

Analiza, Przekształcenie Fouriera

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Postać zespolona wzoru całkowego Fouriera

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia (1) i (2) warunek Dirichleta i całka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ jest zbieżna, to

$$\forall t \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

jest to tzw. *wzór całkowy Fouriera w postaci zespolonej*.

Przekształcenie Fouriera

We wzorze całkowym Fouriera w postaci zespolonej:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

oznaczymy

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

We wzorze całkowym Fouriera w postaci zespolonej:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

oznaczmy

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

wtedy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(i\omega) d\omega$$

Przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(i\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$F(i\omega)$ nazywamy *transformatą Fouriera* funkcji $f(t)$.

Przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(i\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$F(i\omega)$ nazywamy *transformatą Fouriera* funkcji $f(t)$.

Odwrotne przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}^{-1}$

$$F(i\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(i\omega) d\omega$$

Przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(i\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$F(i\omega)$ nazywamy *transformatą Fouriera* funkcji $f(t)$.

Odwrotne przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}^{-1}$

$$F(i\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(i\omega) d\omega$$

Uwaga:

$\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ są wzajemnie odwrotne, tzn.

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = f(t)$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)]] = F(i\omega)$$

Zespólna postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespólna postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Zespolona postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespolona postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Rozważmy funkcję nieokresową.

Zespolona postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespolona postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Rozważmy funkcję nieokresową. Możemy przyjąć, że jej „okres” to $T = \infty$.

Zespolona postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespolona postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Rozważmy funkcję nieokresową. Możemy przyjąć, że jej „okres” to $T = \infty$. Wtedy w powyższych wzorach przechodzimy z $l \rightarrow \infty$.

Zespolona postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespolona postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Rozważmy funkcję nieokresową. Możemy przyjąć, że jej „okres” to $T = \infty$. Wtedy w powyższych wzorach przechodzimy z $l \rightarrow \infty$.

Wtedy $n\omega = \frac{n\pi}{l}$ dla $n \in \mathbb{Z}$ i $l \rightarrow \infty$ przybliża liczby rzeczywiste, bo $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Zespólna postać szeregu Fouriera a przekształcenie Fouriera

Zespólna postać szeregu Fouriera to

$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-jn\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\omega = \frac{\pi}{l}$ i $2l$ to okres funkcji f .

Rozważmy funkcję nieokresową. Możemy przyjąć, że jej „okres” to $T = \infty$. Wtedy w powyższych wzorach przechodzimy z $l \rightarrow \infty$.

Wtedy $n\omega = \frac{n\pi}{l}$ dla $n \in \mathbb{Z}$ i $l \rightarrow \infty$ przybliża liczby rzeczywiste, bo $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

W ten sposób otrzymujemy

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$, gdzie

$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ jest przekształceniem Fouriera funkcji f .

Przykład:

Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 t \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-1}^1 t \cos \omega t dt - i \int_{-1}^1 t \sin \omega t dt = -2i \int_0^1 t \sin \omega t dt = \\ &= -2i \left[-\frac{t \cos \omega t}{\omega} \Big|_0^1 + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \Big|_0^1 \right] = -2i \left[-\frac{\cos \omega}{\omega} + \frac{\sin \omega}{\omega^2} \right] = \\ &= \frac{2i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega) \end{aligned}$$

czyli transformata Fouriera:

$$F(i\omega) = \frac{2i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega)$$

Widmo amplitudowe i fazowe

$$F(i\omega) = |F(i\omega)| \cdot e^{i\theta(\omega)}, \quad |\theta(\omega)| \leq \pi$$

$$F(i\omega) = |F(i\omega)| \cdot e^{i\theta(\omega)}, \quad |\theta(\omega)| \leq \pi$$

Definicje

$F(i\omega)$ – *widmo* funkcji $f(t)$

$|F(i\omega)|$ – *widmo amplitudowe* funkcji $f(t)$

$\theta(\omega)$ – *widmo fazowe* funkcji $f(t)$

$$F(i\omega) = \pi[a(\omega) - ib(\omega)]$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau$$

Stąd:

$$|F(i\omega)| = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

$$\cos \theta(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}, \quad \sin \theta(\omega) = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$

Stąd:

$$|F(i\omega)| = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

$$\cos \theta(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}, \quad \sin \theta(\omega) = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$

Uwaga:

$a(\omega)$ - funkcja parzysta, $b(\omega)$ - funkcja nieparzysta $\Rightarrow$
 $\Rightarrow |F(i\omega)|$ - funkcja parzysta, $\theta(\omega)$ - funkcja nieparzysta dla
 $|\theta(\omega)| < \pi$. Przyjmujemy dodatkowo $\theta(\omega) = \pi \cdot \operatorname{sgn} \omega$ dla
 $\cos \theta(\omega) = -1$ i $\sin \theta(\omega) = 0$.

Przykład:

Wyznaczyć widmo amplitudowe i fazowe funkcji

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < t_0 \\ \frac{1}{2}, & |t| = t_0 \\ 0, & |t| > t_0 \end{cases}$$

Wyznaczyliśmy wcześniej $a(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} \sin \omega t_0$, $b(\omega) = 0$

Stąd: $F(i\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega t_0$

$$|F(i\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right|$$

$$\sin \theta(\omega) = 0, \quad \cos \theta(\omega) = \operatorname{sgn} \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \Rightarrow \theta(\omega) = 0 \vee \pi$$

Własności przekształcenia Fouriera

(1) Liniowość

$$\mathcal{F}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \mathcal{F}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{F}[f_2(t)]$$

(1) Liniowość

$$\mathcal{F}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \mathcal{F}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{F}[f_2(t)]$$

(2) Pochodna

$$\frac{d^k F(i\omega)}{d\omega^k} = (-i)^k \mathcal{F}[t^k f(t)]$$

$$\text{np. } f(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

$$f(t) = t \cdot g(t), \quad g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[t \cdot g(t)] = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[g(t)] = i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega \right) = \frac{2i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega)$$

$$\mathcal{F}[t \cdot g(t)] = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[g(t)] = i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega \right) = \frac{2i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega)$$

(3) Przesunięcie w argumencie funkcji

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

np. $f(t) = \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(t - a) - \operatorname{sgn}(t - 2t_0 - a)] =$

$$= \begin{cases} 1, & a < t < a + 2t_0 \\ \frac{1}{2}, & t \in \{a, a + 2t_0\} \\ 0, & t < a \vee t > a + 2t_0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}, t_0 > 0$$

$$f(t) = g[t - (a + t_0)] \quad \text{dla} \quad g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < t_0 \\ \frac{1}{2}, & |t| = t_0 \\ 0, & |t| > t_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = e^{-i\omega(a+t_0)} \mathcal{F}[g(t)] = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega(a+t_0)} \sin \omega t_0$$

(5) Przesunięcie w argumencie obrazu

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F[i(\omega - \omega_0)]$$

(5) Przesunięcie w argumencie obrazu

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F[i(\omega - \omega_0)]$$

(6) Transformata pochodnej

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

Splot funkcji

f_1, f_2 - bezwzględnie całkowalne w $\mathbb{R}$

Definicja

Splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ nazywamy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$$

Splot funkcji

f_1, f_2 - bezwzględnie całkowalne w $\mathbb{R}$

Definicja

Splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ nazywamy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$$

Przykład:

$$f_1(t) = \frac{1}{2}[\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn}(t - 1)] = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t \in \{0, 1\} \\ 0, & t < 0 \vee t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(t + 1) - \operatorname{sgn} t] = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t \in \{-1, 0\} \\ 0, & t < -1 \vee t > 0 \end{cases}$$

$$f_1(\tau) \neq 0 \text{ na } (0, 1)$$

$$f_2(\tau) \neq 0 \text{ na } (-1, 0) \Rightarrow f_2(-\tau) \neq 0 \text{ na } (0, 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2(t - \tau) \neq 0 \text{ na } (t, t + 1)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{t+1} d\tau = t + 1, \quad t \in (-1, 0]$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_t^1 d\tau = 1 - t, \quad t \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Własności splotu:

(1) przemienność: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

(2) łączność: $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$

(3) rozdzielność względem dodawania:

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

Własności splotu:

(1) przemienność: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

(2) łączność: $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$

(3) rozdzielność względem dodawania:

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

Uwaga:

Jeśli $f_1(t)$, $f_2(t)$ są takie, że $f_k(t) \equiv 0$, $\forall t < 0$, $k = 1, 2$, to

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{np. } \mathbf{1}(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t) = \int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = t, \quad t > 0$$

$$\text{np. } \mathbf{1}(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t) = \int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = t, \quad t > 0$$

Twierdzenie

Przy założeniach tw. Fouriera oraz gdy $\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(t)|^2 dt$, $k = 1, 2$ są zbieżne

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]$$