Analiza, Funkcje wielu zmiennych część 3

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Niech $a, x \in \mathbb{R}^n$, $d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$. Sąsiedztwo a to zbiór $S(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < d(x,a) < \delta\}$.

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Niech $a, x \in \mathbb{R}^n$, $d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$. Sąsiedztwo a to zbiór $S(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < d(x,a) < \delta\}$.

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a,\delta) \cap D \qquad f(x) \leqslant f(a).$$

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Niech $a, x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$. Sąsiedztwo a to zbiór $S(a, \delta) = B(a, \delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < d(x, a) < \delta\}$.

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a, \delta) \cap D \qquad f(x) \leqslant f(a).$$

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a, \delta) \cap D \qquad f(x) \geqslant f(a).$$

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Niech $a, x \in \mathbb{R}^n$, $d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$. Sąsiedztwo a to zbiór $S(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < d(x,a) < \delta\}$.

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a,\delta) \cap D \qquad f(x) \leqslant f(a).$$

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a,\delta) \cap D \qquad f(x) \geqslant f(a).$$

Maksima i minima funkcji nazywamy *ekstremami* funkcji.

Niech $a, x \in \mathbb{R}^n$, $d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$. Sąsiedztwo a to zbiór $S(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < d(x,a) < \delta\}$.

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a,\delta) \cap D \qquad f(x) \leqslant f(a).$$

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in D$ *minimum lokalne*, jeśli

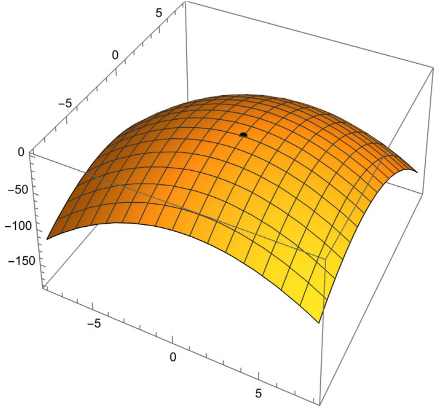
$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S(a,\delta) \cap D \qquad f(x) \geqslant f(a).$$

Maksima i minima funkcji nazywamy *ekstremami* funkcji. Jeśli w definicji zamiast nierówności $\leqslant$ ($\geqslant$) spełnione są nierówności $<$ ($>$), to ekstrema nazywamy *właściwymi*, w przeciwnym przypadku ekstrema są *niewłaściwe*. W obu sytuacjach są to ekstrema *lokalne*.

Maximum

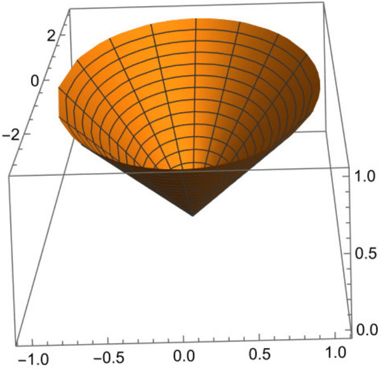
$$f(x,y) = -(x-1)^2 - (y+2)^2$$

ma maximum właściwe w punkcie $(1,-2)$ równe $f(1,-2) = 0$.



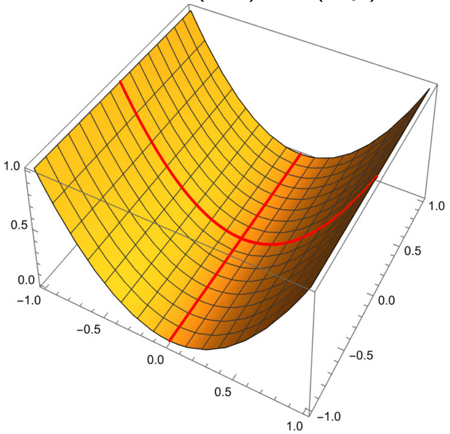
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9}}$$

ma minimum właściwe w punkcie $(0, 0)$ równe $f(0, 0) = 0$.



Minimum niewłaściwe

$f(x, y) = x^2$ ma minimum w punkcie $(0, 0)$ równe $f(0, 0) = 0$. Jest to minimum niewłaściwe, bo $f(0, 0) = f(0, y)$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$.



Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a ekstremum lokalne i pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v istnieje, to $\frac{df}{dv}(a) = 0$. W szczególności jeśli istnieją pochodne cząstkowe w a to zerują się w a.

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a ekstremum lokalne i pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v istnieje, to $\frac{df}{dv}(a) = 0$. W szczególności jeśli istnieją pochodne cząstkowe w a to zerują się w a.

Dowód: Pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v to pochodna w 0 funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + tv)$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a ekstremum lokalne i pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v istnieje, to $\frac{df}{dv}(a) = 0$. W szczególności jeśli istnieją pochodne cząstkowe w a to zerują się w a.

Dowód: Pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v to pochodna w 0 funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + tv)$.
Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w a to funkcja g ma ekstremu lokalne w 0 ($g(0) = f(a)$).

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a ekstremum lokalne i pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v istnieje, to $\frac{df}{dv}(a) = 0$. W szczególności jeśli istnieją pochodne cząstkowe w a to zerują się w a.

Dowód: Pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v to pochodna w 0 funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + tv)$.
Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w a to funkcja g ma ekstremu lokalne w 0 ($g(0) = f(a)$).
Stąd z Lematu Fermata (twierdzenie o znikaniu pochodnej funkcji (jednej zmiennej) w ekstremach) otrzymujemy $\frac{df}{dv}(a) = g'(0) = 0$.
□

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a ekstremum lokalne i pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v istnieje, to $\frac{df}{dv}(a) = 0$. W szczególności jeśli istnieją pochodne cząstkowe w a to zerują się w a.

Dowód: Pochodna kierunkowa w a w kierunku wektora v to pochodna w 0 funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + tv)$.
Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w a to funkcja g ma ekstremu lokalne w 0 ($g(0) = f(a)$).
Stąd z Lematu Fermata (twierdzenie o znikaniu pochodnej funkcji (jednej zmiennej) w ekstremach) otrzymujemy $\frac{df}{dv}(a) = g'(0) = 0$.
□

Punkty stacjonarne (krytyczne)

Definicja

Punkt $a \in D$ nazywamy punktem stacjonarnym lub krytycznym funkcji f jeżeli $f_{x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$.

Punkty stacjonarne (krytyczne)

Definicja

Punkt $a \in D$ nazywamy punktem stacjonarnym lub krytycznym funkcji f jeżeli $f_{x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$.

(1) Funkcja $f(x, y) = x^5 + 3x + y^3 + \cos x - \cos y$
nie ma ekstremów, bo $5x^4 + 3 \geq 3$, $-\sin x + \sin y \geq -2$,
$f_x(x, y) = 5x^4 + 3 - \sin x + \sin y \geq 1$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definicja

Punkt $a \in D$ nazywamy punktem stacjonarnym lub krytycznym funkcji f jeżeli $f_{x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$.

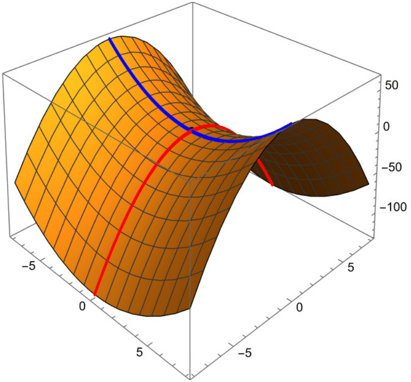
(1) Funkcja $f(x, y) = x^5 + 3x + y^3 + \cos x - \cos y$
nie ma ekstremów, bo $5x^4 + 3 \geq 3$, $-\sin x + \sin y \geq -2$,
$f_x(x, y) = 5x^4 + 3 - \sin x + \sin y \geq 1$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $z(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Punkt $(1, -2)$ jest punktem krytycznym funkcji z oraz
$z(1, -2) = 0$.
$z(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$
Funkcja z ma minimum w $(1, -2)$.

Uwaga: Warunek konieczny z twierdzenia nie jest warunkiem wystarczającym na ekstremum. Niech $f(x,y) = x^2 - y^2$.
$f_x(x,y) = 2x = 0$ i $f_y(x,y) = -2y = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.
Czyli $(0,0)$ jest punktem stacjonarnym f.
$f(x,0) = x^2$ i $x = 0$ jest minimum lokalnym funkcji $f(x,0)$.
$f(0,y) = -y^2$ i $y = 0$ jest maksimum lokalnym funkcji $f(0,y)$.
Stąd $f(x,y)$ nie ma ekstremum w $(0,0)$.



Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, a będzie punktem wewnętrznym D i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w a do rzędu $(k+1)$. Wtedy istnieje $r > 0$ taki, że dla każdego $x \in B(a,r) \subset D$ istnieje $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$f(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \sum_{j_1+\cdots+j_n=l} \frac{\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a)}{j_1! \cdots j_n!} (x_1 - a_1)^{j_1} \cdots (x_n - a_n)^{j_n}$$

$$+ \sum_{j_1+\cdots+j_n=k+1} \frac{\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a + \theta(x-a))}{j_1! \cdots j_n!} (x_1 - a_1)^{j_1} \cdots (x_n - a_n)^{j_n}$$

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$.

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi
$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$,

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi
$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$,
$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + t(x - a))(x_i - a_i)^2 +$
$2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x - a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$.

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi
$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$,
$\frac{d^2g}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + t(x - a))(x_i - a_i)^2 +$
$2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x - a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$.
Pochodnych mieszanych rzędu l dających wartość równą $\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a + t(x - a))$ jest $\frac{l!}{j_1! \cdots j_n!}$, gdzie $j_1 + \cdots + j_n = l$.

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi
$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$,
$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + t(x - a))(x_i - a_i)^2 +$
$2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x - a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$.
Pochodnych mieszanych rzędu l dających wartość równą
$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a + t(x - a))$ jest $\frac{l!}{j_1! \cdots j_n!}$, gdzie $j_1 + \cdots + j_n = l$.
Ogólnie dla $l = 1, \cdots k, k + 1$ zachodzi $\frac{d^l g}{dt^l}(t) =$
$l! \sum_{l=1}^{k} \sum_{j_1+\cdots+j_n=l} \frac{\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a+t(x-a))}{j_1! \cdots j_n!}(x_1 - a_1)^{j_1} \cdots (x_n - a_n)^{j_n}$.

Dowód wzoru Taylora

Niech $g(t) = f(a + t(x - a))$. Wtedy funkcja g jest klasy C^{k+1} w 0 oraz zachodzi
$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$,
$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a + t(x - a))(x_i - a_i)^2 +$
$2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x - a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$.
Pochodnych mieszanych rzędu l dających wartość równą
$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a + t(x - a))$ jest $\frac{l!}{j_1! \cdots j_n!}$, gdzie $j_1 + \cdots + j_n = l$.
Ogólnie dla $l = 1, \cdots k, k+1$ zachodzi $\frac{d^l g}{dt^l}(t) =$
$l! \sum_{l=1}^{k} \sum_{j_1 + \cdots + j_n = l} \frac{\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(a+t(x-a))}{j_1! \cdots j_n!}(x_1 - a_1)^{j_1} \cdots (x_n - a_n)^{j_n}$.
Zapisując wzór Maclaurina dla funkcji $g(t)$ i następnie podstawiając $t = 1$ otrzymujemy tezę twierdzenia.$\square$

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x, y) = exp(x^2 + y^2) + 1$ w punkcie $(0, 0)$ dla $k = 1$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x, y) = exp(x^2 + y^2) + 1$ w punkcie $(0, 0)$ dla $k = 1$.

$f_x(x, y) = 2xexp(x^2 + y^2)$, $f_y(x, y) = 2yexp(x^2 + y^2)$,
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x, y) = exp(x^2 + y^2) + 1$ w punkcie $(0, 0)$ dla $k = 1$.

$f_x(x, y) = 2xexp(x^2 + y^2)$, $f_y(x, y) = 2yexp(x^2 + y^2)$,
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

$f_{xx}(x, y) = 2exp(x^2 + y^2)(2x^2 + 1)$,$f_{yy}(x, y) = 2exp(x^2 + y^2)(2y^2 + 1)$, $f_{xy}(x, y) = 4xyexp(x^2 + y^2)$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x, y) = exp(x^2 + y^2) + 1$ w punkcie $(0, 0)$ dla $k = 1$.

$f_x(x, y) = 2xexp(x^2 + y^2)$, $f_y(x, y) = 2yexp(x^2 + y^2)$, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

$f_{xx}(x, y) = 2exp(x^2 + y^2)(2x^2 + 1)$, $f_{yy}(x, y) = 2exp(x^2 + y^2)(2y^2 + 1)$, $f_{xy}(x, y) = 4xyexp(x^2 + y^2)$.

$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(\theta x, \theta y)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\theta x, \theta y)y^2 + f_{xy}(\theta x, \theta y)xy$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x,y) = exp(x^2+y^2)+1$ w punkcie $(0,0)$ dla $k=1$.

$f_x(x,y) = 2xexp(x^2+y^2)$, $f_y(x,y) = 2yexp(x^2+y^2)$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

$f_{xx}(x,y) = 2exp(x^2+y^2)(2x^2+1)$,$f_{yy}(x,y) = 2exp(x^2+y^2)(2y^2+1)$, $f_{xy}(x,y) = 4xyexp(x^2+y^2)$.

$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(\theta x, \theta y)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\theta x, \theta y)y^2 + f_{xy}(\theta x, \theta y)xy$.

$f(x,y) = 2 + exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2x^2+1)x^2 + exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2y^2+1)y^2 + 4\theta^2xyexp(\theta^2(x^2+y^2))xy$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x,y) = exp(x^2+y^2)+1$ w punkcie $(0,0)$ dla $k=1$.

$f_x(x,y) = 2xexp(x^2+y^2)$, $f_y(x,y) = 2yexp(x^2+y^2)$,
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

$f_{xx}(x,y) = 2exp(x^2+y^2)(2x^2+1)$, $f_{yy}(x,y) = 2exp(x^2+y^2)(2y^2+1)$, $f_{xy}(x,y) = 4xyexp(x^2+y^2)$.

$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(\theta x,\theta y)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\theta x,\theta y)y^2 + f_{xy}(\theta x,\theta y)xy$.

$f(x,y) = 2 + exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2x^2+1)x^2 + exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2y^2+1)y^2 + 4\theta^2xyexp(\theta^2(x^2+y^2))xy$.

$f(x,y) - f(0,0) = exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2x^2+1)x^2 + exp(\theta^2(x^2+y^2))(2\theta^2y^2+1)y^2 + 4exp(\theta^2(x^2+y^2))\theta^2x^2y^2 > 0$ dla $(x,y) \neq (0,0)$.

Przykład

Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x,y) = exp(x^2 + y^2) + 1$ w punkcie $(0,0)$ dla $k = 1$.

$f_x(x,y) = 2xexp(x^2 + y^2)$, $f_y(x,y) = 2yexp(x^2 + y^2)$,
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

$f_{xx}(x,y) = 2exp(x^2 + y^2)(2x^2 + 1)$, $f_{yy}(x,y) = 2exp(x^2 + y^2)(2y^2 + 1)$, $f_{xy}(x,y) = 4xyexp(x^2 + y^2)$.

$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(\theta x, \theta y)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\theta x, \theta y)y^2 + f_{xy}(\theta x, \theta y)xy$.

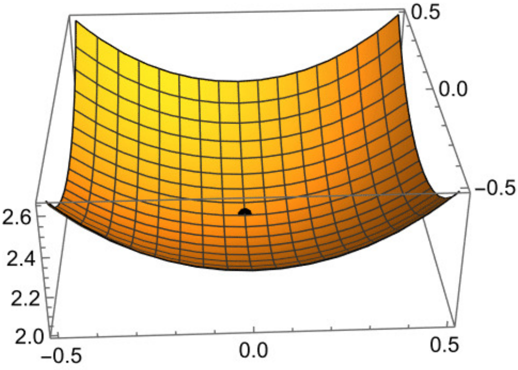
$f(x,y) = 2 + exp(\theta^2(x^2 + y^2))(2\theta^2 x^2 + 1)x^2 + exp(\theta^2(x^2 + y^2))(2\theta^2 y^2 + 1)y^2 + 4\theta^2 xyexp(\theta^2(x^2 + y^2))xy$.

$f(x,y) - f(0,0) = exp(\theta^2(x^2 + y^2))(2\theta^2 x^2 + 1)x^2 + exp(\theta^2(x^2 + y^2))(2\theta^2 y^2 + 1)y^2 + 4exp(\theta^2(x^2 + y^2))\theta^2 x^2 y^2 > 0$ dla $(x,y) \neq (0,0)$.
Czyli funkcja f ma minimum w $(0,0)$ równe $f(0,0) = 2$

Przykład

$$f(x,y) = exp(x^2 + y^2) + 1$$

ma minimum właściwe w punkcie $(0,0)$ równe $f(0,0) = 2$.



Warunek wystarczający istnienia ekstremum ($n = 2$)

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w (x_0, y_0), $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$. Macierz

$$H_f(x_0, y_0) = \left(\begin{array}{cc} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{array} \right).$$

nazywamy macirzą Hessego funkcji f w pukcie (x_0, y_0). Wtedy:

(a) jeśli $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i jest to minimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$,

(b) jeśli $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum w punkcie (x_0, y_0).

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w (x_0, y_0), $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$. Macierz

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

nazywamy macirzą Hessego funkcji f w pukcie (x_0, y_0). Wtedy:

(a) jeśli $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i jest to minimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$,

(b) jeśli $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum w punkcie (x_0, y_0).

Uwaga: $\det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$

Dowód

Założenia Tw.: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det H_f(x_0, y_0) \neq 0$.

Dowód

Założenia Tw.: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det H_f(x_0, y_0) \neq 0$.
Załóżmy, że $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$.

Dowód

Założenia Tw.: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det H_f(x_0, y_0) \neq 0$.
Załóżmy, że $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$.
Ze wzoru Taylora dla $n = 2$ istnieje $r > 0$ taki, że dla każdego $(x, y) \in S((x_0, y_0), r) \subset D$
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2 + f_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(\Delta y)^2$.

Dowód

Założenia Tw.: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det H_f(x_0, y_0) \neq 0$.
Załóżmy, że $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$.
Ze wzoru Taylora dla $n = 2$ istnieje $r > 0$ taki, że dla każdego $(x, y) \in S((x_0, y_0), r) \subset D$
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2 + f_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(\Delta y)^2$.
Więc $f(x, y) - f(x_0, y_0) =$
$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left((\Delta x)^2 + 2\frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\Delta x \Delta y + \frac{f_{yy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}(\Delta y)^2\right)$.

Dowód

Założenia Tw.: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det H_f(x_0, y_0) \neq 0$.
Załóżmy, że $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$.
Ze wzoru Taylora dla $n = 2$ istnieje $r > 0$ taki, że dla każdego $(x, y) \in S((x_0, y_0), r) \subset D$
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2 + f_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(\Delta y)^2$.
Więc $f(x, y) - f(x_0, y_0) =$
$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left((\Delta x)^2 + 2\frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\Delta x \Delta y + \frac{f_{yy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}(\Delta y)^2\right)$. Stąd

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), \quad (1)$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $(a, b) = (x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ dla pewnego $t \in (0, 1)$.

Dowód (a)

Przeprowadzimy teraz dowód przy założeniu, że $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ i $\det H_f(x_0, y_0) > 0$.

Dowód (a)

Przeprowadzimy teraz dowód przy założeniu, że $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ i $\det H_f(x_0, y_0) > 0$.

Z ciągłości pochodnych cząstkowych rzędu 2 możemy założyć, że $f_{xx}(a, b) > 0$ i $\det H_f(a, b) > 0$.

Dowód (a)

Przeprowadzimy teraz dowód przy założeniu, że $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ i $\det H_f(x_0, y_0) > 0$.

Z ciągłości pochodnych cząstkowych rzędu 2 możemy założyć, że $f_{xx}(a, b) > 0$ i $\det H_f(a, b) > 0$.
Stąd ze wzoru (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), \quad (2)$$

otrzymujemy, że $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ dla każdego $(x, y) \in S((x_0, y_0), r) \subset D$ czyli f ma minimum lokalne w (x_0, y_0).

Dowód (a)

Przeprowadzimy teraz dowód przy założeniu, że $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ i $\det H_f(x_0, y_0) > 0$.

Z ciągłości pochodnych cząstkowych rzędu 2 możemy założyć, że $f_{xx}(a, b) > 0$ i $\det H_f(a, b) > 0$.
Stąd ze wzoru (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), \quad (2)$$

otrzymujemy, że $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ dla każdego $(x, y) \in S((x_0, y_0), r) \subset D$ czyli f ma minimum lokalne w (x_0, y_0).

Jeżeli $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ i $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ to analogicznie z (2) otrzymujemy, że $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$ z czego wynika, że f ma maksimum lokalne w (x_0, y_0).

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), (3)$$

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\tfrac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\tfrac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\tfrac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), (3)$$

Podstawmy do (3) $\Delta y = 0$ przy założeniu, że $\Delta x \neq 0$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$\tfrac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\tfrac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\tfrac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), (3)$$

Podstawmy do (3) $\Delta y = 0$ przy założeniu, że $\Delta x \neq 0$.
Wtedy otrzymujemy
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), \quad (3)$$

Podstawmy do (3) $\Delta y = 0$ przy założeniu, że $\Delta x \neq 0$.
Wtedy otrzymujemy
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2$.
Następnie podstawmy $\Delta x = -f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}$ przy założeniu, że $\Delta y \neq 0$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), \quad (3)$$

Podstawmy do (3) $\Delta y = 0$ przy założeniu, że $\Delta x \neq 0$.
Wtedy otrzymujemy
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2$.
Następnie podstawmy $\Delta x = -f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}$ przy założeniu, że $\Delta y \neq 0$.
Wtedy $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2} \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2$.

Dowód (b)

Załóżmy, że $\det H_f(x_0, y_0) < 0$. Wtedy z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\det H_f(a, b) < 0$.
Jeśli $f_{xx}(a, b) \neq 0$ to z (1)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$\frac{f_{xx}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta x + f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2\right), (3)$$

Podstawmy do (3) $\Delta y = 0$ przy założeniu, że $\Delta x \neq 0$.
Wtedy otrzymujemy
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(\Delta x)^2$.
Następnie podstawmy $\Delta x = -f_{xy}(a, b)\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}$ przy założeniu, że $\Delta y \neq 0$.
Wtedy $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f_{xx}(a,b)}{2} \det H_f(a, b)\left(\frac{\Delta y}{f_{xx}(a,b)}\right)^2$.
Czyli w sąsiedztwie (x_0, y_0) wyrażenie $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ zmienia znak, więc f nie ma ekstremum w (x_0, y_0).

cd Dowodu (b)

Jeśli $f_{xx}(a,b) = 0$, a $f_{yy}(a,b) \neq 0$ to zamieniając role x i y we wzorze (1) otrzymujemu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$\tfrac{f_{yy}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta y + f_{xy}(a,b)\tfrac{\Delta x}{f_{yy}(a,b)}\right)^2 + \det H_f(a,b)\left(\tfrac{\Delta x}{f_{yy}(a,b)}\right)^2\right). \quad (4)$$

cd Dowodu (b)

Jeśli $f_{xx}(a,b)=0$, a $f_{yy}(a,b)\neq 0$ to zamieniając role x i y we wzorze (1) otrzymujemu

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$
$$\frac{f_{yy}(a,b)}{2}\left(\left(\Delta y+f_{xy}(a,b)\frac{\Delta x}{f_{yy}(a,b)}\right)^2+\det H_f(a,b)\left(\frac{\Delta x}{f_{yy}(a,b)}\right)^2\right).\quad(4)$$

Analogicznie podstawiając do (4) $\Delta x=0$ przy założeniu, że $\Delta y\neq 0$ oraz następnie $\Delta y=-f_{xy}(a,b)\frac{\Delta x}{f_{yy}(a,b)}$ przy założeniu, że $\Delta x\neq 0$ dowodzimy, że w sąsiedzwie (x_0,y_0) wyrażenie $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ zmienia znak, więc f nie ma ekstremum w (x_0,y_0).

cd Dowodu (b)

Jeśli $f_{xx}(a, b) = f_{yy}(a, b) = 0$ to ze wzoru Taylora

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y. \tag{5}$$

cd Dowodu (b)

Jeśli $f_{xx}(a, b) = f_{yy}(a, b) = 0$ to ze wzoru Taylora

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y. \tag{5}$$

Z tego, że $\det H_f(a, b) = -(f_{xy}(a, b))^2 < 0$ wynika, że $f_{xy}(a, b) \neq 0$.

cd Dowodu (b)

Jeśli $f_{xx}(a,b) = f_{yy}(a,b) = 0$ to ze wzoru Taylora

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_{xy}(a,b)\Delta x \Delta y. \tag{5}$$

Z tego, że $\det H_f(a,b) = -(f_{xy}(a,b))^2 < 0$ wynika, że $f_{xy}(a,b) \neq 0$.

Podstawiając $\Delta x > 0$ i $\Delta y > 0$ oraz $\Delta x > 0$ i $\Delta y < 0$ do (5) pokazujemy, że wyrażenie $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ również zmienia znak, więc f nie ma ekstremum w (x_0,y_0).

$\square$

Przykłady

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$
$f_x = 2x = 0,\ f_y = 2y = 0 \iff x = y = 0$
$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$
jest minimum lokalnym właściwym funkcji f.

Przykłady

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
$f_x = 2x = 0,\ f_y = 2y = 0 \iff x = y = 0$
$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$
jest minimum lokalnym właściwym funkcji f.
(2) $g(x,y) = -12 + 8x - 5x^2 + 10y - 2xy - 2y^2$
$g_x = 8 - 10x - 2y = 0,\ g_y = 10 - 2x - 4y = 0$
$\iff x = \frac{1}{3},\ y = \frac{7}{3}.$
$g_{xx} = -10,\ g_{xy} = -2,\ g_{yy} = -4$
$\det H_g(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 36 > 0,\quad g_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) = -10 < 0 \Rightarrow$
$g(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) = 1$ to maksimum lokalne właściwe.

Przykłady

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
$f_x = 2x = 0,\ f_y = 2y = 0 \iff \ x = y = 0$
$$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$$
jest minimum lokalnym właściwym funkcji f.
(2) $g(x,y) = -12 + 8x - 5x^2 + 10y - 2xy - 2y^2$
$g_x = 8 - 10x - 2y = 0,\ g_y = 10 - 2x - 4y = 0$
$\iff \ x = \frac{1}{3},\ y = \frac{7}{3}.$
$g_{xx} = -10,\ g_{xy} = -2,\ g_{yy} = -4$
$$\det H_g(\tfrac{1}{3}, \tfrac{7}{3}) = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad g_{xx}(\tfrac{1}{3}, \tfrac{7}{3}) = -10 < 0 \Rightarrow$$
$g(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) = 1$ to maksimum lokalne właściwe.
(3) $h(x,y) = x^2 - y^2$ nie ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:
$$\det H_h(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Uwaga:

Jeśli $\det H_f(x_0, y_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum w (x_0, y_0), np:
(1) $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$. Stąd f ma w $(0, 0)$ minimum lokalne właściwe. Ale $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 12y^2$ i $\det H_f(0, 0) = 0$.

Uwaga:

Jeśli $\det H_f(x_0, y_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum w (x_0, y_0), np:
(1) $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$. Stąd f ma w $(0, 0)$ minimum lokalne właściwe. Ale $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 12y^2$ i $\det H_f(0, 0) = 0$.
(2) $g(x, y) = x^3 + y^4$ nie ma w $(0, 0)$ ekstremum, bo $g(0, y) = y^4 > 0 = g(0, 0)$ dla $y \neq 0$ oraz $g(x, 0) = x^3 < 0 = g(0, 0)$ dla $x < 0$, ale $g_{xx} = 6x$, $g_{xy} = 0$, $g_{yy} = 12y^2$ i $\det H_g(0, 0) = 0$.

Przykłady:

Zbadać ekstrema funkcji:

(1) $f(x,y) = xy + 2x - y + 3\,, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y + 2 = 0 \\ f_y(x,y) = x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,-2) \text{ - punkt stacjonarny}$$

$$\det H_f(1,-2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{brak ekstremum w } (1,-2).$$

(2) $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \wedge \ y > 0\}, \quad g \in C^2(D_g)$

$$\begin{cases} g_x = 2x + y - \frac{4}{x} = 0 \\ g_y = x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + xy = 4 \\ xy + 2y^2 = 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{4-2x^2}{x} \\ 3x^4 - 19x^2 + 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4-2x^2}{x} \\ x^2 = 1 \ \vee \ x^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y) = (1,2)$ jedyne rozwiązanie takie, że $(x,y) \in D_g$.

$g_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}, \quad g_{xy} = 1, \quad g_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}$

$$\det H_g(x,y) = \begin{vmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{vmatrix} = \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)\left(2 + \frac{10}{y^2}\right) - 1 > 0$$

i $g_{xx}(1,2) = 6 > 0 \Rightarrow g(1,2) = 7 - 10\ln 2$ - minimum lokalne właściwe

(3) $z(x,y) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2)\,, \quad z \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} z_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 2) = 0 \\ z_y = 2y e^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-2, 0)$ - punkt stacjonarny

$$z_{xx} = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 4)\,, \quad z_{xy} = y e^{\frac{x}{2}}\,, \quad z_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$\det H_z(x,y) = \frac{1}{2} e^x (x - y^2 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det H_z(-2,0) = e^{-2} > 0 \ \wedge \ z_{xx}(-2,0) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z(-2,0) = -\frac{2}{e}$ - minimum lokalne właściwe

(4) $z(x,y) = e^{-x} \cdot (x + y^2)\,, \quad z \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} z_x = e^{-x}(1 - x - y^2) = 0 \\ z_y = 2ye^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,0) \text{ - punkt stacjonarny}$$

$z_{xx} = e^{-x}(x + y^2 - 2)\,, \;\; z_{xy} = -2ye^{-x}\,, \;\; z_{yy} = 2e^{-x}$

$\det H_z(x,y) = e^{-2x}(2x - 2y^2 - 4) \Rightarrow \det H_z(1,0) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ brak ekstremum w $(1,0)$. Czyli funkcja z nie ma ekstremów.

Macierze symetryczne

Niech

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych.

Macierze symetryczne

Niech

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych.

Definicja

Macierz A jest symetryczna jeśli $A^T = A$ tzn. dla każdego $i, j = 1, \cdots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$.

Niech

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych.

Definicja

Macierz A jest symetryczna jeśli $A^T = A$ tzn. dla każdego $i, j = 1, \cdots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$.

Przykład: Macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ jest symetryczna.

Macierz Hessego

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $x_0 \in D$ i $f : D \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją pochodne cząstkowe rzędu 2 w x_0.

Macierz Hessego

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $x_0 \in D$ i $f : D \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją pochodne cząstkowe rzędu 2 w x_0.
Macierz Hessego $H_f(x_0)$ funkcji f w x_0 to macierz kwadratowa $n \times n$ wyrazach $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

Macierz Hessego

Definicja

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $x_0 \in D$ i $f : D \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją pochodne cząstkowe rzędu 2 w x_0.
Macierz Hessego $H_f(x_0)$ funkcji f w x_0 to macierz kwadratowa $n \times n$ wyrazach $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

Stwierdzenie

Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe w x_0 do rzędu 2 to macierz Hessego $H_f(x_0)$ funkcji f w x_0 jest symetryczną macierzą $n \times n$.

Minory główne

Niech $1 \leq k \leq n$. Minorem głównym $k \times k$ macierzy kwadratowej A o wymiarach $n \times n$ nazywamy wyznacznik

$$M_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Minory główne

Niech $1 \leq k \leq n$. Minorem głównym $k \times k$ macierzy kwadratowej A o wymiarach $n \times n$ nazywamy wyznacznik

$$M_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Przykład. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w $x_0, y_0)$ do rzędu 2.

Minory główne

Niech $1 \leq k \leq n$. Minorem głównym $k \times k$ macierzy kwadratowej A o wymiarach $n \times n$ nazywamy wyznacznik

$$M_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Przykład. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w $x_0, y_0)$ do rzędu 2.
Minory główne macierzy Hessego funcji f w punkcie (x_0, y_0) czyli macierzy $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ to

$$M_1 = f_{xx}(x_0, y_0),$$

$$M_2 = H_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0).$$

Warunek wystarczający istnienia ekstremum (n dowolne)

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w punkcie stacjonarnym $a \in D$ (czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$).

Warunek wystarczający istnienia ekstremum (n dowolne)

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w punkcie stacjonarnym $a \in D$ (czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$).
Niech M_k będzie minorem głównym $k \times k$ macierzy Hessego $H_f(a)$ funkcji f w a dla $k = 1, \cdots, n$.

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w punkcie stacjonarnym $a \in D$ (czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$).
Niech M_k będzie minorem głównym $k \times k$ macierzy Hessego $H_f(a)$ funkcji f w a dla $k = 1, \cdots, n$.

(a) jeśli $M_k > 0$ dla każdego $k = 1, \cdots, n$ to funkcja f ma minimum właściwe w a,

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w punkcie stacjonarnym $a \in D$ (czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \cdots, n$).
Niech M_k będzie minorem głównym $k \times k$ macierzy Hessego $H_f(a)$ funkcji f w a dla $k = 1, \cdots, n$.

(a) jeśli $M_k > 0$ dla każdego $k = 1, \cdots, n$ to funkcja f ma minimum właściwe w a,

(b) jeśli $(-1)^k M_k > 0$ dla każdego $k = 1, \cdots, n$, to funkcja f ma maksimum właściwe w a.

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3,\ D = \mathbb{R}^3.$

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$, $D = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4(1 - x_i^3) = 0 \iff x_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3,\ D = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4(1 - x_i^3) = 0 \iff x_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ to punkt stacjonarny funkcji f.

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$, $D = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4(1 - x_i^3) = 0 \iff x_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ to punkt stacjonarny funkcji f.

Macierz Hessego f ma postać

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -12x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3,\ D = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4(1 - x_i^3) = 0 \iff x_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ to punkt stacjonarny funkcji f.

Macierz Hessego f ma postać

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -12x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Minory główne tej macierzy w $(1, 1, 1)$ to $M_1 = -12 < 0$,
$M_2 = (12)^2 > 0,\ M_3 = -(12)^3 < 0$.

Przykład

Znaleźć ekstrem lokalne funkcji
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$, $D = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4(1 - x_i^3) = 0 \iff x_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ to punkt stacjonarny funkcji f.

Macierz Hessego f ma postać

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -12x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Minory główne tej macierzy w $(1, 1, 1)$ to $M_1 = -12 < 0$,
$M_2 = (12)^2 > 0$, $M_3 = -(12)^3 < 0$.

Stąd f ma maksimum właściwe w $(1, 1, 1)$ równe $f(1, 1, 1) = 9$.

Uwagi:

(1) Jeśli funkcja jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym, to jest w nim ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy: górny i dolny (tw. Weierstrassa).

Uwagi:

(1) Jeśli funkcja jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym, to jest w nim ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy: górny i dolny (tw. Weierstrassa).

(2) Jeśli funkcja przyjmuje wartość największą lub najmniejszą w punkcie wewnętrznym obszaru i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe, to te pochodne znikają (punkt stacjonarny).

Przykłady:

Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji w zbiorze D

(1) $z(x,y) = (x-y)^2 + xy - x$,

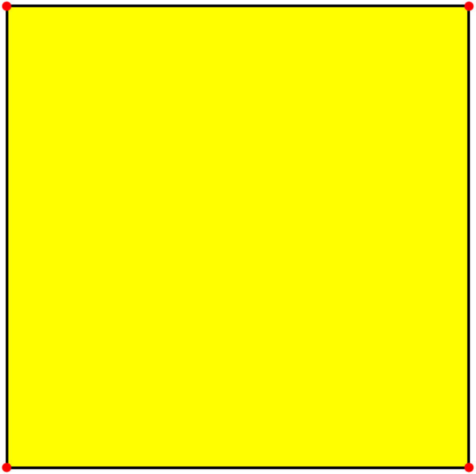
$D = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,

Przykłady:

Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji w zbiorze D

(1) $z(x,y) = (x-y)^2 + xy - x$,

$D = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,



$\operatorname{Int} D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathsf{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \left\{ \begin{array}{c} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{array} \right.$$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathsf{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathsf{Int} D$,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D$, $z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D$, $z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \;\; x \in (0,1),\ y = 0$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D$, $z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \ \ x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathsf{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,
$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$
$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathsf{Int} D$, $z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \ \ x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D,\ z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \ \ x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(\frac{1}{2}, 0) = g_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \left\{ \begin{array}{c} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{array} \right.$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D,\ z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \;\; x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(\frac{1}{2}, 0) = g_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$2^\circ \;\; x \in (0,1),\ y = 1$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D,\ z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \;\ x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(\frac{1}{2}, 0) = g_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$2^\circ \;\ x \in (0,1),\ y = 1$

$x \in (0,1)$,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,
$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$
$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D,\ z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ\ \ x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(\frac{1}{2}, 0) = g_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$2^\circ\ \ x \in (0,1),\ y = 1$

$x \in (0,1),\ g_2(x) = z(x,1) = (x-1)^2$

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D,
$\mathrm{Int} D = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$\partial D = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$,
$D = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$$(x,y) \in \mathrm{Int}\, D \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathrm{Int} D,\ z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.
$(x,y) \in \partial D$:
$1^\circ \quad x \in (0,1),\ y = 0$

$x \in (0,1),\ g_1(x) = z(x,0) = x^2 - x$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(\frac{1}{2}, 0) = g_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$2^\circ \quad x \in (0,1),\ y = 1$

$x \in (0,1),\ g_2(x) = z(x,1) = (x-1)^2$

$g_2'(x) = 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (0,1)$

3° $x = 0,\ y \in (0, 1)$

3° $x = 0,\ y \in (0, 1)$

$y \in (0, 1)$,

3° $x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

3° $x = 0,\ y \in (0, 1)$

$y \in (0, 1),\ g_3(y) = z(0, y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0, 1)$
4° $x = 1,\ y \in (0, 1)$

$3^\circ \quad x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \quad x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),$

3° $x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
4° $x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$3^\circ \quad x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \quad x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$3^\circ\ \ x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ\ \ x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(1, \frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$3^\circ \;\; x = 0,\; y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\; g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \;\; x = 1,\; y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\; g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(1, \frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$z(0,0) = 0,$

$3^\circ \quad x = 0,\ y \in (0, 1)$

$y \in (0, 1),\ g_3(y) = z(0, y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0, 1)$
$4^\circ \quad x = 1,\ y \in (0, 1)$

$y \in (0, 1),\ g_4(y) = z(1, y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0, 1)$

$z(1, \frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$z(0, 0) = 0,\ z(1, 0) = 0,$

$3^\circ \ \ x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \ \ x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(1, \frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$z(0,0) = 0,\ z(1,0) = 0,\ z(0,1) = 1,$

$3^\circ \quad x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \quad x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(1, \frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$z(0,0) = 0,\ z(1,0) = 0,\ z(0,1) = 1,\ z(1,1) = 0.$

$3^\circ \quad x = 0,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_3(y) = z(0,y) = y^2$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,1)$
$4^\circ \quad x = 1,\ y \in (0,1)$

$y \in (0,1),\ g_4(y) = z(1,y) = y^2 - y$

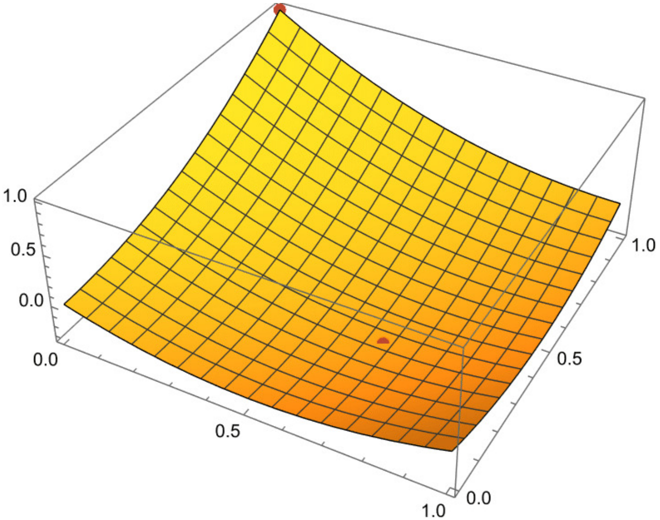
$g_4'(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$z(1,\frac{1}{2}) = g_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

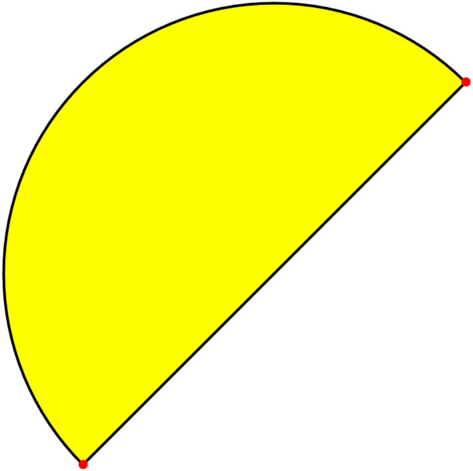
$z(0,0) = 0,\ z(1,0) = 0,\ z(0,1) = 1,\ z(1,1) = 0.$

$$\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, 1\} \Rightarrow \min_{(x,y)\in D} z(x,y) = -\frac{1}{3}, \quad \max_{(x,y)\in D} z(x,y) = 1.$$

$$\min_{(x,y)\in D} z(x,y) = -\frac{1}{3}, \quad \max_{(x,y)\in D} z(x,y) = 1.$$



(2) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^3 - 3y^2$,
$D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leqslant 9 \ \wedge \ y \geqslant x\}$



$(x, y) \in \mathrm{Int}\, D :$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x, y) \in \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\} \Rightarrow (0,2) \in \mathrm{Int}\, D \Rightarrow$
$\Rightarrow f(0,2) = -4$

$$\partial D = \bar{AB} \cup \breve{AB}\,, \quad A = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\,,\; B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{AB}\;:\quad y = x\,,\quad x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g(x) = f(x,x) = 2x^3 - 6x^2\,,\quad x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2) = 0 \quad \wedge \quad x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g(0) = 0\,,\quad g(2) = -8$$

$$\breve{AB}\ :\ \begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5}{4}\pi\right]$$

$$h(\varphi) = f(3\cos\varphi, 3\sin\varphi) = 27(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1)$$

$$h'(\varphi) = 27[3\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) + 3\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi] =$$
$$= \tfrac{81}{2}\sin 2\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) = 0 \ \wedge\ \varphi \in \left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5}{4}\pi\right)$$

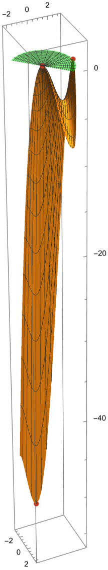
$$\sin 2\varphi = 0 \iff \varphi = k\cdot\tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \tfrac{\pi}{2} \ \vee\ \varphi = \pi$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi \iff \operatorname{tg}\varphi = 1 \iff \varphi = \tfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi \in \emptyset$$

$$h\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad h(\pi) = -54$$

$$f\left(-\tfrac{3}{\sqrt{2}}, -\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = -27\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad f\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}, \tfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = 27\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$
$$\left\{-4, 0, -8, -27\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), 27\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right), -54\right\} \Rightarrow$$
$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -54, \quad \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 0$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -54\,, \quad \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 0$$



(3)

$z(x,y) = x^2 - y^2 + 2x\,,\quad D = \{(x,y)\,:\, x^2+2x+y^2-y \leqslant \frac{11}{4}\}\,,$

$\mathrm{Int}\, D:$

$$\begin{cases} z_x = 2x+2 = 0 \\ z_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-1,0) \in \mathrm{Int}\, D$$

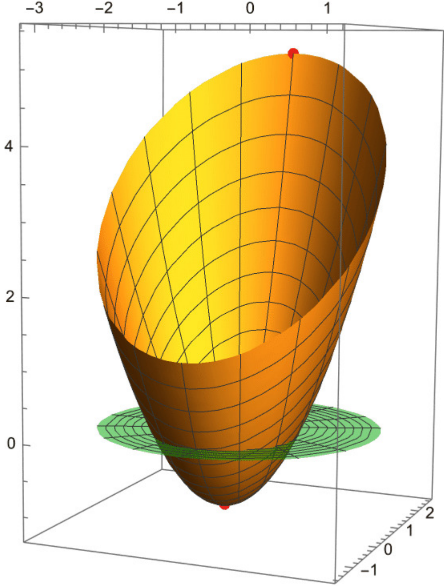
$z(-1,0) = -1$

$\partial D\,:\, x^2+2x+y^2-y = \frac{11}{4} \iff (x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 4 \iff$
$x = -1 + 2\cos(t),\ y = \frac{1}{2} + 2\sin(t),\ t \in [0, 2\pi]$

$g(t) = z(-1+2\cos(t), \frac{1}{2}+2\sin(t)) = \frac{13}{4} + 2\sin(t)$
$g'(t) = 2\cos(t) = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2}\ \vee\ t = \frac{3}{2}\pi\right).$
$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{21}{4},\ g(\frac{3}{2}\pi) = \frac{5}{4}$

$$\{-1, \frac{13}{4}, \frac{5}{4}\} \Rightarrow \min_{(x,y)\in D} z(x,y) = -1\,,\quad \max_{(x,y)\in D} z(x,y) = \frac{21}{4}$$

$$\min_{(x,y)\in D} z(x,y) = -1\,, \quad \max_{(x,y)\in D} z(x,y) = \frac{21}{4}$$



Funkcje uwikłane

$F(x, y)$ - funkcja określona w pewnym obszarze.

Definicja

Jeśli istnieje funkcja $y = f(x)$ spełniająca $\forall\, x \in X$ warunek $F[x, f(x)] = 0$, to nazywamy ją *funkcją uwikłaną* określoną w zbiorze X równaniem $F(x, y) = 0$.

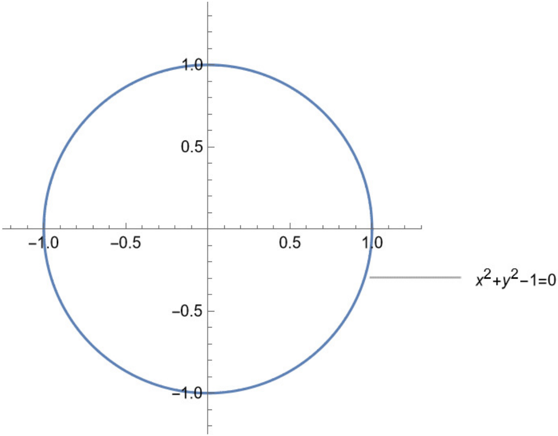
Inaczej: $y = f(x)$ - funkcja określona w sposób uwikłany równaniem $F(x, y) = 0$.

Przykłady funkcji uwikłanych

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Przykłady funkcji uwikłanych

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$



Przykłady funkcji uwikłanych

(1) Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo

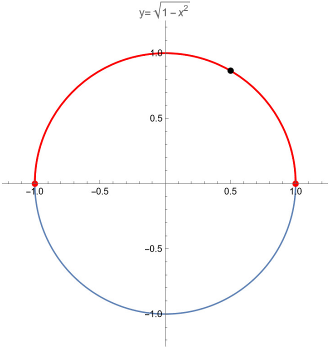
Przykłady funkcji uwikłanych

(1) Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo
$\forall\, x \in [-1, 1] \quad x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$

Przykłady funkcji uwikłanych

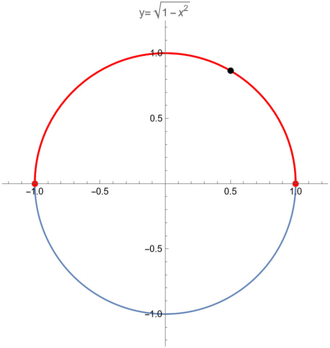
(1) Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo
$\forall\, x \in [-1, 1] \quad x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$

(1) Funkcja $y = \sqrt{1-x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$



Przykłady funkcji uwikłanych

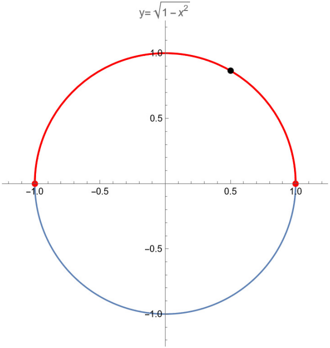
(1) Funkcja $y = \sqrt{1-x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$



Nie jest to jedyna funkcja uwikłana.

Przykłady funkcji uwikłanych

(1) Funkcja $y = \sqrt{1-x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$



Nie jest to jedyna funkcja uwikłana. Ale jeśli wybierzemy punkt np. $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ taki, że $F(x_0, y_0) = 0$ wtedy jest to jedyna funkcja ciągła o dziedzinie $[-1,1]$ taka, że $y_0 = f(x_0)$.

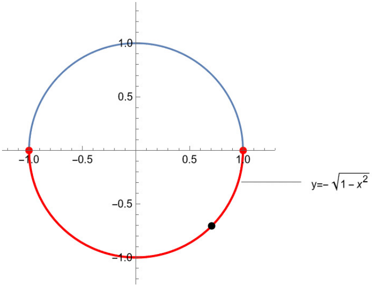
Przykłady funkcji uwikłanych

Funkcja $y = -\sqrt{1-x^2}$ jest również funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo

Przykłady funkcji uwikłanych

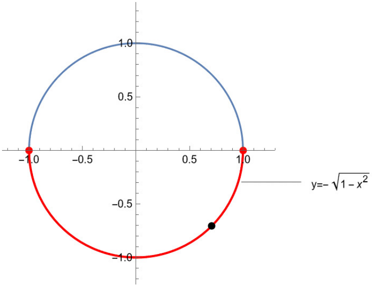
Funkcja $y = -\sqrt{1-x^2}$ jest również funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$

Funkcja $y = -\sqrt{1-x^2}$ jest również funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2+y^2-1=0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$



Przykłady funkcji uwikłanych

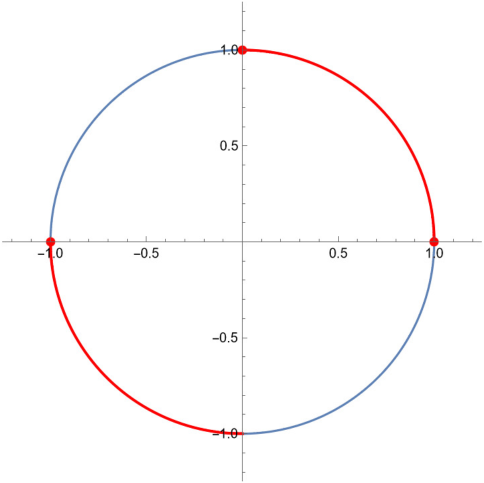
Funkcja $y = -\sqrt{1-x^2}$ jest również funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo
$\forall\, x \in [-1,1] \quad x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$



Ale jej wykres nie zawiera punktu $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Przechodzi zaś np. przez punkt $(x_1, y_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

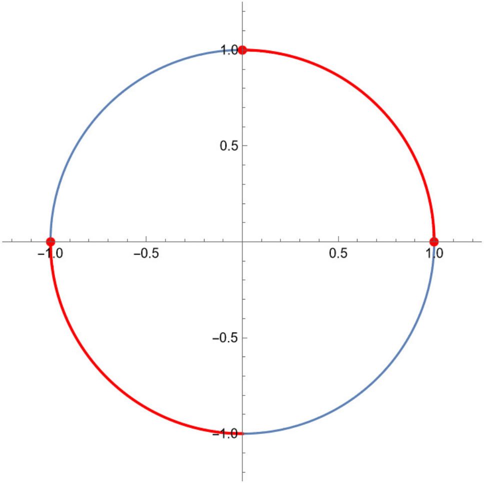
Przykłady funkcji uwikłanych

Jest nieskończenie wiele funkcji uwikłanych $y = f(x)$ określonych równaniem $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Na przykład



Przykłady funkcji uwikłanych

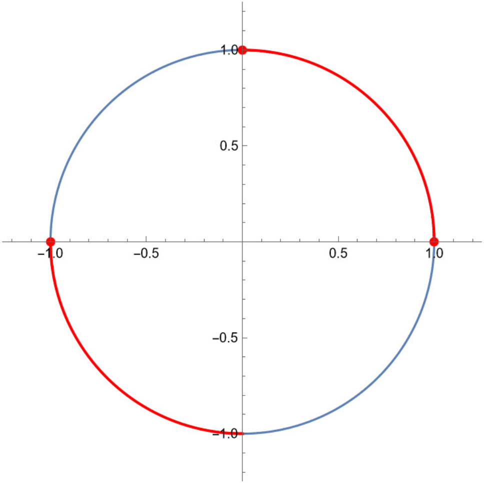
Jest nieskończenie wiele funkcji uwikłanych $y = f(x)$ określonych równaniem $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Na przykład



Zauważmy, że ta funkcja nie jest ciągła

Przykłady funkcji uwikłanych

Jest nieskończenie wiele funkcji uwikłanych $y = f(x)$ określonych równaniem $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Na przykład



Zauważmy, że ta funkcja nie jest ciągła w punkcie 0.

Przykłady funkcji uwikłanych

Wybierzmy punkt $(x_2, y_2) = (1, 0)$. Wtedy $F(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Nie istnieje funkcja ciągła postaci $y = f(x)$, której wykres zarierałby wszystkie punkty (x, y) spełniające $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z pewnego otoczenia punktu $(1, 0)$.

Przykłady funkcji uwikłanych

Wybierzmy punkt $(x_2, y_2) = (1, 0)$. Wtedy $F(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Nie istnieje funkcja ciągła postaci $y = f(x)$, której wykres zarierałby wszystkie punkty (x, y) spełniające $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z pewnego otoczenia punktu $(1, 0)$. Ale funkcja $x = \sqrt{1 - y^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

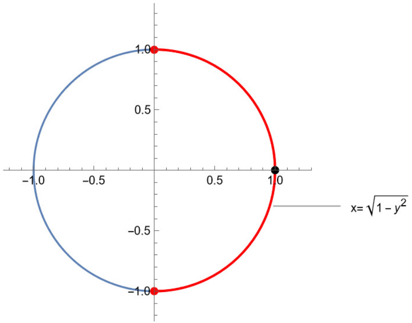
Przykłady funkcji uwikłanych

Wybierzmy punkt $(x_2, y_2) = (1, 0)$. Wtedy $F(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Nie istnieje funkcja ciągła postaci $y = f(x)$, której wykres zarierałby wszystkie punkty (x, y) spełniające $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z pewnego otoczenia punktu $(1, 0)$. Ale funkcja $x = \sqrt{1 - y^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$\forall\, y \in [-1, 1] \quad (\sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 - 1 = 0$

Wybierzmy punkt $(x_2, y_2) = (1, 0)$. Wtedy $F(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Nie istnieje funkcja ciągła postaci $y = f(x)$, której wykres zarierałby wszystkie punkty (x, y) spełniające $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z pewnego otoczenia punktu $(1, 0)$. Ale funkcja $x = \sqrt{1 - y^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$\forall\, y \in [-1, 1] \quad (\sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 - 1 = 0$



Przykłady funkcji uwikłanych

Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej,

Przykłady funkcji uwikłanych

Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej, bo $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$, więc nie ma punktow spełniających to równanie.

Przykłady funkcji uwikłanych

Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej, bo $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$, więc nie ma punktow spełniających to równanie.

Równanie $y - x^2 = 0$ określa dokładnie jedną funkcję (uwikłaną) $y = f(x)$ o dziedzinie $D_f = \mathbb{R}$.

Przykłady funkcji uwikłanych

Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej, bo $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$, więc nie ma punktow spełniających to równanie.

Równanie $y - x^2 = 0$ określa dokładnie jedną funkcję (uwikłaną) $y = f(x)$ o dziedzinie $D_f = \mathbb{R}$. Jest to funkcja $y = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie o funcji uwikłanej

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem otwartym oraz $(x_0, y_0) \in D$. Jeśli $F : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \mathrm{i} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje dokładnie jedna funkcja klasy C^1 uwikłana $y = f(x)$ określona w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za pomocą równania $F(x, y) = 0$ i spełniająca warunek $f(x_0) = y_0$.

Twierdzenie o funcji uwikłanej

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem otwartym oraz $(x_0, y_0) \in D$. Jeśli $F : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje dokładnie jedna funkcja klasy C^1 uwikłana $y = f(x)$ określona w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za pomocą równania $F(x, y) = 0$ i spełniająca warunek $f(x_0) = y_0$. Pochodna funkcji f wynosi

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \tag{6}$$

Twierdzenie o funcji uwikłanej

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem otwartym oraz $(x_0, y_0) \in D$. Jeśli $F : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje dokładnie jedna funkcja klasy C^1 uwikłana $y = f(x)$ określona w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za pomocą równania $F(x, y) = 0$ i spełniająca warunek $f(x_0) = y_0$. Pochodna funkcji f wynosi

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \tag{6}$$

Jeśli F jest funkcją klasy C^2 to $y = f(x)$ jest funkcją klasy C^2 oraz

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

Dowód wzoru na pochodne funkcji uwikłanej

Różniczkując po x równanie $F(x, f(x)) = 0$ otrzymujemy

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0. \tag{7}$$

Ale $y = f(x)$. Stąd otrzymujemy (6).

Dowód wzoru na pochodne funkcji uwikłanej

Różniczkując po x równanie $F(x, f(x)) = 0$ otrzymujemy

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0. \tag{7}$$

Ale $y = f(x)$. Stąd otrzymujemy (6).
Załóżmy, że F jest klasy C^2 Różniczkując po x równanie (7) otrzymujemy $F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F_y(x, f(x))f''(x) = 0$.

Dowód wzoru na pochodne funkcji uwikłanej

Różniczkując po x równanie $F(x, f(x)) = 0$ otrzymujemy

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0. \tag{7}$$

Ale $y = f(x)$. Stąd otrzymujemy (6).
Załóżmy, że F jest klasy C^2 Różniczkując po x równanie (7) otrzymujemy $F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F_y(x, f(x))f''(x) = 0$. Podstawiamy do ostatniego wzoru $y = f(x)$ i $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ otrzymujemy

$$F_{xx} - 2F_{xy}\frac{F_x}{F_y} + F_{yy}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)^2 + F_y f''(x) = 0.$$

Dowód wzoru na pochodne funkcji uwikłanej

Różniczkując po x równanie $F(x, f(x)) = 0$ otrzymujemy

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0. \tag{7}$$

Ale $y = f(x)$. Stąd otrzymujemy (6).
Załóżmy, że F jest klasy C^2 Różniczkując po x równanie (7) otrzymujemy $F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F_y(x, f(x))f''(x) = 0$. Podstawiamy do ostatniego wzoru $y = f(x)$ i $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ otrzymujemy

$$F_{xx} - 2F_{xy}\frac{F_x}{F_y} + F_{yy}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)^2 + F_y f''(x) = 0.$$

Następnie mnożymy ostatnie równanie przez $(F_y)^2$ i wyliczamy $f''(x)$ co kończy dowód. $\square$

Przykład

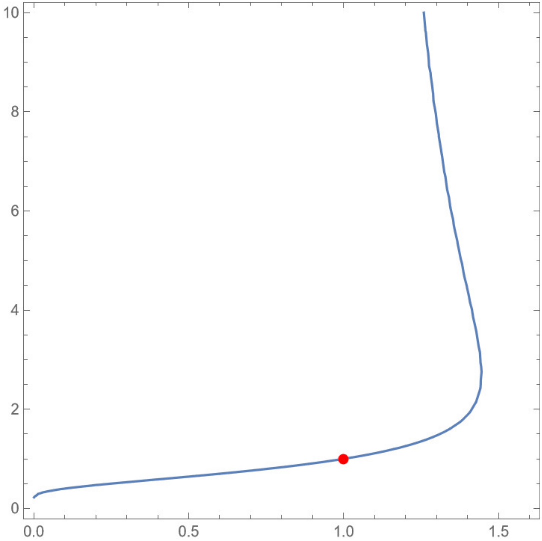
$$F(x,y) = x^y - y,\ D = (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

Przykład

$F(x,y) = x^y - y,\ D = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
Pochodne cząstkowe $F_x(x,y) = yx^{y-1}$, $F_y(x,y) = x^y \ln x - 1$ są ciągłe.
Punkt $(1,1) \in D$, $F(1,1) = 0$, $F_y(1,1) = -1 \neq 0$.

Istnieje funkcja uwikłana klasy C^1 $y = f(x)$ dla $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ dana równaniem $x^y - y = 0$ i spełniająca warunek $f(1) = 1$.
Dodatkowo $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{yx^{y-1}}{x^y \ln x - 1}$.
Stąd $f'(1) = 1$.

$$x^y - y = 0$$



Zbadać ekstrema funkcji uwikłanych $y = f(x)$ określonych równaniem

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Niech $y = f(x)$. Wtedy $f'(x) = 0 \iff F_x(x, y) = 0$.
$F_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \iff y = x^2$. Wtedy $F(x, x^2) = x^3 + x^6 - 3x^3 = 0 \iff x^3(x^3 - 2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}$.
$F_y(x, y) = 3y^2 - 3x$.
$x = 0 \Rightarrow y = 0$. $F_y(0, 0) = 0$. Stąd nie są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej w $(0, 0)$.
$x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$. $F_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 3\sqrt[3]{2} \neq 0$. Funkcję $F(x, y) = 0$ można rozwikłać ze względu na y w otoczeniu punktu $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ oraz $f'(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Policzmy $f''(\sqrt[3]{2})$. Różniczkując po x równanie $F(x, f(x)) = x^3 + (f(x))^3 - 3xf(x) = 0$ otrzymujemy $3x^2 + 3(f(x))^2 f'(x) - 3f(x) - 3xf'(x) = 0$. Różniczkując powtornie po x otrzymujemy $6x + 6f(x)(f'(x))^2 + 3(f(x))^2 f''(x) - 3f'(x) - 3f'(x) - 3xf''(x) = 0$. Podstawiając $x = \sqrt[3]{2}$, $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$ oraz $f'(\sqrt[3]{2}) = 0$ otrzymujemy $f''(\sqrt[3]{2}) = -2 < 0$. Stąd funkcja uwikłana $y = f(x)$ ma maksimum lokalne w punkcie $x = \sqrt[3]{2}$ równe $y = \sqrt[3]{4}$.

Liść Kartezjusza

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$