Analiza, Wykład:Funkcje, granice, ciągłość funkcji

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Granica funkcji

Granica funkcji

Definicja

Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Punkt x_0 nazywamy *punktem skupienia* zbioru A, jeśli dla każdych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < x_0 < b$ w zbiorze $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru A.
Punkt x_0 nazywamy *punktem izolowanym* zbioru A, jeśli $x_0 \in A$ i x_0 nie jest punktem skupienia zbioru A.

Granica funkcji

Definicja

Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Punkt x_0 nazywamy *punktem skupienia* zbioru A, jeśli dla każdych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < x_0 < b$ w zbiorze $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru A.
Punkt x_0 nazywamy *punktem izolowanym* zbioru A, jeśli $x_0 \in A$ i x_0 nie jest punktem skupienia zbioru A.

Twierdzenie

x_0 jest punktem skupienia zbioru $A \iff$
$\iff \exists\, (x_n) \subset A\,, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 \notin D$) będzie punktem skupienia zbioru D, $g \in \mathbb{R}$.

Definicja Heinego (granica właściwa)

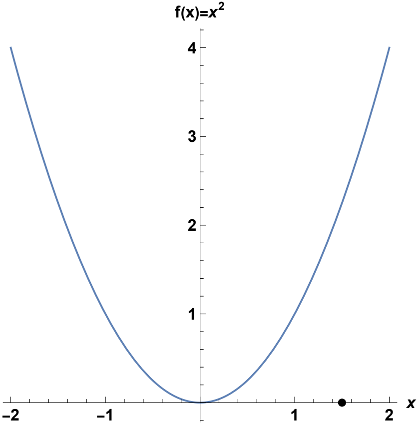
Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$) jeśli

$$\forall (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja Heinego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

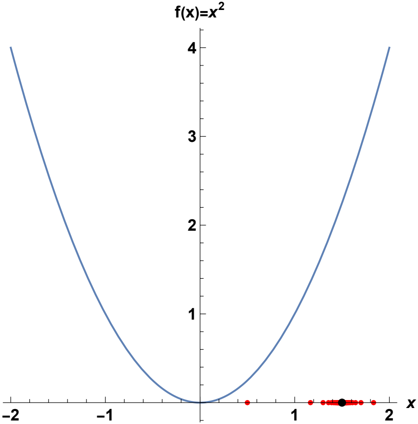
$$\forall\,(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in D\setminus\{x_0\}\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$) jeśli

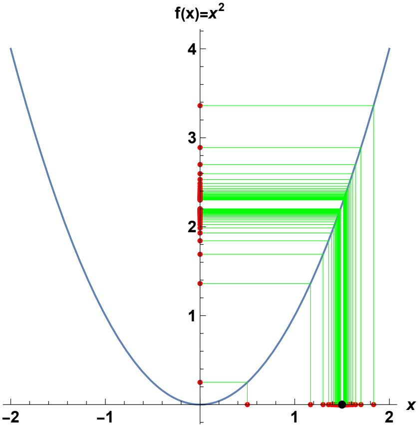
$$\forall (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

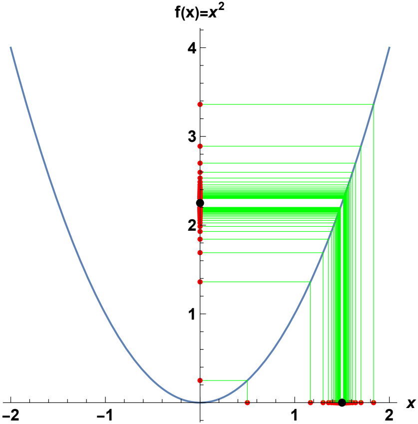
$$\forall\,(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in D\setminus\{x_0\}\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$) jeśli

$$\forall\,(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$



Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 \notin D$) będzie punktem skupienia zbioru D, $g \in \mathbb{R}$.

Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 \notin D$) będzie punktem skupienia zbioru D, $g \in \mathbb{R}$.

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

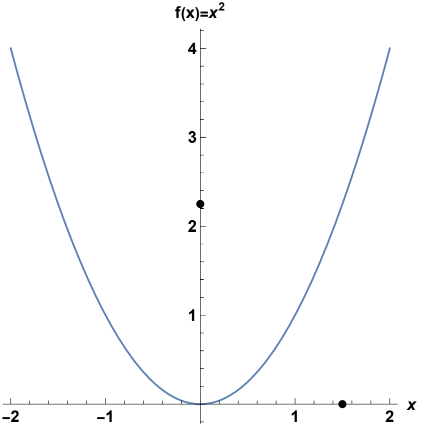
Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$) jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

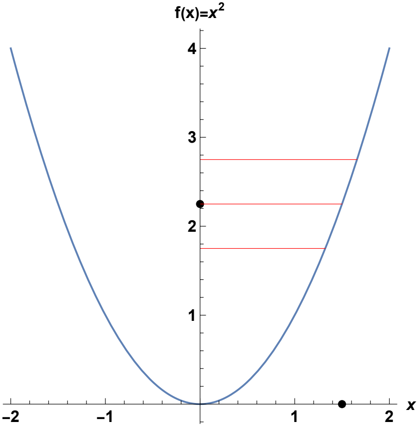
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

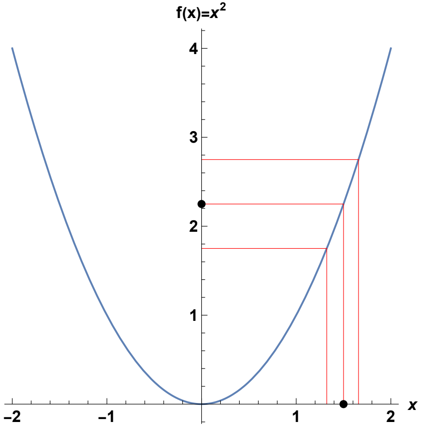
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

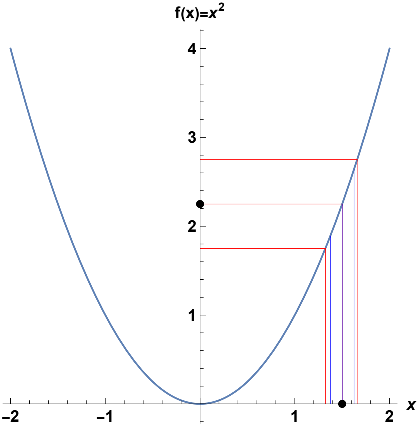
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

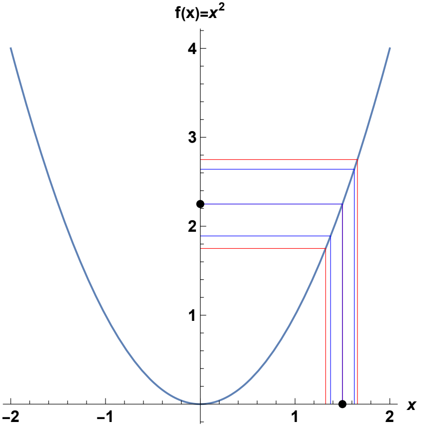
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie skupienia x_0 (oznaczenie $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 \notin D$) będzie punktem skupienia zbioru D.

Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

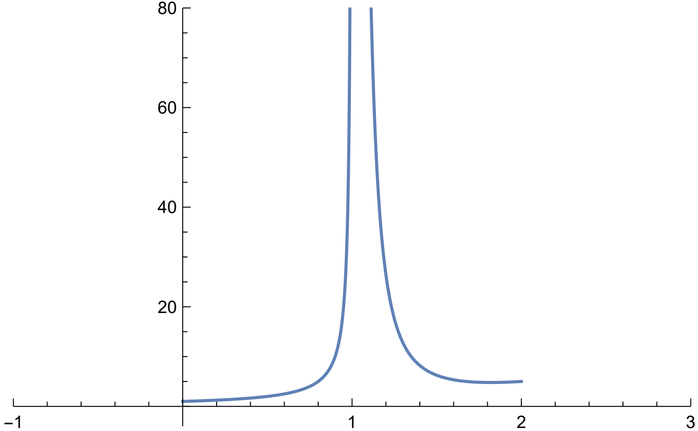
Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

$$\forall (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

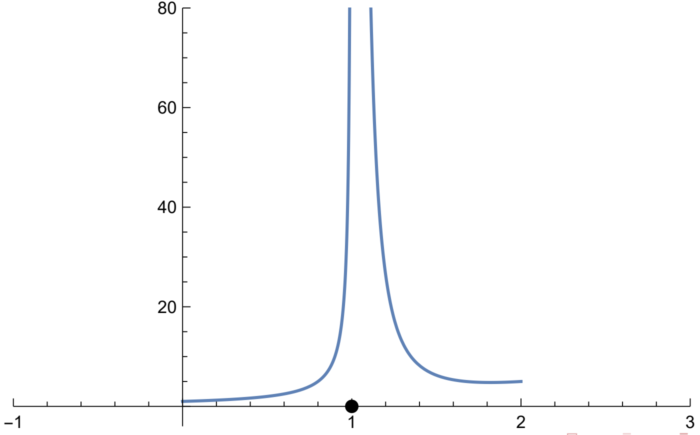
$$\forall\,(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in D\setminus\{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

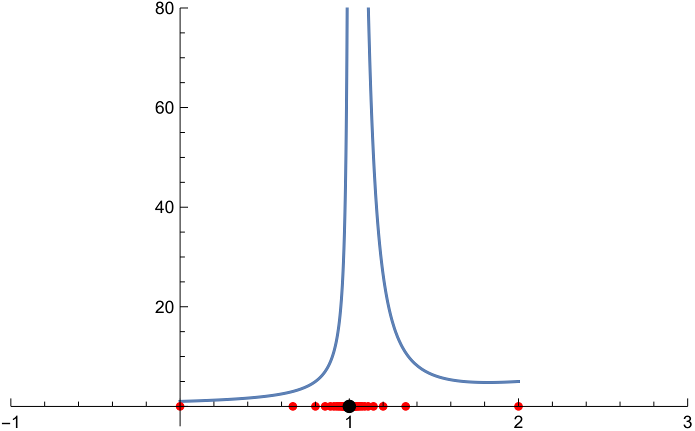
$$\forall\,(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

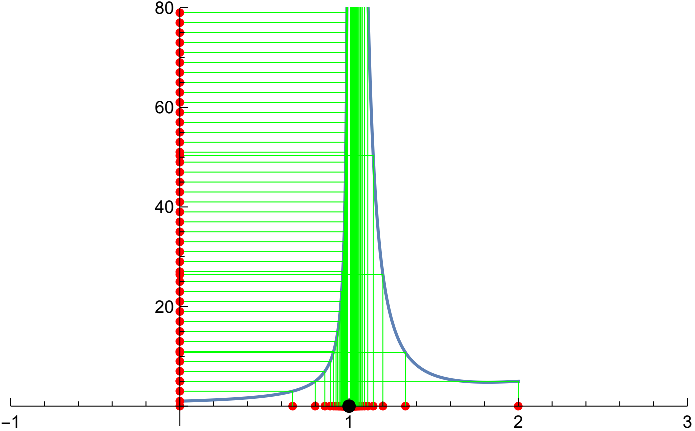
$$\forall\,(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

$$\forall (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

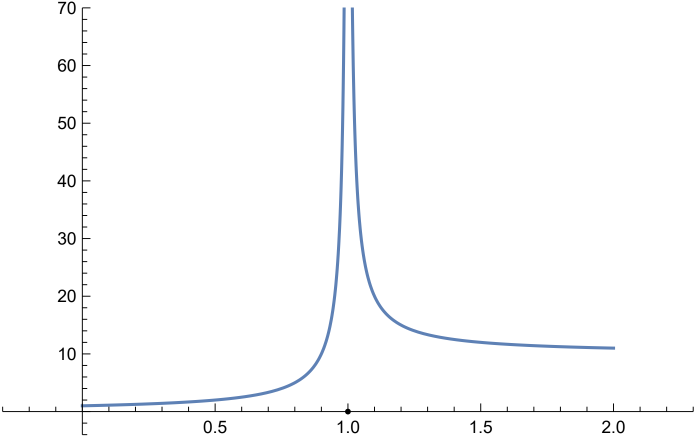
Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M$$

Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

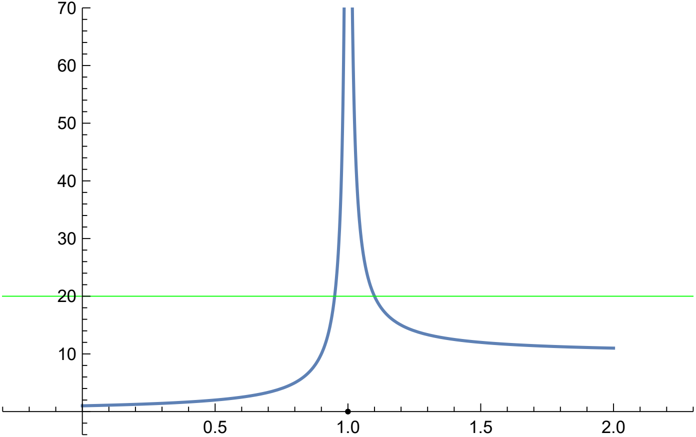
$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

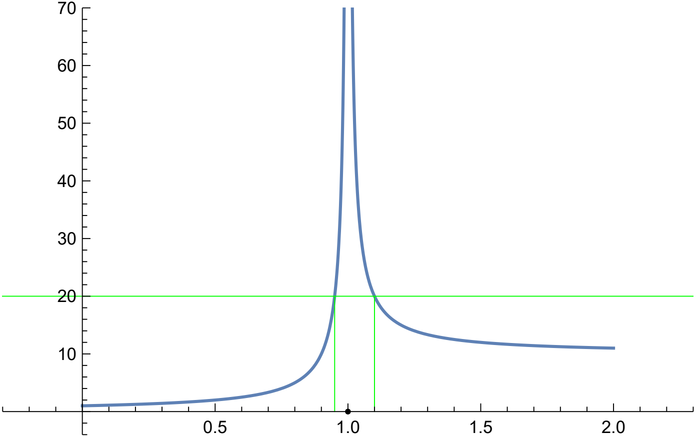
$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

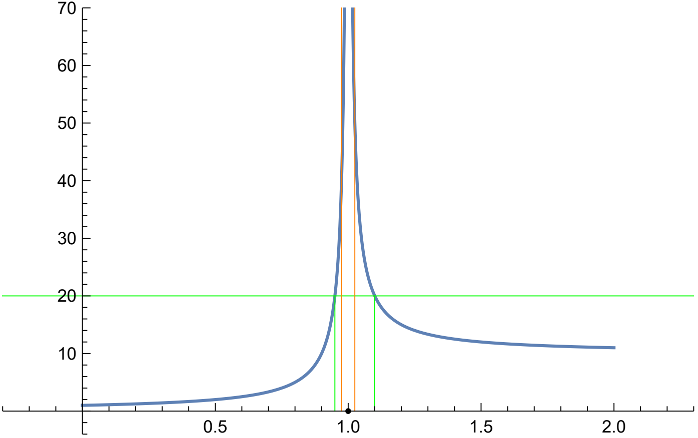
$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

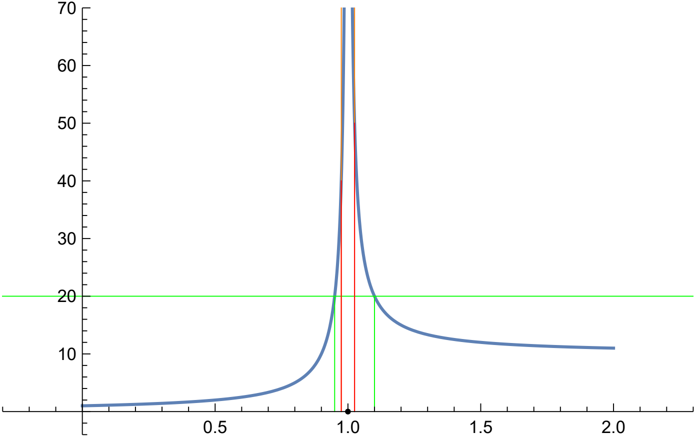
$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $+\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) jeżeli

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow f(x) > M$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

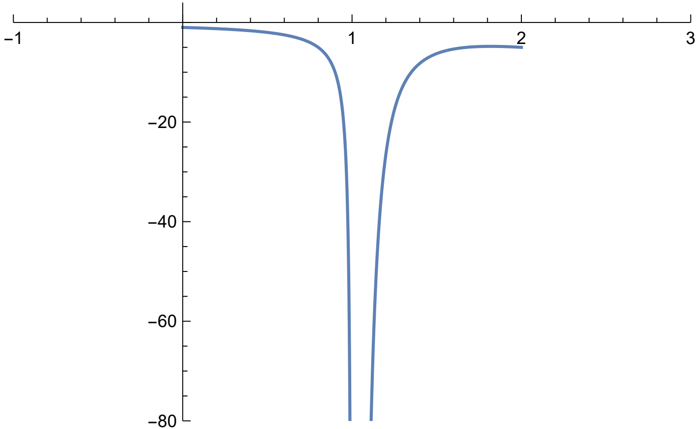
Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$

Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

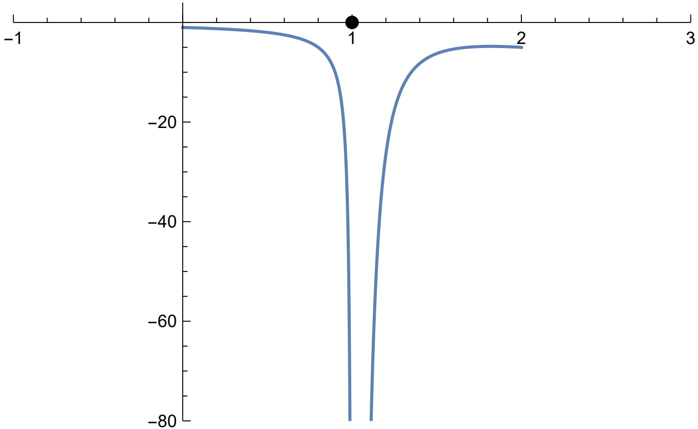
$$\forall\,(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

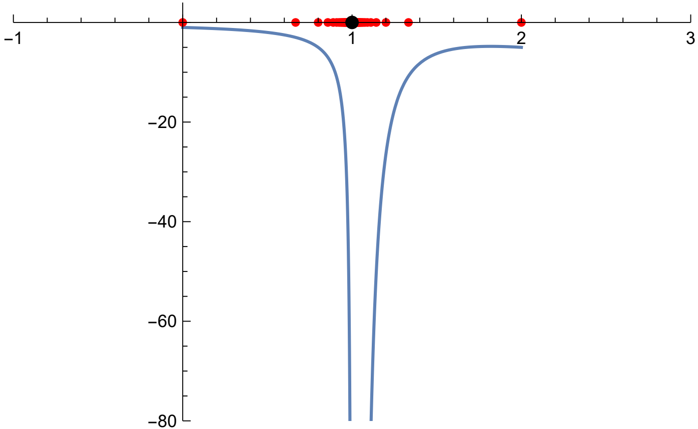
$$\forall (x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

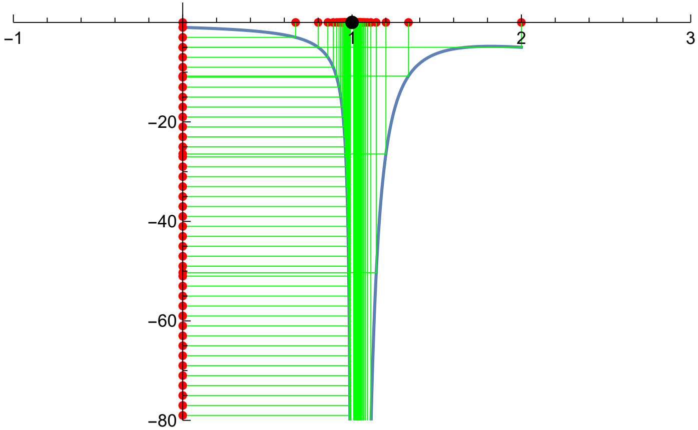
$$\forall\,(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

$$\forall\,(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in D\setminus\{x_0\} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Funkcja f ma w punkcie skupienia x_0 granicę $-\infty$ (oznaczenie: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) jeżeli

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow f(x) < -M$$

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} > M$

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=+\infty$.
Dziedzina funkcji $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że

$\forall\, M>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \forall\, x\in D \quad 0<|x+2|<\delta \;\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2}>M$

Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2}>M$ ze względu na $t=x+2$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+2)^2} > M$
Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$.
$M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}}$

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że

$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} > M$

Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$.
$M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$. Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że

$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} > M$

Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$. $M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+2)^2} > M$
Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$.
$M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.
(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=+\infty$. Dziedzina funkcji $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że
$\forall\, M>0 \;\; \exists\, \delta>0 \;\; \forall\, x\in D \;\; 0<|x+2|<\delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+2)^2}>M$
Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2}>M$ ze względu na $t=x+2$.
$M>0$, więc $\frac{1}{(t)^2}>M \iff |t|<\frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2|<\frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$.
(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}$. Dziedzina funkcji $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{4}{5}\}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=+\infty$. Dziedzina funkcji $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że

$\forall\, M>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \forall\, x\in D \quad 0<|x+2|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2}>M$

Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2}>M$ ze względu na $t=x+2$. $M>0$, więc $\frac{1}{(t)^2}>M \iff |t|<\frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2|<\frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$.

(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}$. Dziedzina funkcji $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{4}{5}\}$. Punkt 2 jest puktem skupienia D.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$. Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że

$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+2)^2} > M$

Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$. $M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4}$. Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\}$. Punkt 2 jest puktem skupienia D. Weźmy ciąg (x_n) taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D,\; x_n \neq 2 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego pokazać, że $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$. Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Punkt -2 jest puktem skupienia D. Trzeba pokazać, że
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x+2| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+2)^2} > M$
Trzeba rozwiązać nierówność $\frac{1}{(x+1)^2} > M$ ze względu na $t = x + 2$. $M > 0$, więc $\frac{1}{(t)^2} > M \iff |t| < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Czyli wystarczy przyjąć $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.
(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4}$. Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\}$. Punkt 2 jest puktem skupienia D.
Weźmy ciąg (x_n) taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D,\ x_n \neq 2 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}$$

z tw. o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$

Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.

Trzeba pokazać, że

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\tfrac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$$

czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x-1$. Mamy $x = t+1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1|$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \ \Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1|$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1| = \frac{1}{2}|t + 2 - 2|$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$

Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.

Trzeba pokazać, że

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$

czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.

Stąd

$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1| = \frac{1}{2}|t + 2 - 2| = \frac{1}{2}|t| < \varepsilon$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1| = \frac{1}{2}|t + 2 - 2| = \frac{1}{2}|t| < \varepsilon$
$\iff |t| < 2\varepsilon$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \ \Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x-1$. Mamy $x = t+1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1| = \frac{1}{2}|t+2-2| = \frac{1}{2}|t| < \varepsilon$
$\iff |t| < 2\varepsilon \iff |x-1| < 2\varepsilon$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$
Dziedzina funkcji $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkt 1 jest puktem skupienia D.
Trzeba pokazać, że
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \neq 1 \quad 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow |\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon,$
czyli trzeba rozwiązać nierówność $|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| < \varepsilon$ ze względu na $t = x - 1$. Mamy $x = t + 1$.
Stąd
$|\frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1| = |\frac{(t+1)^2-1}{2(t+1-1)} - 1| = |\frac{t^2+2t}{2t} - 1| = \frac{1}{2}|t+2-2| = \frac{1}{2}|t| < \varepsilon$
$\iff |t| < 2\varepsilon \iff |x-1| < 2\varepsilon$
Wystarczy przyjąć $\delta = 2\varepsilon$

Twierdzenie

(1)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |g|$$

(2)

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = K \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = K$$

(3)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \land \exists M > 0 \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\} \quad |g(x)| \leqslant M$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

Uwaga

Z definicji Heinego wynika, że granica funkcji w punkcie nie istnieje jeśli

$$\exists\, (x_n'), (x_n''), \quad x_n' \neq x_0 \neq x_n'' \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = x_0$$

$$\wedge \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n'')$$

Uwaga

Z definicji Heinego wynika, że granica funkcji w punkcie nie istnieje jeśli

$$\exists\,(x_n'),(x_n''),\quad x_n' \neq x_0 \neq x_n'' \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = x_0$$

$$\wedge \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n'')$$

Przykład:

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nie istnieje, bo
$x_n' = \frac{1}{n} \to 0,\;\; x_n'' = -\frac{1}{n} \to 0$ i
$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = +\infty,\;\; \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = -\infty$

Uwaga

Z definicji Heinego wynika, że granica funkcji w punkcie nie istnieje jeśli

$$\exists\,(x_n'),(x_n''),\quad x_n'\neq x_0\neq x_n''\quad \lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}x_n''=x_0$$

$$\wedge\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n')\neq\lim_{n\to\infty}f(x_n'')$$

Przykład:

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nie istnieje, bo
$x_n'=\frac{1}{n}\to 0,\;\; x_n''=-\frac{1}{n}\to 0$ i
$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=+\infty,\;\; \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=-\infty$

Definicja

Jeśli dana jest funkcja $f:D\to\mathbb{R}$, $\emptyset\neq A\subset D$, $D\subset\mathbb{R}$ to funkcję $g:A\to\mathbb{R}$ taką, że $\forall\,x\in A\;\; g(x)=f(x)$ nazywamy funkcją *zredukowaną* (obciętą) do zbioru A i oznaczamy $f\,\Big|_A=g$

Definicja granic jednostronnych

Jeśli $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, x_0)$ to *granicą lewostronną* funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0 nazywamy granicę (właściwą lub niewłaściwą)

$$\lim_{x \to x_0} \left(f \,\Big|_{D \cap (-\infty, x_0)} \right)(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Jeśli $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru $D \cap (x_0, +\infty)$ to *granicą prawostronną* funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0 nazywamy granicę (właściwą lub niewłaściwą)

$$\lim_{x \to x_0} \left(f \,\Big|_{D \cap (x_0, +\infty)} \right)(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Twierdzenie

Jeśli mają sens granice jednostronne $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, to granica zwykła $\lim_{x \to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją powyższe granice jednostronne i są sobie równe

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Twierdzenie

Jeśli mają sens granice jednostronne $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, to granica zwykła $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją powyższe granice jednostronne i są sobie równe

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Powyższe granice mogą być właściwe lub niewłaściwe.

Twierdzenie

Jeśli mają sens granice jednostronne $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, to granica zwykła $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją powyższe granice jednostronne i są sobie równe

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Powyższe granice mogą być właściwe lub niewłaściwe.

Przykład:

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nie istnieje, bo
$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

Definicja Cauchy'ego (granicy właściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, x \in D \quad x > K \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Definicja Cauchy'ego (granicy właściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in D \quad x > K \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Definicja Heinego (granicy właściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \iff$$

$$\forall (x_n) \subset D, \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja Cauchy'ego (granicy właściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in D \quad x > K \;\Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Definicja Heinego (granicy właściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \iff$$

$$\forall (x_n) \subset D, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja Heinego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall (x_n) \subset D, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, x \in D \quad x > K \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M>0 \quad \exists\, K\in\mathbb{R}_+ \quad \forall\, x\in D \quad x>K \;\Rightarrow f(x)<-M$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $+\infty$ i w $-\infty$ definiuje się analogicznie, tzn. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, x \in D \quad x > K \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $+\infty$ i w $-\infty$ definiuje się analogicznie, tzn. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Przykład:

Pokażemy, że $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ nie istnieje.

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M>0 \quad \exists\, K\in\mathbb{R}_+ \quad \forall\, x\in D \quad x>K \;\Rightarrow f(x)<-M$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $+\infty$ i w $-\infty$ definiuje się analogicznie, tzn. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Przykład:

Pokażemy, że $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ nie istnieje.

$x'_n = n\pi \to +\infty\,, \quad x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ i

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, x \in D \quad x > K \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $+\infty$ i w $-\infty$ definiuje się analogicznie, tzn. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Przykład:

Pokażemy, że $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ nie istnieje.

$x'_n = n\pi \to +\infty$, $\quad x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ i

$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin n\pi = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

Definicja Cauchy'ego (granicy niewłaściwej w $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, x \in D \quad x > K \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $+\infty$ i w $-\infty$ definiuje się analogicznie, tzn. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Przykład:

Pokażemy, że $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ nie istnieje.

$x_n' = n\pi \to +\infty\,, \quad x_n'' = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ i

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n') = \lim_{n\to+\infty} \sin n\pi = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$
$\lim_{n\to+\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

Tw. (o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji)

Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, to istnieją granice:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad g(x) \neq 0,\ b \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$$

Tw. (o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji)

Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, to istnieją granice:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad g(x) \neq 0,\ b \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$$

W powyższym twierdzeniu granice można zastąpić przez $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

PODSTAWOWE GRANICE:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

PODSTAWOWE GRANICE:

$$(1) \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(2) \qquad \forall\, a>0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

PODSTAWOWE GRANICE:

$$(1) \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(2) \qquad \forall\, a>0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$(3) \qquad \forall\, r\in\mathbb{R} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r$$

PODSTAWOWE GRANICE:

$$(1) \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(2) \qquad \forall\, a>0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$(3) \qquad \forall\, r\in\mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r$$

$$(4) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \\ \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\} \text{Podstawiamy } t = \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\}$ Podstawiamy $t = \frac{1}{x}$. Wtedy

$$\left.\begin{array}{l} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} t\to 0^+ \\ t\to 0^- \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\} \text{Podstawiamy } t = \frac{1}{x}. \text{ Wtedy}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} t \to 0^+ \\ t \to 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \\ \lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\} \text{Podstawiamy } t = \tfrac{1}{x}.\ \text{Wtedy}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} t \to 0^+ \\ t \to 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \\ \lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Przykład:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{-2x}{x}} = e^{-2}$$

$$\forall\, a > 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{2}$$

Jeśli $a = 1$ to równość jest spełniona.

Dla $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ wprowadźmy zmienną $t = a^x - 1$, wtedy $x \to 0 \iff t \to 0$

$a^x = 1 + t \iff x \ln a = \ln(1+t) \iff x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$, stąd

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} =$
$\frac{\ln a}{\lim_{t\to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} == \frac{\ln a}{\ln \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r. \tag{3}$$

Jeśli $r = 0$, to równość jest spełniona.

Jeśli $r \neq 0$ to $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot \frac{r\ln(1+x)}{x} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot r \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r. \tag{3}$$

Jeśli $r = 0$, to równość jest spełniona.

Jeśli $r \neq 0$ to $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot \frac{r\ln(1+x)}{x} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot r \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r. \tag{3}$$

Jeśli $r = 0$, to równość jest spełniona.

Jeśli $r \neq 0$ to $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} \cdot \frac{r\ln(1+x)}{x} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} \cdot r \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

Podstawiamy $t = r\ln(1+x)$. Wtedy $x \to 0 \iff t \to 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1$ (skorzystaliśmy z (2)).

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r. \tag{3}$$

Jeśli $r = 0$, to równość jest spełniona.

Jeśli $r \neq 0$ to $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot \frac{r\ln(1+x)}{x} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} \cdot r \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

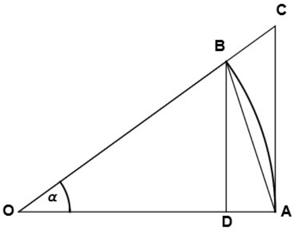
Podstawiamy $t = r\ln(1+x)$. Wtedy $x \to 0 \iff t \to 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \ln e = 1$ (skorzystaliśmy z (2)).
$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ (skorzystaliśmy z (1)).
Dlatego na podstawie powyższych i równania (4) otrzymujemy (3)

Potrzebne nam będą następujące nierówności:
Dla $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzą nierówności

(a) $\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$

(b) $\cos\alpha \geqslant 1 - |\alpha|$

(a) Dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rozważmy wycinek kołowy OAB o promieniu r oraz trójkąt OAB wpisany w niego oraz trójkąt prostokątny OAC.



$|OA| = |OB| = r$, $|BD| = r \sin\alpha$, $|AC| = r\ \mathrm{tg}\alpha$
$P_{\triangle OAB} < P_{\text{wycinka}\, OAB} < P_{\triangle OAC}$
$\frac{1}{2} r \cdot r \sin\alpha < \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha < \frac{1}{2} r \cdot r \,\mathrm{tg}\,\alpha$

$\frac{1}{2}r^2 \sin\alpha < \frac{1}{2}r^2\alpha < \frac{1}{2}r^2 \mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$
Dla $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow -\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i korzystamy z parzystości i nieparzystości funkcji trygonometrycznych.
$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1$
Stąd $\quad \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$
(b) $0 \leqslant 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant 2|\sin\frac{\alpha}{2}| \leqslant 2 \cdot \frac{|\alpha|}{2} = |\alpha|$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff$
$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in D \quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} - 1| < \varepsilon$

Korzystamy z nierówności $\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$ i $\cos\alpha \geqslant 1 - |\alpha|$

$|\frac{\sin x}{x} - 1| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \leqslant |x| < \varepsilon$ i wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

Symbole nieoznaczone - przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

Symbole nieoznaczone - przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \ln 3 \cdot 1 = \ln 3$

Symbole nieoznaczone - przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \ln 3 \cdot 1 = \ln 3$

(3) $[\infty \cdot 0]$: $\lim_{x\to\infty}(2x+1)\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$

Symbole nieoznaczone - przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \ln 3 \cdot 1 = \ln 3$

(3) $[\infty \cdot 0]$: $\lim_{x\to\infty}(2x+1)\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$

(4) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

W powyższych przykładach korzystaliśmy z wzorów
$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

W powyższych przykładach korzystaliśmy z wzorów
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(5) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \iff \forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,x \quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$

$1 - \cos x \leqslant |x| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

W powyższych przykładach korzystaliśmy z wzorów
$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(5) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$

$1 - \cos x \leqslant |x| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

(6) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sin x| < \varepsilon$

$|\sin x| < |x| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

W powyższych przykładach korzystaliśmy z wzorów
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(5) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$

$1 - \cos x \leqslant |x| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

(6) $\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x\quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sin x| < \varepsilon$

$|\sin x| < |x| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

(7) $[\infty - \infty]$: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) =$
$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$
$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

(8) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)} = \left\| \begin{array}{c} y = \operatorname{arctg}(x+2) \\ x+2 = \operatorname{tg} y \\ x \to -2 \iff y \to 0 \end{array} \right\| =$

$= \lim_{y\to 0} \frac{(\operatorname{tg} y-2)^2-4}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y(\operatorname{tg} y-4)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\operatorname{tg} y-4}{\cos y} =$
$= 1 \cdot (-4) = -4$

(8) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)} = \left\| \begin{array}{c} y=\operatorname{arctg}(x+2) \\ x+2=\operatorname{tg} y \\ x\to -2 \iff y\to 0 \end{array} \right\| =$

$= \lim_{y\to 0}\frac{(\operatorname{tg} y-2)^2-4}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y(\operatorname{tg} y-4)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\operatorname{tg} y-4}{\cos y} =$
$= 1\cdot(-4) = -4$

(9) $[0\cdot\infty]$: $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \left\| \begin{array}{c} y=1-x \\ x=1-y \\ x\to 1 \iff y\to 0 \end{array} \right\| =$

$\lim_{y\to 0} y\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-y)}{2}\right) = \lim_{y\to 0} y\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right) =$
$\lim_{y\to 0} y\ \left(-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi y}{2}\right)\right) = \lim_{y\to 0} y\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi y}{2}\right) =$
$\lim_{y\to 0}\cos(\frac{\pi}{2}y)\cdot\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin(\frac{\pi}{2}y)}\cdot\frac{2}{\pi} = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$, $\left(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\right)$

Ciągłość funkcji

Definicja Heinego

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli

$$\forall\,(x_n) \subset D \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Ciągłość funkcji

Definicja Heinego

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli

$$\forall (x_n) \subset D \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Definicja Cauchy'ego

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ciągłość funkcji

Definicja Heinego

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli

$$\forall (x_n) \subset D \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Definicja Cauchy'ego

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Zakładamy, że $x_0 \in D$, nie zakładamy, że x_0 jest punktem skupienia zbioru D (może być, ale nie musi) i że $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \neq x_0$.

Definicja

Funkcja jest ciągła w zbiorze $A \subset D$, jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie.
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła jeśli jest ciągła w D.

Definicja

Funkcja jest ciągła w zbiorze $A \subset D$, jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie.
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła jeśli jest ciągła w D.

Przykłady:

(1) $f(x) = x$ jest ciągła.
Dowód: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$.

Definicja

Funkcja jest ciągła w zbiorze $A \subset D$, jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie.
Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła jeśli jest ciągła w D.

Przykłady:

(1) $f(x) = x$ jest ciągła.
Dowód: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$.

(2) $f(x) = c \in \mathbb{R}$ jest ciągła.
Dowód: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) = c \to c = f(x_0)$.

Uwaga

(1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia dziedziny D funkcji $f(x)$, to f jest ciągła w x_0 $\iff$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(2) Jeśli x_0 jest punktem izolowanym dziedziny D funkcji $f(x)$, to f jest ciągła w x_0 (Jeżeli $(x_n) \subset D$ to $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \iff \exists N > 0 \; \forall n > N \; x_n = x_0$).

Przykłady:

(1) $f(x) = \sin x$ jest ciągła (w $D = \mathbb{R}$).
Dowód: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Trzeba pokazać, że

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

$|\sin x - \sin x_0| = |2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}| \leqslant 2|\sin \frac{x - x_0}{2}| \leqslant$
$\leqslant 2|\frac{x - x_0}{2}| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \varepsilon$

Wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła w 0 $\iff$ $a = 1$.

Dowód: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \iff a = 0$.

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła w 0 $\iff$ $a = 1$.

Dowód: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \iff a = 0$.

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągła.

Dowód. Niech $x_0 \neq 0$. Niech $(x_n) \subset D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}$.

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła w 0 $\iff$ $a = 1$.

Dowód: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \iff a = 0$.

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągła.

Dowód. Niech $x_0 \neq 0$. Niech $(x_n) \subset D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}$.

(4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ jest nieciągła w $x = 0$ dla dowolnej wartości $a \in \mathbb{R}$.

Dowód: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ - nie istnieje.

Twierdzenie (o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie skupienia $x_0 \in D$ dziedziny D i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ taki, że funkcja f ma w zbiorze $D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ taki sam znak jak $f(x_0)$.

Twierdzenie (o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie skupienia $x_0 \in D$ dziedziny D i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ taki, że funkcja f ma w zbiorze $D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ taki sam znak jak $f(x_0)$.

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych)

Suma, różnica, iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.
Jeśli f i g są ciągłe w x_0 i $g(x_0) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest funkcją ciągłą w x_0.

Z powyższego twierdzenia oraz z ciągłości funkcji $f(x) = x$ i $g(x) = c \in \mathbb{R}$ wynika ciągłość wielomianów i funkcji wymiernych $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (gdzie P i Q są wielomianami) w ich dziedzinach.

Z powyższego twierdzenia oraz z ciągłości funkcji $f(x) = x$ i $g(x) = c \in \mathbb{R}$ wynika ciągłość wielomianów i funkcji wymiernych $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (gdzie P i Q są wielomianami) w ich dziedzinach.

- Ciągłość a^x , $a > 0$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \ \wedge \ \lim_{x\to 0} x = 0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(a^x - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \cdot x = \ln a \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} \cdot a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot 1 =$$
$$= a^{x_0} \Rightarrow a^x \text{ - ciągła } \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow a^x \text{ - ciągła w } \mathbb{R}$$

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i funkcja $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = h[f(x)] = (h \circ f)(x)$ jest ciągła w x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i funkcja $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = h[f(x)] = (h \circ f)(x)$ jest ciągła w x_0.

- Ciągłość funkcji trygonometrycznych.

Pokazaliśmy, że fukcja $\sin x$ jest ciągła.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i funkcja $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = h[f(x)] = (h \circ f)(x)$ jest ciągła w x_0.

• Ciągłość funkcji trygonometrycznych.
Pokazaliśmy, że fukcja $\sin x$ jest ciągła.
Funkcja $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ jest ciągła, bo jest złożeniem funkcji ciągłych $f(x) = x + \pi/2$ i $g(x) = \sin x$.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i funkcja $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = h[f(x)] = (h \circ f)(x)$ jest ciągła w x_0.

• Ciągłość funkcji trygonometrycznych.
Pokazaliśmy, że fukcja $\sin x$ jest ciągła.
Funkcja $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ jest ciągła, bo jest złożeniem funkcji ciągłych $f(x) = x + \pi/2$ i $g(x) = \sin x$.
Funkcje $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ są ciągłe z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca (malejąca) na przedziale $A \subset \mathbb{R}$, to $f(A)$ jest przedziałem oraz funkcja f^{-1} odwrotna do f jest ciągła i rosnąca (malejąca) na przedziale $f(A)$.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca (malejąca) na przedziale $A \subset \mathbb{R}$, to $f(A)$ jest przedziałem oraz funkcja f^{-1} odwrotna do f jest ciągła i rosnąca (malejąca) na przedziale $f(A)$.

Z powyższego twierdzenia wynika ciągłość funckcji logarytmicznych i cyklometrycznych:

$$\log_a x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \mathrm{arctg}\, x,\ \mathrm{arcctg}\, x$$

Przykłady:

(1) $\varphi(x) = \sin(x^2+1)\,, \quad \varphi = h \circ f$

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = x^2+1 \\ h(u) = \sin u \end{array}\right\} \text{ - funkcje ciągłe} \Rightarrow \varphi \text{ - ciągła } \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

(2) $\psi(x) = 2^{\sin(x^2+1)}$, $\psi = g \circ \varphi$

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x) = \sin(x^2+1) \\ g(v) = 2^v \end{array}\right\} \text{ - funkcje ciągłe} \Rightarrow \psi \text{ - ciągła } \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

(2) $\psi(x) = 2^{\sin(x^2+1)}$, $\psi = g \circ \varphi$

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x) = \sin(x^2+1) \\ g(v) = 2^v \end{array}\right\} \text{ - funkcje ciągłe} \Rightarrow \psi \text{ - ciągła } \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie (o wprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłej)

Jeśli istnieje granica właściwa $\lim_{x\to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R}$ i funkcja $h(u)$ jest ciągła w punkcie $u_0 = g$, to

$$\lim_{x\to x_0} h[f(x)] = h[\lim_{x\to x_0} f(x)] = h(g)$$

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} =$
$= e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{b\cdot \ln a} = a^b$,
o ile $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, $a > 0$.

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} =$
$= e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{b\cdot\ln a} = a^b$,
o ile $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, $a > 0$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_a(1+x) =$
$= \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} =$
$= e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{b\cdot\ln a} = a^b$,
o ile $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, $a > 0$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_a(1+x) =$
$= \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

(3)
$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\sin \pi x}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0}\left(\pi\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)\right) = \cos(\pi\cdot 1) = -1$

Twierdzenie (Darboux)

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ oraz liczba d zawarta jest między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $d = f(c)$.

Twierdzenie (Darboux)

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ oraz liczba d zawarta jest między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $d = f(c)$.

Przykłady:

(1) Równanie $\sin x - x + 1 = 0$ ma pierwiastek, bo
$f(x) = \sin x - x + 1$ - ciągła i np. $f(0) = 1 > 0$ i
$f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{3}{2}\pi < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, \frac{3}{2}\pi) \quad f(c) = 0$

Twierdzenie (Darboux)

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ oraz liczba d zawarta jest między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $d = f(c)$.

Przykłady:

(1) Równanie $\sin x - x + 1 = 0$ ma pierwiastek, bo $f(x) = \sin x - x + 1$ - ciągła i np. $f(0) = 1 > 0$ i $f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{3}{2}\pi < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, \frac{3}{2}\pi) \quad f(c) = 0$

(2) Funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \sin \pi x + 3$ przyjmuje wartość $2\frac{2}{3}$ w przedziale $(-2, 2)$, bo f jest ciągła, $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$ i $2\frac{2}{3} \in (1, 5) \Rightarrow \exists\, c \in (-2, 2) \quad f(c) = 2\frac{2}{3}$

Twierdzenie (Weierstrassa)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domnkniętym $[a, b]$, to jest w tym przedziale ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a, b] \qquad |f(x)| \leqslant M$$

$$\exists\, c_1, c_2 \in [a, b] \qquad f(c_1) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad f(c_2) = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

Twierdzenie (Weierstrassa)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domnkniętym $[a, b]$, to jest w tym przedziale ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a, b] \qquad |f(x)| \leqslant M$$

$$\exists\, c_1, c_2 \in [a, b] \qquad f(c_1) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad f(c_2) = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

Uwaga:

Funkcja ciągła w przedziale otwartym nie musi być ograniczona i nie musi przyjmować swoich kresów, np.
$f(x) = \frac{1}{x}\,,\ g(x) = x\,,\ x \in (0, 1)$.

Punkty nieciągłości

Punkty nieciągłości

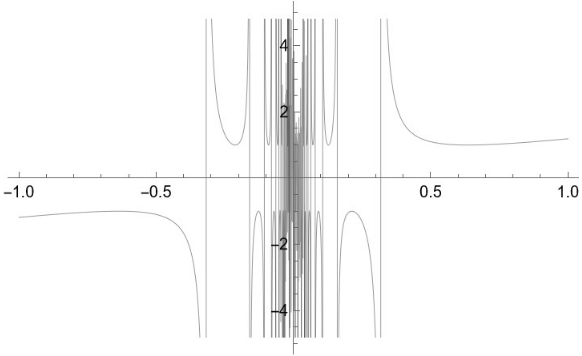
Definicja

Punkt x_0, w którym funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest nie jest ciągła i jest ciągła w zbiorze $((x_0 - r, x_0 + r) \cap D) \setminus \{x_0\}$ dla pewnego $r > 0$ nazywamy *izolowanym punktem nieciągłości* tej funkcji.

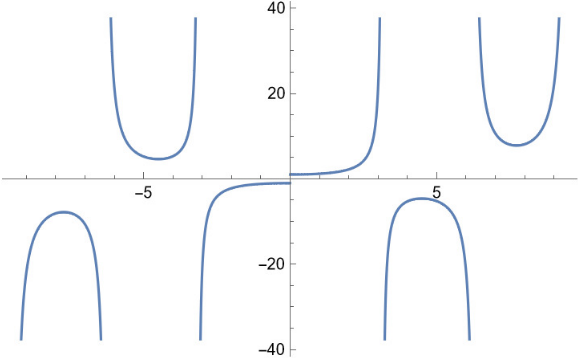
Punkty nieciągłości dzielimy na dwa rodzaje:
– I-go rodzaju, gdy istnieją granice jednostronne właściwe w tym punkcie
– II-go rodzaju - pozostałe punkty nieciągłości

Przykłady:

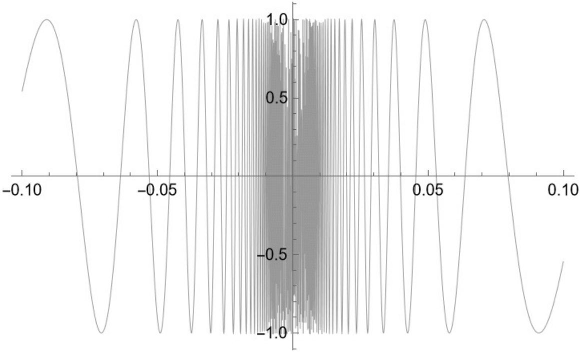
(1) Dla funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} & x \neq \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = 0 \vee x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ punkt $x = 0$ jest punktem nieciągłości, który nie jest izolowany, bo $lim_{x \to \frac{1}{k\pi}} f(x)$ nie istnieje oraz $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$. Punkty $x_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ są izolowanymi punktami nieciągłości II rodzaju.



(2)Dla funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sin x} & x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ punkt $x = 0$ jest punktem nieciągłości I-go rodzaju (granice jednostronne są właściwe, ale różne), a punkty $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ są punktami nieciągłości II-go rodzaju.



(3)Dla funkcji $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ punkt $x = 0$ jest punktem nieciągłości II-go rodzaju, bo nie istnieje granica funcji f w 0.
Niech $y \in [-1; 1]$. Wtedy istnieje α taka, że $\sin\alpha = y$. Niech $x_n = \frac{1}{\alpha + 2n\pi}$ wtedy $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ i
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\alpha + 2n\pi) = \lim_{n\to\infty} \sin\alpha = \sin\alpha = y$.
Czyli $\forall\ y \in [-1; 1]\ \exists\ (x_n)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.



(4) Funkcja Dirichleta $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

(4) Funkcja Dirichleta $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Dowód: Załóżmy, że f jest ciągła w x_0. Niech $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dla dowolnego $\delta > 0$ w zbiorze $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ istnieje liczba wymierna i niewymierna. Niech to będą $x_1 \in \mathbb{Q} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ oraz $x_2 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wtedy $f(x_1) = 1$ oraz $f(x_2) = 0$. Stąd $|f(x_1) - f(x_0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ albo $|f(x_2) - f(x_0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$. Jest to sprzeczne z założeniem ciągłości f w x_0.