli $a_n = c \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, ponieważ $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ponieważ dla $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

(3) Podobnie dla każdego $a > 0$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

Stwierdzenie

Dla każdego $a > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Stwierdzenie

Dla każdego $a > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Stwierdzenie

Dla każdego $a > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$ mamy

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \iff a^{1/n} < 1 + \varepsilon \iff n > \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}.$$

Wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \lceil 1/\log_a(1 + \varepsilon) \rceil$.

Stwierdzenie

Dla każdego $a > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Dla $a = 1$ ciąg jest stały.

Dla $a > 1$ mamy

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \iff a^{1/n} < 1 + \varepsilon \iff n > \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}.$$

Wystarczy przyjąć $n_\varepsilon = \lceil 1/\log_a(1 + \varepsilon) \rceil$.

Dla $0 < a < 1$ i $\varepsilon \geq 1$ nierówność $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $0 < \varepsilon < 1$, to

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < a^{1/n} \iff n > \frac{1}{\log_a(1 - \varepsilon)}.$$

W tym przypadku można przyjąć $n_\varepsilon = \lceil 1/\log_a(1 - \varepsilon) \rceil$. □

Definicja

Ciąg (a_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M.$$

Każde takie M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu. Dla ciągu ograniczonego z góry *kres górny* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest najmniejszym górnym ograniczeniem.

Definicja

Ciąg (a_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M.$$

Każde takie M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu. Dla ciągu ograniczonego z góry *kres górny* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest najmniejszym górnym ograniczeniem.

Ciąg (a_n) jest *ograniczony z dołu*, jeśli

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq m.$$

Każde takie m nazywamy dolnym ograniczeniem ciągu. Dla ciągu ograniczonego z dołu *kres dolny* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest największym dolnym ograniczeniem.

Definicja

Ciąg (a_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M.$$

Każde takie M nazywamy górnym ograniczeniem ciągu. Dla ciągu ograniczonego z góry *kres górny* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest najmniejszym górnym ograniczeniem.

Ciąg (a_n) jest *ograniczony z dołu*, jeśli

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq m.$$

Każde takie m nazywamy dolnym ograniczeniem ciągu. Dla ciągu ograniczonego z dołu *kres dolny* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest największym dolnym ograniczeniem.

Ciąg jest *ograniczony*, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu, czyli gdy $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$.

Stwierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Stwierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Stwierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Dla $g \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |g|.$$

Twierdzenie o działaniach na granicach ciągów

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, oraz niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca.$$

Jeśli ponadto $b \neq 0$, to $b_n \neq 0$ od pewnego miejsca oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Iloraz rozpatrujemy dla tych dostatecznie dużych indeksów, dla których jest określony.

Dowód twierdzenia o granicy iloczynu.

Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód twierdzenia o granicy iloczynu.

Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla danego $\varepsilon > 0$ przyjmijmy $\delta = \varepsilon/(M + |b|) > 0$. Ze zbieżności istnieją $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \delta, \quad n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \delta.$$

Dowód twierdzenia o granicy iloczynu.

Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla danego $\varepsilon > 0$ przyjmijmy $\delta = \varepsilon/(M + |b|) > 0$. Ze zbieżności istnieją $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \delta, \quad n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \delta.$$

Dla $n > \max\{N_1, N_2\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< (M + |b|)\delta = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia o granicy iloczynu.

Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla danego $\varepsilon > 0$ przyjmijmy $\delta = \varepsilon/(M + |b|) > 0$. Ze zbieżności istnieją $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \delta, \quad n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \delta.$$

Dla $n > \max\{N_1, N_2\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< (M + |b|)\delta = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n + 4}{5n^3 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 1/n^2 + 4/n^3}{5 - 2/n^2} = \frac{3}{5}.$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ i każdego $n \geq n_0$ zachodzi $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \in \mathbb{R},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ i każdego $n \geq n_0$ zachodzi $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \in \mathbb{R},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

Przykład (1): obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ i każdego $n \geq n_0$ zachodzi $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \in \mathbb{R},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

Przykład (1): obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3}.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$, oba skrajne ciągi mają granicę 4. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

Przykład (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Przykład (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dowód. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Niech $n \geq 2$ i $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Z dwumianu Newtona:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Przykład (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dowód. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Niech $n \geq 2$ i $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Z dwumianu Newtona:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Ponieważ $n - 1 > 0$, otrzymujemy

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n}.$$

Stąd $0 \leq a_n \leq \sqrt{2/n} < 2/\sqrt{n}$. □

Przykład (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dowód. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Niech $n \geq 2$ i $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Z dwumianu Newtona:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Ponieważ $n - 1 > 0$, otrzymujemy

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n}.$$

Stąd $0 \leq a_n \leq \sqrt{2/n} < 2/\sqrt{n}$. □

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$, czyli $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Wniosek

Jeśli $a_n \rightarrow 0$ i ciąg (b_n) jest ograniczony, to $a_n b_n \rightarrow 0$.

Wniosek

Jeśli $a_n \rightarrow 0$ i ciąg (b_n) jest ograniczony, to $a_n b_n \rightarrow 0$.

Przykłady:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0, \text{ ponieważ } 1/n \rightarrow 0 \text{ i } |\sin n| \leq 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 10n} = 1. \text{ Dla } n \geq 1 \text{ mamy}$$

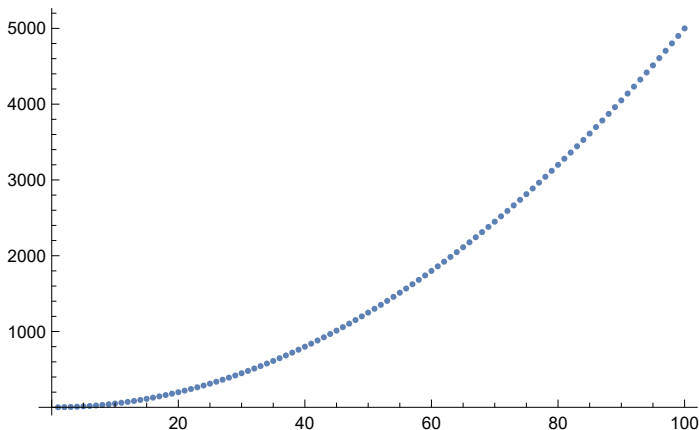
$$(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2 + 10n} \leq \sqrt[n]{11} (\sqrt[n]{n})^2.$$

Oba skrajne ciągi mają granicę 1. Wynik otrzymujemy z twierdzenia o działaniach na granicach i twierdzenia o trzech ciągach.

Definicja (granica niewłaściwa)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , co zapisujemy jako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

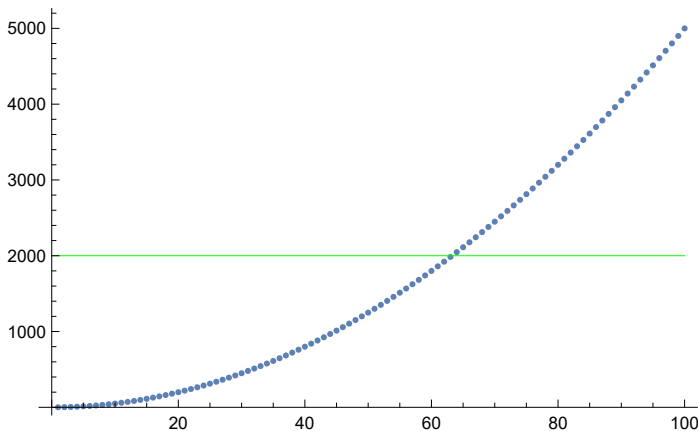
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$



Definicja (granica niewłaściwa)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , co zapisujemy jako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

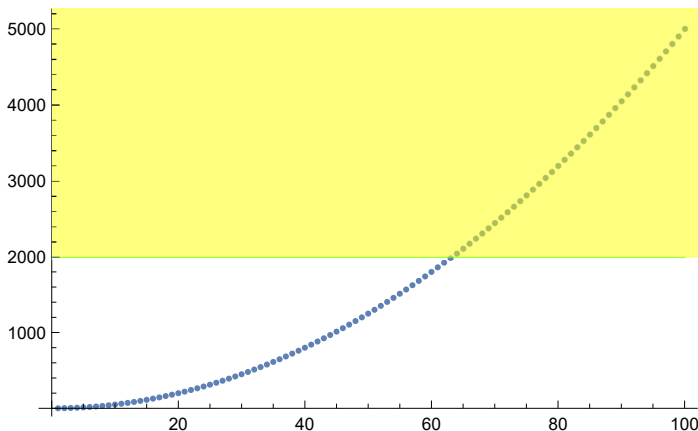
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$



Definicja (granica niewłaściwa)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , co zapisujemy jako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$



Definicja (granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $-\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists n_m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_m \Rightarrow a_n < m).$$

Definicja (granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $-\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists n_m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_m \Rightarrow a_n < m).$$

Przykład (1): dla $a > 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = +\infty$.

Definicja (granice niewłaściwe)

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_M \Rightarrow a_n > M).$$

Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $-\infty$* , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists n_m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_m \Rightarrow a_n < m).$$

Przykład (1): dla $a > 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = +\infty$.

$$\log_a n > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > a^M.$$

W definicji wystarczy przyjąć $n_M = \lceil a^M \rceil$.

Przykład (2): dla $0 < a < 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = -\infty$.

$$\log_a n < m \iff n > a^m.$$

W definicji wystarczy przyjąć $n_m = \lceil a^m \rceil$.

Przykład (2): dla $0 < a < 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = -\infty$.

$$\log_a n < m \iff n > a^m.$$

W definicji wystarczy przyjąć $n_m = \lceil a^m \rceil$.

Uwagi:

(1) Jeśli $a_n \rightarrow +\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$, to od pewnego miejsca $a_n \neq 0$ i $1/a_n \rightarrow 0$.

Przykład (2): dla $0 < a < 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = -\infty$.

$$\log_a n < m \iff n > a^m.$$

W definicji wystarczy przyjąć $n_m = \lceil a^m \rceil$.

Uwagi:

(1) Jeśli $a_n \rightarrow +\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$, to od pewnego miejsca $a_n \neq 0$ i $1/a_n \rightarrow 0$.

(2) Zachodzą następujące reguły:

$$a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty, \quad a_n b_n \rightarrow +\infty,$$

$$a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty, \quad a_n b_n \rightarrow +\infty,$$

$$a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow +\infty, \quad a_n b_n \rightarrow -\infty,$$

$$a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow -\infty, \quad a_n b_n \rightarrow -\infty.$$

(3) *Symbole nieoznaczone* to:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Sam symbol nie rozstrzyga o istnieniu ani o wartości granicy; wynik zależy od konkretnych ciągów. W wyrażeniach potęgowych zakładamy dodatniość podstaw od pewnego miejsca.

(3) *Symbole nieoznaczone* to:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Sam symbol nie rozstrzyga o istnieniu ani o wartości granicy; wynik zależy od konkretnych ciągów. W wyrażeniach potęgowych zakładamy dodatniość podstaw od pewnego miejsca.

Przykłady dla symbolu $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n \right) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = +\infty.$$

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy:

- *rosnącym* (ściśle rosnącym), jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$;
- *niemalejącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$;
- *malejącym* (ściśle malejącym), jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$;
- *nierosnącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$.

Ciąg jest *monotoniczny*, gdy jest niemalejący lub nierosnący.

Ciąg jest *ściśle monotoniczny*, gdy jest rosnący lub malejący.

Przykłady:

(1) Ciąg $a_n = 1/n$ jest malejący, ponieważ $1/(n+1) < 1/n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Równoważnie, gdyż $a_n > 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Przykłady:

(1) Ciąg $a_n = 1/n$ jest malejący, ponieważ $1/(n+1) < 1/n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Równoważnie, gdyż $a_n > 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

(2) Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r > 0$, ponieważ

$$a_{n+1} - a_n = r > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n.$$

Przykłady:

(1) Ciąg $a_n = 1/n$ jest malejący, ponieważ $1/(n+1) < 1/n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Równoważnie, gdyż $a_n > 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

(2) Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r > 0$, ponieważ

$$a_{n+1} - a_n = r > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n.$$

(3) Ciąg $a_n = 3^n/n!$ jest malejący od trzeciego wyrazu, ponieważ $a_n > 0$ oraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} < 1 \quad (n \geq 3).$$

Definicja

Jeśli (n_k) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg

$$(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n) .

Definicja

Jeśli (n_k) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg

$$(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n) .

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę właściwą lub niewłaściwą, to każdy jego podciąg (a_{n_k}) ma tę samą granicę:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Przykład: ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, ponieważ $a_{2k} = 1$ i $a_{2k-1} = -1$, więc ma podciągi o różnych granicach.

Przykład: ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, ponieważ $a_{2k} = 1$ i $a_{2k-1} = -1$, więc ma podciągi o różnych granicach.

Twierdzenie o ciągach monotonicznych

Ciąg monotoniczny od pewnego miejsca i ograniczony jest zbieżny. Wystarczy, aby był od pewnego miejsca niemalejący i ograniczony z góry albo nierosnący i ograniczony z dołu.

Przykład (1): ciąg $a_n = 3^n/n!$ jest malejący od trzeciego wyrazu i ograniczony z dołu przez 0, zatem jest zbieżny.

$$\exists g \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = g.$$

Pokażemy, że $g = 0$.

Dla $a_n = 3^n/n!$ mamy $a_{n+1} = \frac{3}{n+1}a_n$ oraz
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$. Zatem

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n+1} a_n \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = 0 \cdot g = 0. \end{aligned}$$

Dla $a_n = 3^n/n!$ mamy $a_{n+1} = \frac{3}{n+1}a_n$ oraz
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$. Zatem

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n+1} a_n \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = 0 \cdot g = 0. \end{aligned}$$

(2) Wykażemy, że ciąg $a_n = (1 + 1/n)^n$ jest rosnący i ograniczony, a zatem zbieżny.

Dla $a_n = 3^n/n!$ mamy $a_{n+1} = \frac{3}{n+1}a_n$ oraz
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$. Zatem

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n+1} a_n \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = 0 \cdot g = 0. \end{aligned}$$

(2) Wykażemy, że ciąg $a_n = (1 + 1/n)^n$ jest rosnący i ograniczony, a zatem zbieżny.

Liczba e – podstawa logarytmu naturalnego

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2,71828.$$

Dla $a > 0$ stosujemy oznaczenie $\ln a = \log_e a$.

Nierówność Bernoulliego

Twierdzenie

Dla każdego $a \geq -1$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ zachodzi równość.

Twierdzenie

Dla każdego $a \geq -1$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ zachodzi równość.

Założmy, że $(1 + a)^n \geq 1 + na$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $1 + a \geq 0$, możemy pomnożyć obie strony przez $1 + a$:

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &\geq (1 + a)(1 + na) \\ &= 1 + (n + 1)a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a.\end{aligned}$$

To kończy dowód, również dla $a = -1$.



(2) Niech $a_n = (1 + 1/n)^n$. Wykażemy, że $a_{n+1} > a_n$ oraz $a_n \leq 3$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(2) Niech $a_n = (1 + 1/n)^n$. Wykażemy, że $a_{n+1} > a_n$ oraz $a_n \leq 3$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $a_n > 0$, nierówność $a_{n+1} > a_n$ jest równoważna $a_{n+1}/a_n > 1$. Z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.\end{aligned}$$

Ciąg (a_n) jest więc rosnący.

Aby wykazać ograniczoność ciągu $a_n = (1 + 1/n)^n$, zauważmy, że dla $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) 1 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

ponieważ $k! \geq 2^{k-1}$ dla każdego $k \geq 1$.

Aby wykazać ograniczoność ciągu $a_n = (1 + 1/n)^n$, zauważmy, że dla $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdots (n-1)n}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) 1 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

ponieważ $k! \geq 2^{k-1}$ dla każdego $k \geq 1$. Z dwumianu Newtona i wzoru na sumę ciągu geometrycznego wynika, że

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 3 - 2^{1-n} < 3.\end{aligned}$$

Ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony, zatem jest zbieżny.

Uwaga

Jeśli $x_n \rightarrow +\infty$ lub $x_n \rightarrow -\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Wyrażenie jest określone dla dostatecznie dużych n : wtedy $x_n \neq 0$ i $1 + 1/x_n > 0$.

Przykład. Niech $n \geq 2$

Wtedy

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 1} \right)^{2n+1} &= \left(\frac{(n^2 + 1) + (-n + 1)}{n^2 + 1} \right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{-n + 1}{n^2 + 1} \right)^{2n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 1}{-n + 1}} \right)^{2n+1} = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 1}{-n + 1}} \right)^{\frac{n^2 + 1}{-n + 1}} \right)^{\frac{(2n+1)(-n+1)}{n^2 + 1}} = \left[\left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} \right]^{y_n}, \end{aligned}$$

gdzie

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{-n + 1} \rightarrow -\infty, \quad y_n = \frac{(-n + 1)(2n + 1)}{n^2 + 1} \rightarrow -2.$$

Zatem, korzystając z ciągłości potęgowania przy dodatniej podstawie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 1} \right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} \right]^{y_n} = e^{-2}.$$

Uzupełnienie – symbol i dwumian Newtona

Dla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $0 \leq k \leq n$ definiujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $0! = 1$, a $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ dla $k \geq 1$.

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

W tym wzorze potęgę o wykładniku 0 przyjmujemy równą 1.

Uzupełnienie – symbol i dwumian Newtona

Dla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $0 \leq k \leq n$ definiujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $0! = 1$, a $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ dla $k \geq 1$.

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

W tym wzorze potęgę o wykładniku 0 przyjmujemy równą 1.

Własności:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (0 \leq k \leq n), \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (0 \leq k < n).$$

Wykazać, że dla $\alpha \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$, mierzonego w radianach, zachodzą nierówności:

$$(a) \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1,$$

$$(b) \quad \cos \alpha \geq 1 - |\alpha|.$$

(a) Dla $0 < \alpha < \pi/2$ z poprzednich nierówności wynika, że

$$\sin \alpha < \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{czyli} \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

Jeśli $-\pi/2 < \alpha < 0$, to $0 < -\alpha < \pi/2$, zatem

$$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1.$$

Z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa otrzymujemy $\cos \alpha < \sin \alpha / \alpha < 1$ także dla ujemnych α .

(a) Dla $0 < \alpha < \pi/2$ z poprzednich nierówności wynika, że

$$\sin \alpha < \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{czyli} \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

Jeśli $-\pi/2 < \alpha < 0$, to $0 < -\alpha < \pi/2$, zatem

$$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1.$$

Z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa otrzymujemy $\cos \alpha < \sin \alpha / \alpha < 1$ także dla ujemnych α .

(b) Korzystając z (a) dla $|\alpha|/2$, uzyskujemy $|\sin(\alpha/2)| \leq |\alpha|/2$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\alpha|}{2} = |\alpha|. \end{aligned}$$

Stąd $\cos \alpha \geq 1 - |\alpha|$.

