# Analiza, Szeregi liczbowe, potęgowe, Fouriera

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

# Definicja szeregu liczbowego

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg liczb rzeczywistych.

Definiujemy nowy ciąg - *ciąg sum częściowych* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$
\begin{gathered}
S_1 = a_1 \\
\vdots \\
S_n = a_1 + \ldots + a_n \\
\vdots
\end{gathered}
$$

# Definicja szeregu liczbowego

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg liczb rzeczywistych.

Definiujemy nowy ciąg - *ciąg sum częściowych* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_1 = a_1$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$
$$\vdots$$

## Definicja

Ciąg liczbowy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazie ogólnym $a_n$ i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.
2. Niech $a_n = (-1)^n$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.
2. Niech $a_n = (-1)^n$ dla $n \in N$. Wtedy
   $$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$
3. Niech $a, r \in \mathbb{R}$, $a_n = a + nr$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a + (n+1)r}{2} n$ dla $n \in N$.

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.
2. Niech $a_n = (-1)^n$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$
3. Niech $a, r \in \mathbb{R}$, $a_n = a + nr$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a + (n+1)r}{2} n$ dla $n \in N$.
4. Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \quad \text{dla } n \in N.$$

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.
2. Niech $a_n = (-1)^n$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$
3. Niech $a, r \in \mathbb{R}$, $a_n = a + nr$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a + (n+1)r}{2} n$ dla $n \in N$.
4. Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \quad \text{dla } n \in N.$$
5. Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$ dla $n \in N$.

# Przykłady

1. Niech $a_n = 1$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = n$ dla $n \in N$.
2. Niech $a_n = (-1)^n$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$
3. Niech $a, r \in \mathbb{R}$, $a_n = a + nr$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n = \frac{2a+(n+1)r}{2}n$ dla $n \in N$.
4. Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy
$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \quad \text{dla } n \in N.$$
5. Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$ dla $n \in N$.
6. Niech $a_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in N$. Wtedy $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ dla $n \in N$.

# Suma szeregu

## Definicja

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

W przeciwnym przypadku szereg jest *rozbieżny*.
Liczbę $S$ nazywamy *sumą szeregu* zbieżnego i oznaczamy

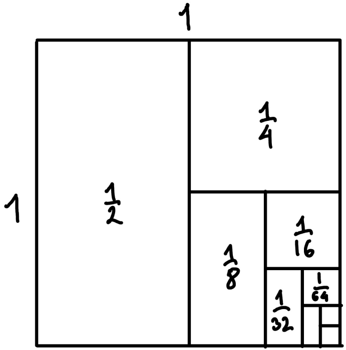
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

# Przykłady

Niech $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

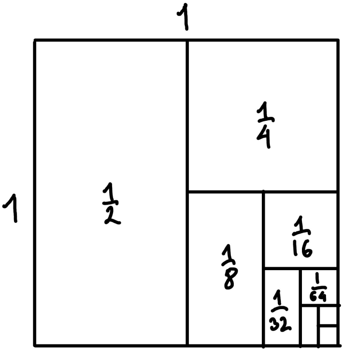
# Przykłady

Niech $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.



# Przykłady

Niech $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.




$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

# Przykłady

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ jest rozbieżny, bo
$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$ i ciąg $(S_n)$ nie jest zbieżny
(granica nie istnieje).

# Warunek konieczny zbieżności szegu

**Twierdzenie**

Jezeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

# Warunek konieczny zbieżności szegu

**Twierdzenie**

Jezeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n = S \;\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S$.

Stąd $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) =$
$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. Więc $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$
czyli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

# Suma szeregu geometrycznego

Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy

$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } n \in N.$$

# Suma szeregu geometrycznego

Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy

$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } n \in N.$$

Załóżmy, że $a \neq 0$. W przeciwnym przypadku $a_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

# Suma szeregu geometrycznego

Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy

$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } n \in N.$$

Załóżmy, że $a \neq 0$. W przeciwnym przypadku $a_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Dla $|q| < 1$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, bo $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (dla $|q| < 1$).

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$ dla $|q| < 1$.

# Suma szeregu geometrycznego

Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $a_n = aq^{n-1}$ dla $n \in N$. Wtedy

$$S_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ an & q = 1 \end{cases} \quad \text{dla } n \in N.$$

Załóżmy, że $a \neq 0$. W przeciwnym przypadku $a_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Dla $|q| < 1$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, bo $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (dla $|q| < 1$).

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$ dla $|q| < 1$.

Dla $|q| \geq 1$ ciąg $|a_n| = |aq^{n-1}| \geq |a|$ dla $n \in \mathbb{N}$. Więc ciąg $(a_n)$ nie jest zbieżny do 0.

Szereg jest więc rozbieżny dla $|q| \geq 1$.

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Nazywa się hamoniczny, bo $a_n$ jest średnią harmoniczną $a_{n-1}$ i $a_{n+1}$ czyli $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}$.

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Nazywa się hamoniczny, bo $a_n$ jest średnią harmoniczną $a_{n-1}$ i $a_{n+1}$ czyli $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}$.
Warunek konieczny jest spełniony, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Nazywa się hamoniczny, bo $a_n$ jest średnią harmoniczną $a_{n-1}$ i $a_{n+1}$ czyli $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}$.

Warunek konieczny jest spełniony, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$S_{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq$$
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} =$$
$$1 + \sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2} = 1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}.$$

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Nazywa się hamoniczny, bo $a_n$ jest średnią harmoniczną $a_{n-1}$ i $a_{n+1}$ czyli $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}$.

Warunek konieczny jest spełniony, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$S_{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} =$
$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq$
$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} =$
$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \dots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} =$
$1 + \sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2} = 1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}$.

Stąd $\lim_{k\to\infty} S_{2^{k+1}} \geq \lim_{k\to\infty} \left(1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}\right) = +\infty$.

# Rozbieżność szeregu harmonicznego

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Nazywa się hamoniczny, bo $a_n$ jest średnią harmoniczną $a_{n-1}$ i $a_{n+1}$ czyli $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}$.

Warunek konieczny jest spełniony, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$S_{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} =$
$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq$
$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} =$
$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} =$
$1 + \sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2} = 1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}$.

Stąd $\lim_{k\to\infty} S_{2^{k+1}} \geq \lim_{k\to\infty} \left(1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}\right) = +\infty$.

Więc szereg harmoniczny jest rozbieżny.
$S_{10} \simeq 2,92897$, $S_{10^2} \simeq 5,18738$, $S_{10^3} \simeq 7,48547$,
$S_{10^4} \simeq 9,78761$, $S_{10^5} \simeq 12,0901$, $S_{10^6} \simeq 14,3927$,
$S_{10^7} \simeq 16,6953$.

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} + \cdots \leq$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + 2\frac{1}{2^2} + \left(4 \cdot \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} + \cdots \leq$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + 2\frac{1}{2^2} + \left(4 \cdot \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Ciąg sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ jest ograniczony z góry i rosnący więc jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} + \cdots \leq$
$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + 2\frac{1}{2^2} + \left(4 \cdot \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Ciąg sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ jest ograniczony z góry i rosnący więc jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Leonhard Euler w 1735 roku pokazał, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (problem bazylejski).

Policzyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Policzyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

Policzyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1
\end{aligned}
$$

Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

# Działania na szeregach zbieżnych

## Twierdzenie

Jeśli $c \in \mathbb{R}$ i szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n)$ są zbieżne oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Załóżmy, że $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

**Twierdzenie**

Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny $\iff$ jego ciąg sum częściowych $(S_n)$ jest ograniczony z góry.

Dowód. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$. Wtedy ciąg $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest ciągiem niemalejącym, bo $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$. Ciąg niemalejący jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z góry.$\square$

# Kryterium porównawcze

**Twierdzenie**

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n > n_0$, to:

(1) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Dowód. (1) Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Wtedy $\sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Więc ciąg $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ jest ograniczony. Na podstawie poprzedniego twiedzenia szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

# Kryterium porównawcze

**Twierdzenie**

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n > n_0$, to:

(1) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Dowód. (1) Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Wtedy $\sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Więc ciąg $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ jest ograniczony. Na podstawie poprzedniego twiedzenia szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(2) Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Stąd wynika z poprzedniego twierdzenia, że ciąg $\sum_{k=1}^{n} a_k$ jest nieograniczony oraz ciąg $\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k$ jest nieograniczony. Wtedy $\sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$. Więc ciąg $\sum_{k=1}^{n} b_k$ jest nieograniczony. Stąd na podstawie poprzedniego twierdzenia szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny. $\square$

# Przykład

Zbadać zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x$, dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Wtedy $\sin \frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \geqslant 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

# Przykład

Zbadać zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x$, dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Wtedy $\sin \frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \geqslant 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

$\sin x \leqslant x$, dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Wtedy $0 \leq \sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów

**Twierdzenie**

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli $a_n > 0$ i $b_n > 0$ dla każdego $n > n_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ dla $k \in (0, \infty)$ to
szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów

**Twierdzenie**

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli $a_n > 0$ i $b_n > 0$ dla każdego $n > n_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ dla $k \in (0, \infty)$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ więc istnieje $n_1 > n_0$ takie, że $\forall n > n_1 \ \frac{a_n}{b_n} > \frac{k}{2}$. Stąd $\forall n > n_1 \ b_n < \frac{2}{k} a_n$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{k} a_n$ jest zbieżny więc z kryterium porównaczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów

**Twierdzenie**

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$. Jeśli $a_n > 0$ i $b_n > 0$ dla każdego $n > n_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ dla $k \in (0, \infty)$ to
szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ więc istnieje $n_1 > n_0$ takie, że $\forall n > n_1$ $\frac{a_n}{b_n} > \frac{k}{2}$. Stąd $\forall n > n_1$ $b_n < \frac{2}{k} a_n$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{k} a_n$ jest zbieżny więc z kryterium porównaczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Założny, że $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ więc istnieje $n_1 > n_0$ takie, że $\forall n > n_1$ $\frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} k$. Stąd $\forall n > n_1$ $a_n < \frac{3}{2} k b_n$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} k b_n$ jest zbieżny więc z kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. $\square$

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów - przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów - przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$.

Niech $a_n = \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$ i $b_n = \frac{1}{n^2}$.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów - przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$.

Niech $a_n = \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$ i $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n^2+1)}{7n^4+n^3+3n+2} = \frac{2}{7}$.

# Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów - przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$.

Niech $a_n = \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$ i $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n^2+1)}{7n^4+n^3+3n+2} = \frac{2}{7}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{7n^4+n^3+3n+2}$ jest zbieżny.

# Kryterium całkowe zbieżności szeregów

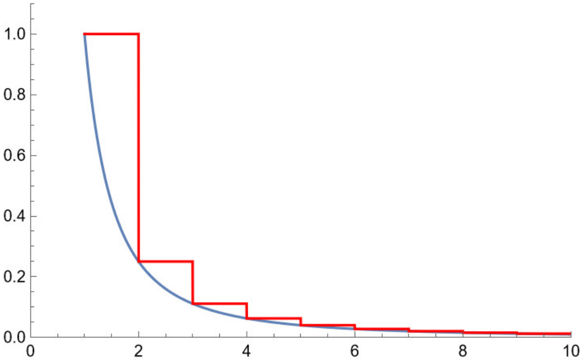
## Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(x)$ jest nierosnąca i nieujemna w przedziale $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, to całka $\int_m^\infty f(x)\,dx$ i szereg $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

# Kryterium całkowe zbieżności szeregów

**Twierdzenie**

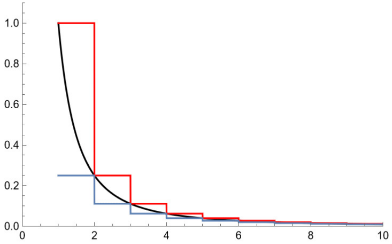
Jeśli funkcja $f(x)$ jest nierosnąca i nieujemna w przedziale $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, to całka $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ i szereg $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.



# Kryterium całkowe zbieżności szeregów - dowód

Aby pokazać zbieżność szergu wystarczy pokazać, że ciąg sum częściowych jest ograniczony. Aby pokazać zbieżność całki trzeba pokazać, że jest ograniczona. Ponieważ funkcja jest nierosnąca więc

$$f(m+1) + f(m+2) + \cdots \leq \int_m^{\infty} f(x)dx \leq f(m) + f(m+1) + \cdots$$




Co końcy dowód. $\square$

# Kryterium całkowe zbieżności szeregów - przykład

Zbadać zbieżność szeregu Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ , $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ , $\quad x \in [1, +\infty), \quad f(x) > 0$

$f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ – zbieżna dla $\alpha > 1$, rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.

# Kryterium d'Alemberta

## Twierdzenie

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: (1) Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \in [0,1)$ więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $r \in (g,1)$ takie, że dla każdego $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. Stąd otrzymujemy, że $\forall n \geq n_0 \;\; a_{n+1} < a_n r$. Więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a_{n_0+k} < a_{n_0+k-1} r < a_{n_0+k-2} r^2 < \cdots < a_{n_0} r^k$. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} r^k$ jest zbiezny, bo to szereg geometryczny i $r \in (0,1)$. Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Więc zbieżny jest również szereg
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{n_0} a_n$.

# Kryterium d'Alemberta

## Twierdzenie

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: (1) Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \in [0,1)$ więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $r \in (g,1)$ takie, że dla każdego $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. Stąd otrzymujemy, że $\forall n \geq n_0 \;\; a_{n+1} < a_n r$. Więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a_{n_0+k} < a_{n_0+k-1} r < a_{n_0+k-2} r^2 < \cdots < a_{n_0} r^k$. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} r^k$ jest zbiezny, bo to szereg geometryczny i $r \in (0,1)$. Z kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Więc zbieżny jest również szereg
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{n_0} a_n$.
(2) Jeżeli $g > 1$ to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $r \in (1,g)$ takie, że dla każdego $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$. Otrzymujemy więc, że $a_{n+1} > a_n r$ dla $n \geq n_0$. I dalej postępujemy podobnie. $\square$

# Kryterium Cauchy'ego

**Twierdzenie**

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Analogicznie jak w dowodzie kryterium d'Alemberta. Tylko zastępujemy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ przez $\sqrt[n]{a_n}$. Więc jeśli np. $\sqrt[n]{a_n} < r$ dla $n \geq n_0$ to $a_n < r^n$ dla $n \geq n_0$.

□

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.
Przykłady.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.
Przykłady.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.

Przykłady.

(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.
Przykłady.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.
Przykłady.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.
Przykłady.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.
(1)Niech $a_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$.

Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze niż kryterium d'Alemberta, tzn. jeśli szereg o wyrazach dodatnich spełnia warunek z kryterium d'Alemberta, to spełnia też warunek kryterium Cauchy'ego.
Istotnie, jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ to korzystając z tej samej argumentacji co w dowodzie kryterium d'Alemberta pokazujemy, że

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \mathbb{N}\ a_{n_0}(g-\varepsilon)^k < a_{n_0+k} < a_{n_0}(g+\varepsilon)^k.$$

Stąd $(a_{n_0})^{\frac{1}{n_0+k}}(g-\varepsilon)^{\frac{k}{n_0+k}} < (a_{n_0+k})^{\frac{1}{n_0+k}} < (a_{n_0})^{\frac{1}{n_0+k}}(g+\varepsilon)^{\frac{k}{n_0+k}}$.
Przechodząc do granicy $k \to \infty$ otrzymujemy

$$\forall \varepsilon > 0\ g-\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} (a_{n_0+k})^{\frac{1}{n_0+k}} \leq g+\varepsilon$$

. Stąd $\lim_{k\to\infty}(a_k)^{\frac{1}{k}} = g$.

Przeciwna implikacja nie zachodzi. Rozpatrzmy szereg
$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$ czyli
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{4^n}$.
Wtedy $\lim_{n\to\infty}(a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{\frac{n}{2n}}} = \frac{1}{2}$ oraz
$\lim_{n\to\infty}(a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{\frac{n}{2n-1}}} = \frac{1}{2}$.
Stąd $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Więc szereg jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.
A granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje, bo dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1$ oraz $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{4}$.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2<1\Rightarrow$ szereg zbieżny.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{arctg}\,(\cos\frac{1}{n})]^{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}[\mathrm{arctg}\,(\cos\frac{1}{n})]^2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2<1\Rightarrow$ szereg zbieżny.

(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{3(n+1)}(2n-5)!}{(2(n+1)-5)!7^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^3}{(2n-4)(2n-3)}=0<1\Rightarrow$ szereg zbieżny.

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \;\; a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

## Szeregi o wyrazach dowolnych

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \;\; a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

**Tw. (kryterium Leibniza)**

Jeśli $(a_n)$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

**Tw. (kryterium Leibniza)**

Jeśli $(a_n)$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Dowód: Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a_k - a_{k+1} \geq 0$, więc
$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0$ i ciąg $S_{2n}$ jest niemalejący.
Natomiast ciąg
$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq a_1$ i jest nierosnący.
$S_{2n} \leq S_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n+1} \leq a_1$. Więc ciąg $S_{2n}$ jest niemalejący i ograniczony z góry więc zbieżny.
$S_{2n+1} \geq S_{2n} \geq 0$. Więc ciąg $S_{2n+1}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu więc zbieżny.
$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ więc ciągi $S_{2n}$ i $S_{2n+1}$ zbiegają do tej samej granicy. Stąd $S_n$ jest zbieżny $\square$

Przykład:

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$, obliczyć przybliżoną wartość jego sumy z dokładnością do $0,01$.

Ciąg $(a_n)$ jest malejący, bo $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc szereg jest zbieżny.

Szukamy $n$ takiego, że $|a_n| \leqslant \frac{1}{100} \Rightarrow n^3 + 1 \geqslant 100$.

Zachodzi to dla $n = 5$, $(126 \geqslant 100)$, stąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0,41$$

# Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Definicja**

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

# Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Definicja**

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

Przykład:

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny warunkowo, bo jest zbieżny z kryterium Leibniza i szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

# Zbieżność bezwzględna i warunkowa

## Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

Przykład:

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny warunkowo, bo jest zbieżny z kryterium Leibniza i szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie, bo jest zbieżny z kryterium Leibniza i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny

# Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Twierdzenie**

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

# Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Twierdzenie**

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Dowód: Podzielmy wyrazy szeregu na nieujemne i ujemne. Niech $b_n = \max\{a_n, 0\}$ oraz $c_n = \min\{a_n, 0\}$. Wtedy $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{i=1}^{\infty}(-c_n)$. Oba szeregi są szeregami o wyrazach nieujemnych i są zbieżne, bo są ograniczone przez szereg zbieżny $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|$. Ale skoro tak to szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{i=1}^{\infty}(-c_n)$ też jest zbieżny jako różnica szeregów zbieżnych. $\square$

# Szeregi potęgowe

## Definicja

Szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o wyrazie ogólnym

$$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to szereg jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

**Definicja**

Szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o wyrazie ogólnym

$$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to szereg jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Uwaga:

Szereg potęgowy jest zawsze zbieżny w swoim środku $x = x_0$, bo wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-x_0)^n = a_0$.

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

Dowód: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$.

# Zbieżność szeregów potęgowych

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

Dowód: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$. Stąd ciąg jest ograniczony czyli $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n b^n| \leq M$.

# Zbieżność szeregów potęgowych

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

Dowód: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$. Stąd ciąg jest ograniczony czyli $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n b^n| \leq M$. Niech $x \in (-|b|, |b|)$. Wtedy $|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{b}\right|^n$ i $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$.

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

Dowód: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$.
Stąd ciąg jest ograniczony czyli $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n b^n| \leq M$.
Niech $x \in (-|b|, |b|)$. Wtedy $|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{b}\right|^n$ i $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$.
Więc szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{b}\right|^n$ jest zbieżny.

**Twierdzenie**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x = b \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in (-|b|, |b|)$.

Dowód: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$.
Stąd ciąg jest ograniczony czyli $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n b^n| \leq M$.
Niech $x \in (-|b|, |b|)$. Wtedy $|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{b}\right|^n$ i $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$.
Więc szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{b}\right|^n$ jest zbieżny.
Stąd szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ jest zbieżny bezwzględnie. □

**Definicja**

*Promień zbieżności* to liczba

$$R = \sup\{|x| : \text{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny}\}$$

*Przedział zbieżności* to zbiór

$$X = \{x \in \mathbb{R} : \text{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny}\}$$

## Uwaga

Jeśli promień zbieżności:

(1) $R = 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$,

(2) $R = +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

(3) $0 < R < +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $(-R, R)$ i jest rozbieżny w $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

## Uwaga

Jeśli promień zbieżności:

(1) $R = 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$,

(2) $R = +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

(3) $0 < R < +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $(-R, R)$ i jest rozbieżny w $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

## Twierdzenie

Jeśli promień zbieżności $R > 0$, to suma szeregu $S(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n$ jest funkcją ciągłą w $(-R, R)$.

### Twierdzenie

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ lub $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, to promień zbieżności $R$ jest równy:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < +\infty \\ 0, & \lambda = +\infty \\ +\infty, & \lambda = 0 \end{cases}$$

## Twierdzenie

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ lub $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, to promień zbieżności $R$ jest równy:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < +\infty \\ 0, & \lambda = +\infty \\ +\infty, & \lambda = 0 \end{cases}$$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = +\infty \Rightarrow X = \mathbb{R}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \,, \quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n\,, \quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}\,, \quad a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow (-2, 2) \subset X$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ , $\quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$ , $\quad a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow (-2, 2) \subset X$

$x = 2:$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – szereg harmoniczny (rozbieżny)

$x = -2:$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – szereg anharmoniczny (zbieżny)

$\Rightarrow X = [-2, 2)$

## Twierdzenie

Jeśli promień zbieżności $R > 0$ i $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-R, R)$, to $\forall\, x \in (-R, R)$ prawdziwe są równości:

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

przy czym promienie zbieżności szeregów po prawej stronie są równe $R$.

Przykład:

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\;R = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\;R = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$,
$x \in (-1, 1)$

$x = \frac{1}{2}$ : $\;\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{(\frac{1}{2})^3} = 16$

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.

# Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.
$n \in \mathbb{N}$ – dowolne, ustalone, wtedy ze wzoru Taylora istnieje $c \in (x, x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Niech $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$.

# Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.

$n \in \mathbb{N}$ – dowolne, ustalone, wtedy ze wzoru Taylora istnieje $c \in (x, x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Niech $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$.

Przejdźmy do granicy $n \to \infty$.

# Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.
$n \in \mathbb{N}$ – dowolne, ustalone, wtedy ze wzoru Taylora istnieje $c \in (x, x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Niech $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$.

Przejdźmy do granicy $n \to \infty$.

Jeśli w $Q(x_0, r)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, to *szereg Taylora* funkcji $f$ w otoczeniu punktu $x_0$ zadany jest wzorem:

# Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.
$n \in \mathbb{N}$ – dowolne, ustalone, wtedy ze wzoru Taylora istnieje $c \in (x, x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Niech $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$.

Przejdźmy do granicy $n \to \infty$.

Jeśli w $Q(x_0, r)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, to *szereg Taylora* funkcji $f$ w otoczeniu punktu $x_0$ zadany jest wzorem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

# Szereg Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$, to otrzymujemy *szereg Maclaurina*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to otrzymujemy *szereg Maclaurina*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

**Twierdzenie**

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu $x_0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, to

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

tzn. rozwinięcie funkcji w szereg Taylora w otoczeniu $x_0$ jest jednoznaczne.

# Przykłady

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1,1)$. Stąd np.:

$f(x) = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$, $\quad |\frac{x^2}{4}| < 1 \iff |x| < 2$

(2) $f(x) = e^x$. Ze wzoru Maclaurina istnieje $\theta \in (0,1)$
$e^x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!}$.

# Przykłady

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1,1)$. Stąd np.:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |\frac{x^2}{4}| < 1 \iff |x| < 2$$

(2) $f(x) = e^x$. Ze wzoru Maclaurina istnieje $\theta \in (0,1)$
$e^x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!}$. Dla każdego $\theta \in (0,1)$
$\left|\frac{e^{\theta x} x^n}{n!}\right| \leq \frac{e^{|x|} |x|^n}{n!} \to 0$. Stąd $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} = 0$.

# Przykłady

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1,1)$. Stąd np.:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |\frac{x^2}{4}| < 1 \iff |x| < 2$$

(2) $f(x) = e^x$. Ze wzoru Maclaurina istnieje $\theta \in (0,1)$ $e^x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!}$. Dla każdego $\theta \in (0,1)$ $\left|\frac{e^{\theta x} x^n}{n!}\right| \leq \frac{e^{|x|}|x|^n}{n!} \to 0$. Stąd $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} = 0$. Więc $e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

# Wzór Eulera

$(2) e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(3) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

# Wzór Eulera

$(2) e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(3) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(4) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Niech $j^2 = -1$. Podstawiając za $x$ $jx$ do wzoru (2) otrzymujemy
$e^{jx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
czyli otrzymujemy

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x.$$

Podstawiając za $x = \pi$ otrzymujemy wzór Eulera

$$e^{j\pi} + 1 = 0.$$

(5) Wyznaczyć rozwinięcie funkcji $\mathrm{arctg}\, x$ w szereg Maclaurina korzystając z całkowania szeregu wyraz po wyrazie i ze wzoru $\mathrm{arctg}\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \ldots$

$R = 1$,

$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\, x =$
$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \, , \quad x \in (-1,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{arctg}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \, , \quad |x| \leqslant 1$$

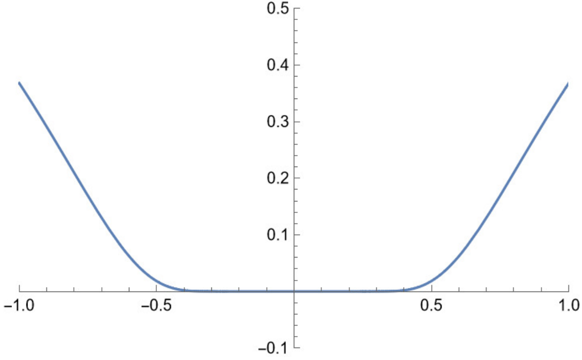
# Funkcje gładkie i funkcje analityczne

Funkcje, które mają pochodne dowolnego rzędu nazywamy gładkimi albo klasy $C^\infty$.

Funkcje, które mają pochodne dowolnego rzędu nazywamy gładkimi albo klasy $C^{\infty}$.
Funkcje, które są równe rozwinięciu w szereg Taylora w każdym punkcie dziedziny nazywamy analitycznymi.

Funkcje, które mają pochodne dowolnego rzędu nazywamy gładkimi albo klasy $C^\infty$.
Funkcje, które są równe rozwinięciu w szereg Taylora w każdym punkcie dziedziny nazywamy analitycznymi.
Nie wszystkie funkcje gładkie są analitczne.
Niech $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$.
Wtedy $f$ jest gładka, ale nie analiczna. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$. Stąd $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = 0$. Ale $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$ dla $x \neq 0$.

Wykres $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$.



## Definicja

Niech $(a_n)$, $(b_n)$ będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $l > 0$. *Szeregiem trygonometrycznym* nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(1) Przekształcając wyraz ogólny dostaniemy

(1) Przekształcając wyraz ogólny dostaniemy

$$f_n(x) = a_n \cos \tfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin \tfrac{n\pi x}{l}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \tfrac{a_n}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \tfrac{n\pi x}{l} + \tfrac{b_n}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \tfrac{n\pi x}{l} \right)$$
$$= c_n \sin \left( \tfrac{n\pi x}{l} + \varphi_n \right),$$

gdzie $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

(1) Przekształcając wyraz ogólny dostaniemy

$f_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$
$= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$
$= c_n \sin \left( \frac{n\pi x}{l} + \varphi_n \right),$
gdzie $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Funkcje $f_n$, określające zależność położenia od czasu $x$, przedstawiają drgania harmoniczne o amplitudzie $c_n$, okresie $\frac{2l}{n}$ i fazie początkowej $\varphi_n$.

Suma częściowa tego szeregu tzw. *wielomian trygonometryczny*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l})$$

jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$.

Suma częściowa tego szeregu tzw. *wielomian trygonometryczny*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l})$$

jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$.

(2) Jeśli szereg trygonometryczny jest zbieżny na dowolnym przedziale długości $2l$ $[a, a+2l]$, $a \in \mathbb{R}$, to jest on zbieżny na całym $\mathbb{R}$ i jego suma jest funkcją okresową o okresie $2l$.

## Twierdzenie

Jeśli ciąg sum częściowych szeregu trygonometrycznego jest zbieżny na przedziale $[a, a+2l]$, to suma tego szeregu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

jest funkcją ciągłą na $X_a$ oraz współczynniki szeregu zadane są *wzorami Eulera–Fouriera*:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Dowód:

Dowód: Zauważmy, że
$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left[\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} =$
$\frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \sin \frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$

Dowód: Zauważmy, że

$$\int_a^{a+2l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \left[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = \frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \sin\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \left[-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = -\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \cos\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\int_a^{a+2l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \left[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = \frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \sin\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \left[-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = -\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \cos\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\,dx = 0,$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left[\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = \frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \sin\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \left[-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = -\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \cos\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$$

Dowód: Zauważmy, że

$$\int_a^{a+2l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \left[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = \frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \sin\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \left[-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} = -\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l}+2n\pi\right) - \cos\frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \sin\frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin\frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos\frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$$

Dowód: Zauważmy, że

$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left[\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} =$
$\frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \sin \frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \left[-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} =$
$-\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \cos \frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$

$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx =$
$0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$

$\int_a^{a+2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_a^{a+2l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l.$

Dowód: Zauważmy, że

$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left[\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} =$
$\frac{l}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \sin \frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \left[-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l}\right]_a^{a+2l} =$
$-\frac{l}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi a}{l} + 2n\pi\right) - \cos \frac{n\pi a}{l}\right) = 0,$

$\int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx =$
$0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$

$\int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2l} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx = 0,$

$\int_a^{a+2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_a^{a+2l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l.$

Korzystając z powyższych wzorów otrzymujemy następujące wzory.

Mnożąc obustronnie wzór

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

przez $\cos\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy

Mnożąc obustronnie wzór

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

przez $\cos\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a + 2l$ otrzymujemy

$\int_a^{a+2l} f(x) \cos\frac{m\pi x}{l} dx = \int_a^{a+2l} \frac{a_0}{2} \cos\frac{m\pi x}{l} dx +$
$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{a+2l} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx + \int_a^{a+2l} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx =$
$a_m l$.

Mnożąc obustronnie wzór

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

przez $\cos\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy

$\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \int_a^{a+2l} \frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+2l} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx + \int_a^{a+2l} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = a_m l.$

Analogicznie mnożąc obustronnie wzór (1) przez $\sin\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy

$$\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = b_m l.$$

Mnożąc obustronnie wzór

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

przez $\cos\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy

$\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \int_a^{a+2l}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx +$
$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+2l} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx + \int_a^{a+2l} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx =$
$a_m l$.

Analogicznie mnożąc obustronnie wzór (1) przez $\sin\frac{m\pi x}{l}$ i całkując od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy

$$\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = b_m l.$$

Całkując wzór (1) od $a$ do $a+2l$ otrzymujemy $\int_a^{a+2l} f(x)dx = a_0 l$.

□

**Definicja**

Każdej funkcji całkowalnej na przedziale $[a, a + 2l]$ możemy przyporządkować szereg trygonometryczny (zbieżny lub rozbieżny) o współczynnikach zadanych wzorami Eulera–Fouriera nazywany *szeregiem Fouriera* funkcji $f$.

# Szereg Fouriera funkcji

**Definicja**

Każdej funkcji całkowalnej na przedziale $[a, a+2l]$ możemy przyporządkować szereg trygonometryczny (zbieżny lub rozbieżny) o współczynnikach zadanych wzorami Eulera–Fouriera nazywany *szeregiem Fouriera* funkcji $f$.

Uwaga:

Aby szereg Fouriera był szeregiem zbieżnym do wyjściowej funkcji (tzn. aby przyporządkowanie w powyższej definicji można było zastąpić równością), funkcja $f$ musi spełniać dodatkowe warunki, tzw. *warunki Dirichleta*.

# Warunki Dirichleta

## Definicja

Funkcja ograniczona $f$ na przedziale $[a, b]$ spełnia *warunki Dirichleta*, jeśli:

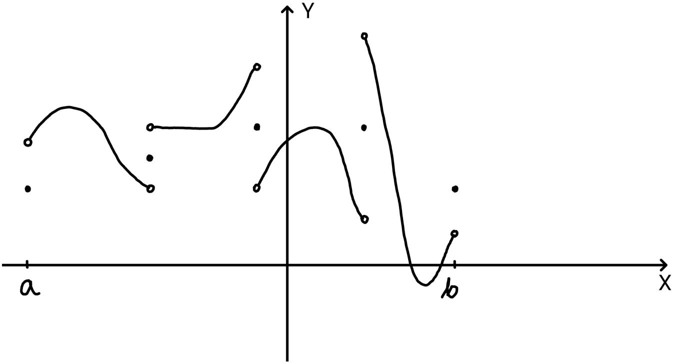
(1) jest przedziałami monotoniczna na $(a, b)$,

(2) jest ciągła z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczbie punktów nieciągłości I-go rodzaju (tzn. istnieją skończone granice jednostronne) i w każdym punkcie nieciągłości przyjmuje tzw. wartości dirichletowskie, tzn.

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_i^+} f(x) + \lim_{x \to x_i^-} f(x)\right)$$

(3) $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to b^-} f(x)\right]$

Wykres funkcji spełniającej wrunki Dirichleta na przedziale $[a, b]$.



**Twierdzenie**

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$ i spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[a, a + 2l]$, to jest ona sumą swojego szeregu Fouriera na tym przedziale.

## Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$ i spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[a, a + 2l]$, to jest ona sumą swojego szeregu Fouriera na tym przedziale.

## Stwierdzenie

Jeżeli szereg Fouriera funkcji $f : D\mathbb{R}$ jest zbieżny to

$$\forall\, x \in D \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{1}{2} \left[ f(x^+) + f(x^-) \right]$$

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn.
$\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to
$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$.

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta tzn.
$\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = -f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$
to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = -f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Dowód: Zauważmy, że $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_0^l f(x)dx$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = -f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Dowód: Zauważmy, że $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_0^l f(x)dx$.
Niech $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ będzie parzysta. Wystarczy pokazać, że $\int_{-l}^{0} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(-x) = -f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Dowód: Zauważmy, że $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_0^l f(x)dx$.
Niech $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ będzie parzysta. Wystarczy pokazać, że $\int_{-l}^{0} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx$.
Ale to zachodzi, bo $\int_{-l}^{0} f(x)dx = |x = -t,\ dx = -dt| = \int_l^0 f(-t)(-dt) = -\int_l^0 f(t)dt = \int_0^l f(t)dt$.

# Całki funkcji parzystych i nieparzystych

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest parzysta tzn. $\forall x \in [-l, l] \quad f(-x) = f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta tzn. $\forall x \in [-l, l] \quad f(-x) = -f(x)$, i R-całkowalna w przedziale $[-l, l]$ to $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Dowód: Zauważmy, że $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_0^l f(x)dx$.
Niech $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ będzie parzysta. Wystarczy pokazać, że $\int_{-l}^{0} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx$.
Ale to zachodzi, bo $\int_{-l}^{0} f(x)dx = |x = -t, \ dx = -dt| = \int_l^0 f(-t)(-dt) = -\int_l^0 f(t)dt = \int_0^l f(t)dt$.
Jeżeli $f$ jest nieparzysta to w ten sam sposób pokazujemy, że $\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_0^l f(x)dx$. $\square$

## Twierdzenie

(1) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie $2l$, spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[-l, l]$ i jest parzysta tzn. $\forall\, x \in [-l, l] \quad f(x) = f(-x)$, to

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad b_n = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

i funkcja rozwija się w szereg cosinusów

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

## Twierdzenie

(2) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie $2l$, spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[-l, l]$ i jest nieparzysta to

$$a_0 = a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i funkcja rozwija się w szereg sinusów

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Funkcja $\mathrm{sgn}(x)$ jest parzysta więc $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2 \cdots$.

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Funkcja $\operatorname{sgn}(x)$ jest parzysta więc $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2 \cdots$.

$$b_n = 2/\pi \int_0^\pi \sin(nx)dx = 2\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k \\ \frac{4}{(2k-1)\pi} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

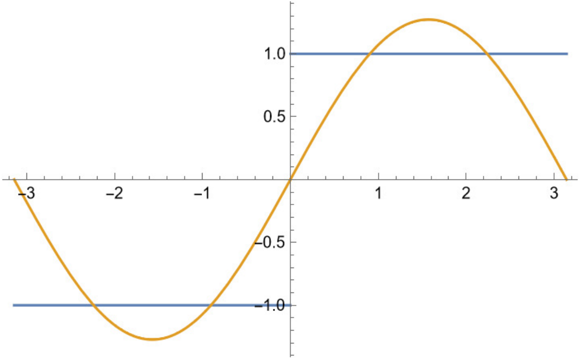
Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Funkcja $\mathrm{sgn}(x)$ jest parzysta więc $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2 \cdots$.

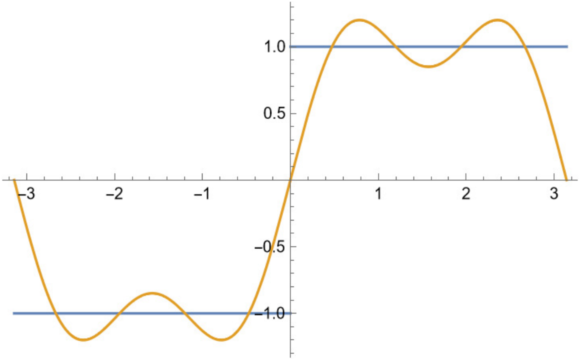
$b_n = 2/\pi \int_0^{\pi} \sin(nx)dx = 2\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$
$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k \\ \frac{4}{(2k-1)\pi} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \end{cases}$

$$\mathrm{sgn}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x).$$

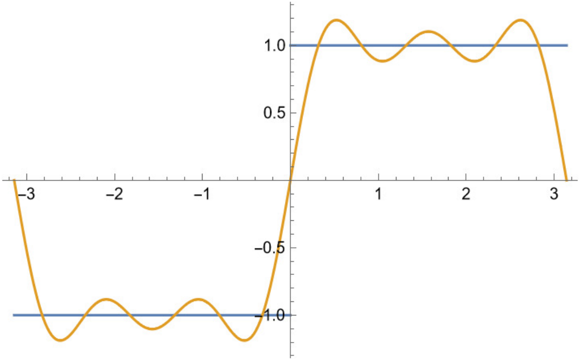
Wykres sgn$(x)$ i $\frac{4}{\pi}\sin x$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



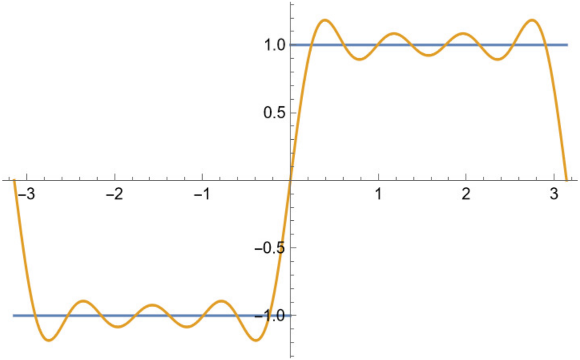
Wykres $\operatorname{sgn}(x)$ i $\sum_{k=1}^{2} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



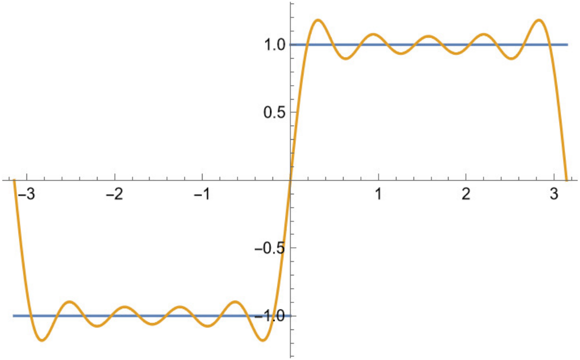
Wykres sgn$(x)$ i $\sum_{k=1}^{3} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



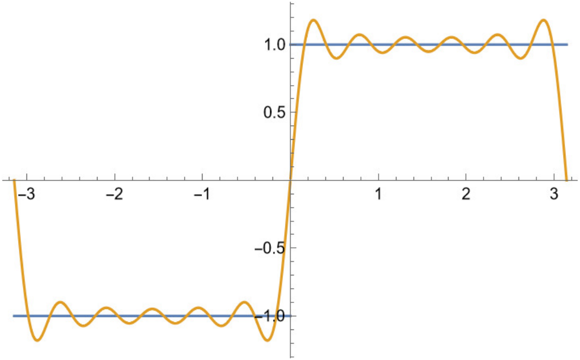
Wykres $\operatorname{sgn}(x)$ i $\sum_{k=1}^{4} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



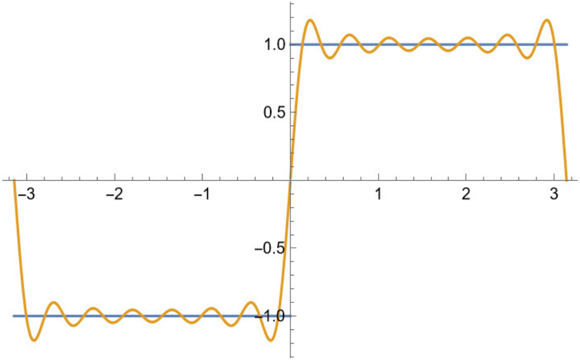
Wykres sgn$(x)$ i $\sum_{k=1}^{5} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



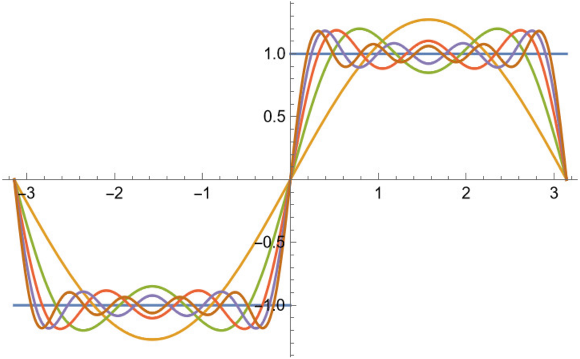
Wykres $\mathrm{sgn}(x)$ i $\sum_{k=1}^{6} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



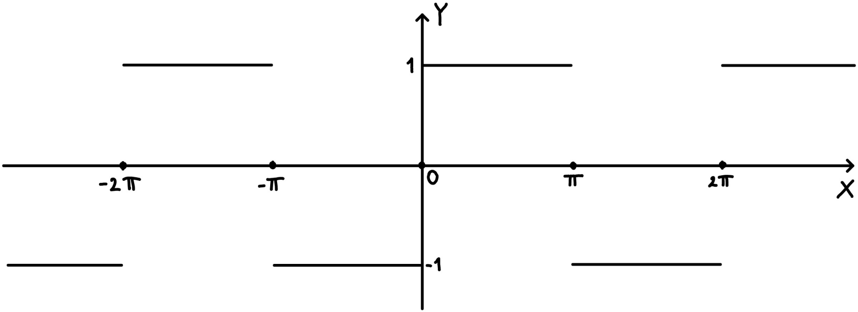
Wykres sgn$(x)$ i $\sum_{k=1}^{7} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.



Wykres sgn$(x)$ i $\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$ i $n = 1, \cdots, 7$.



Wykres rozwinięcia Fouriera funkcji sgn($x$), $x \in [-\pi, \pi]$ przedłużony na $\mathbb{R}$.



Rozwinięcie funkcji nieokresowej $g$ w pewnym przedziale możemy otrzymać przez rozwinęcie dowolnego jej rozszerzenia okresowego spełniającego założenia twierdzenia, rozwinięcie takiej funkcji jest więc niejednoznaczne.

Rozwinięcie funkcji nieokresowej $g$ w pewnym przedziale możemy otrzymać przez rozwinęcie dowolnego jej rozszerzenia okresowego spełniającego założenia twierdzenia, rozwinięcie takiej funkcji jest więc niejednoznaczne.

Przykład:

Różnymi sposobami rozwinąć funkcję $g(x) = x, \ x \in (0, p), \ p > 0$ w szereg Fouriera.

(1) $g(0) = g(p) = \frac{p}{2}\,, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f|_{[0,p]} = g$

$f$ jest okresowa o okresie $2l = p$, $X_a = [a, a + 2l] = [0, p] \Rightarrow l = \frac{p}{2}$

$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p x\, dx = p$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \cos \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos \frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = \frac{p}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{p} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{p}\left[ \ \frac{px}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p - \frac{p}{2n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{2n^2\pi^2}\ \cos\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p =$$

$$= \frac{p}{2n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - 1] = 0$$

$$= \frac{2}{p}\left[ \quad \frac{px}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{p} \quad \Big|_0^p - \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$
$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{2n^2\pi^2} \quad \cos \frac{2n\pi x}{p} \quad \Big|_0^p =$$
$$= \frac{p}{2n^2\pi^2} [\cos 2n\pi - 1] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin \frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = -\frac{p}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{2}{p}\left[ \quad \frac{-px}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \quad \Big|_0^p + \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \cos \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$
$$= -\frac{p}{n\pi} \cos 2n\pi + \frac{p}{2n^2\pi^2} \quad \sin \frac{2n\pi x}{p} \quad \Big|_0^p = -\frac{p}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{p}\left[ \left. \frac{px}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p - \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left. \frac{p}{2n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p =$$

$$= \frac{p}{2n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - 1] = 0$$

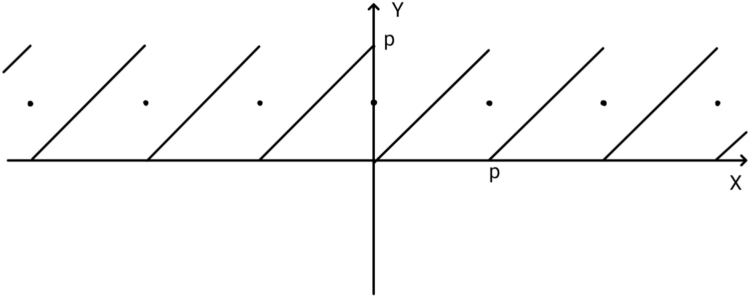
$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin \frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = -\frac{p}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{p}\left[ \left. \frac{-px}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p + \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \cos \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$

$$= -\frac{p}{n\pi} \cos 2n\pi + \left. \frac{p}{2n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p = -\frac{p}{n\pi}$$

$$x = \frac{p}{2} - \frac{p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{p} \text{ dla } x \in (0, p).$$

Wykres rozwinięcia Fouriera funkcji $g(x) = x, \ x \in (0, p)$ przedłużony na $\mathbb{R}$ okresowo o okresie $p$.



(2) szereg cosinusów - przedłużenie parzyste

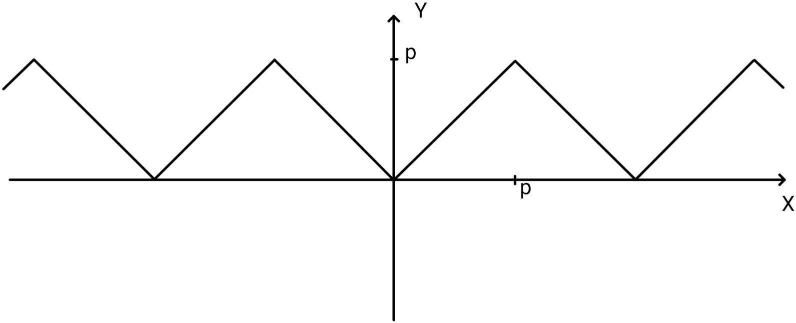
$2l = 2p,\ X_{-l} = [-l, l] = [-p, p]$

$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p x\, dx = p\,, \qquad b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p x \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ -\frac{4p}{\pi^2 n^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$x = \frac{p}{2} - \frac{4p}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{p} \text{ dla } x \in [0, p]$$

Wykres rozwinięcia Fouriera w szereg cosinusów funkcji $g(x) = x, \; x \in (0, p)$ przedłużony parzyście na $\mathbb{R}$ okresowo o okresie $2p$.



(3) szereg sinusów - przedłużenie nieparzyste

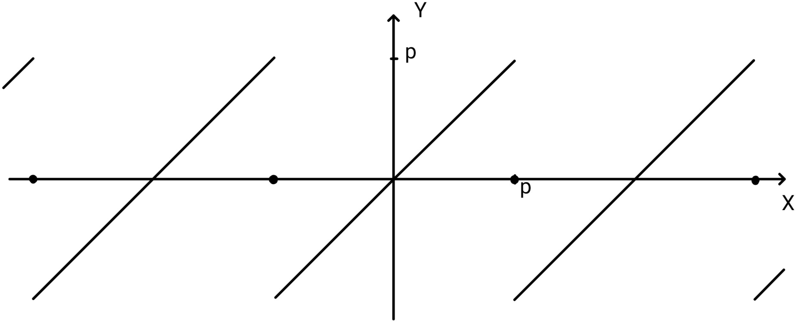
$2l = 2p, \; X_{-l} = [-l, l] = [-p, p]$

$a_0 = a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2p}{\pi n}$

$x = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{p}$ dla $x \in (-p, p)$

Wykres rozwinięcia Fouriera w szereg sinusów funkcji $g(x) = x,\ x \in (0, p)$ przedłużony nieparzyście na $\mathbb{R}$ okresowo o okresie $2p$.



(4) przedłużamy funkcję najpierw na przedział $[p, 2p]$,

$g(0) = g(2p) = p, \; X_a = [a, a + 2l] = [0, 2p] \Rightarrow l = p$

$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} x \, dx = 2p$

$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} x \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx = 0$

$b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} x \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx = -\frac{2p}{\pi n}$

$x = p - \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{p}$ dla $x \in (0, 2p)$.