

Analiza matematyczna

Funkcje, granice i ciągłość funkcji

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Definicje

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy dowolny przedział otwarty zawierający x_0 tzn. taki przedział (a, b) , że $a < x_0 < b$.

Definicje

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy dowolny przedział otwarty zawierający x_0 tzn. taki przedział (a, b) , że $a < x_0 < b$. Niech $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru A , jeśli w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt zbioru A różny od x_0 :

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in A \quad 0 < |x - x_0| < r.$$

Punkt x_0 nazywamy *punktem izolowanym* zbioru A , jeśli $x_0 \in A$ i x_0 nie jest punktem skupienia A .

Definicje

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy dowolny przedział otwarty zawierający x_0 tzn. taki przedział (a, b) , że $a < x_0 < b$. Niech $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru A , jeśli w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt zbioru A różny od x_0 :

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in A \quad 0 < |x - x_0| < r.$$

Punkt x_0 nazywamy *punktem izolowanym* zbioru A , jeśli $x_0 \in A$ i x_0 nie jest punktem skupienia A .

Twierdzenie

Punkt x_0 jest punktem skupienia A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że

$$x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad x_n \rightarrow x_0.$$

Definicja Heinego (granica właściwa)

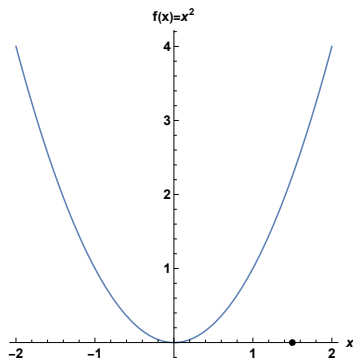
Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D . Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow g.$$

Definicja Heinego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

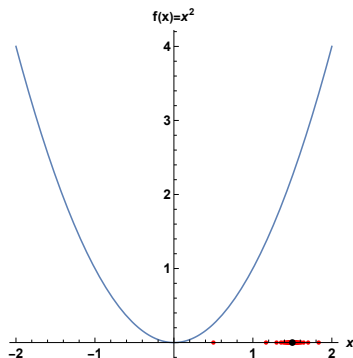
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow g.$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

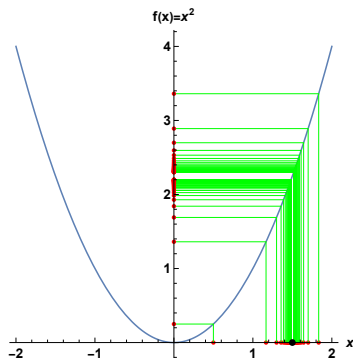
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow g.$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

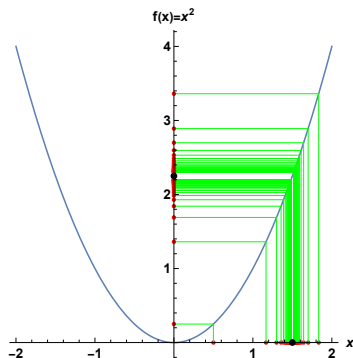
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow g.$$



Definicja Heinego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow g.$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

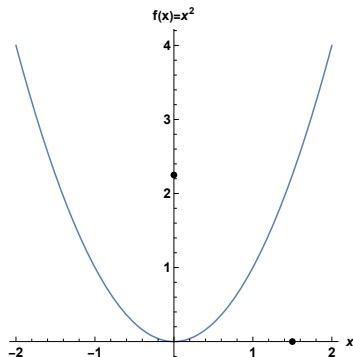
Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

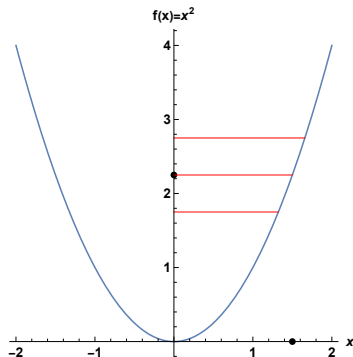
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

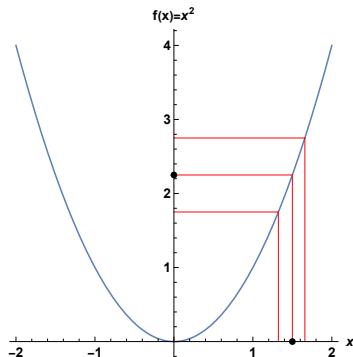
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

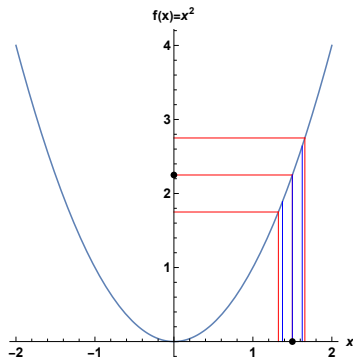
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

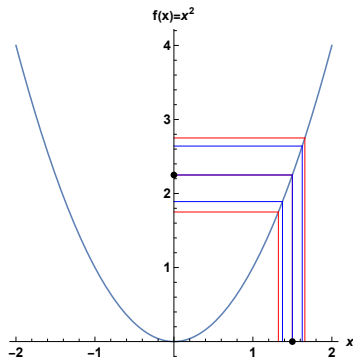
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Cauchy'ego (granica właściwa)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ zachodzi, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

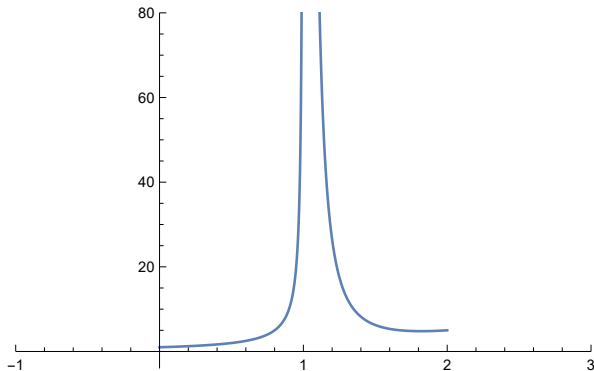
Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow +\infty.$$

Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

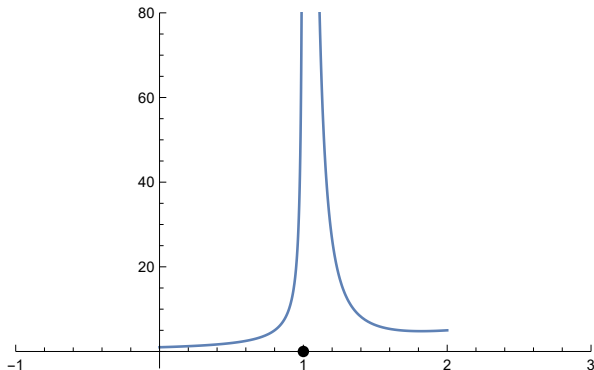
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow +\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D . Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

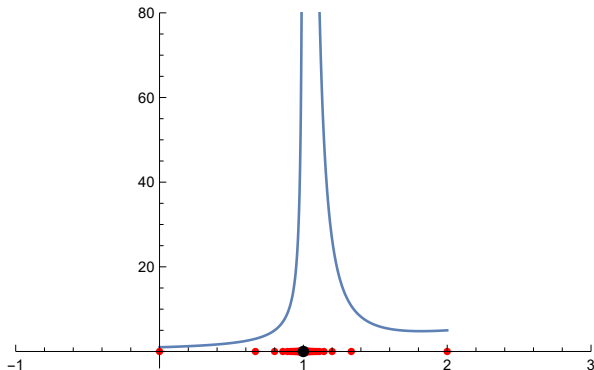
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow +\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

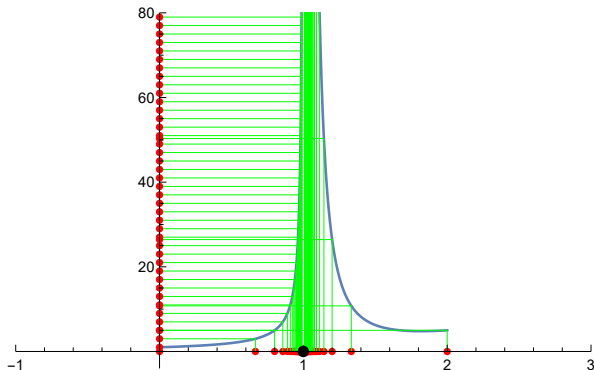
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow +\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow +\infty.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

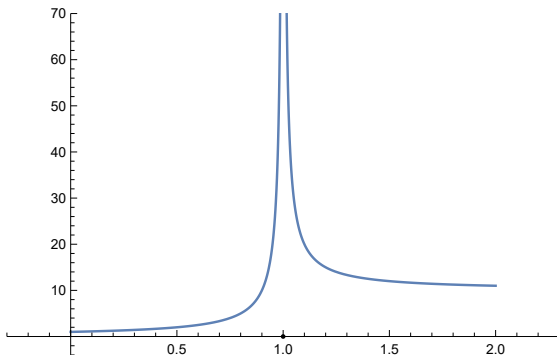
Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

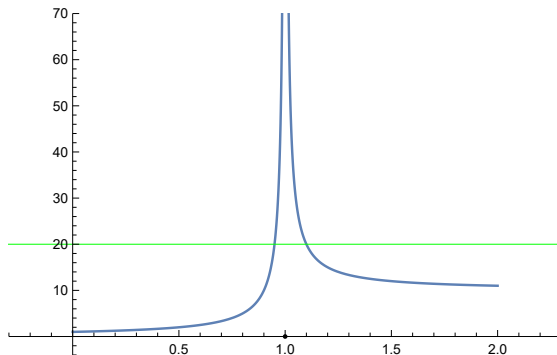
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

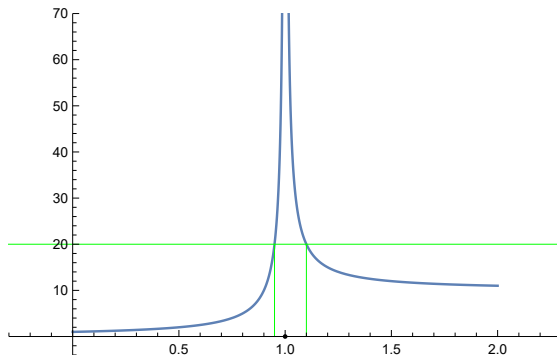
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

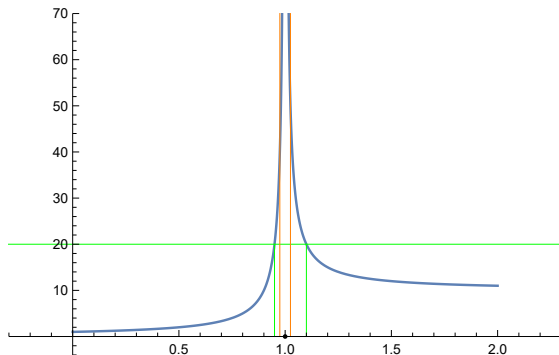
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

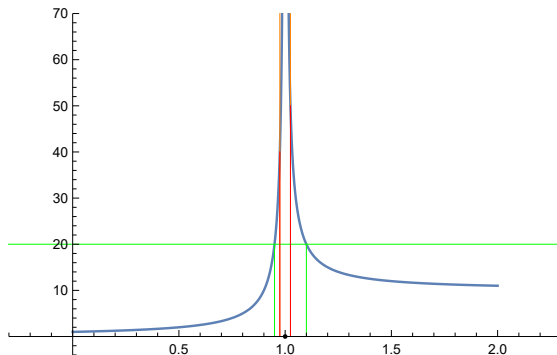
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ zachodzi, jeśli

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

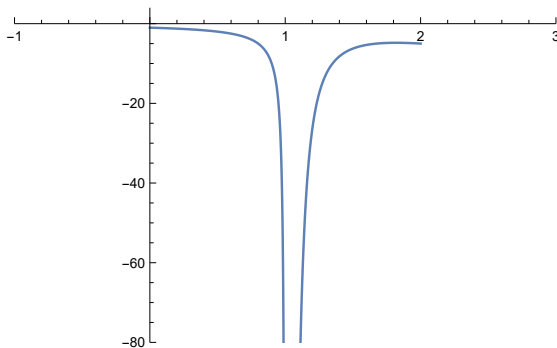
Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D . Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$

Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

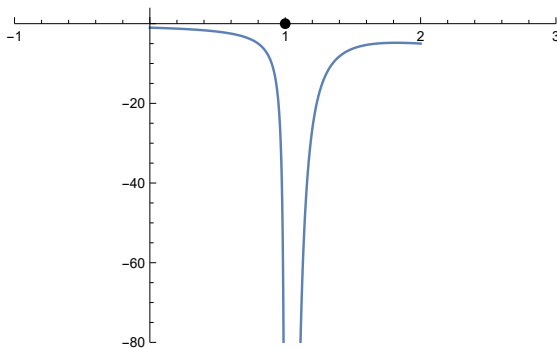
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

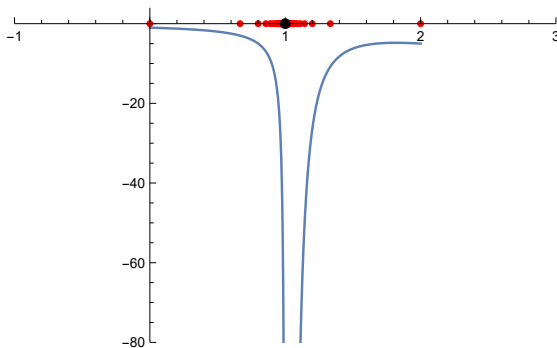
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

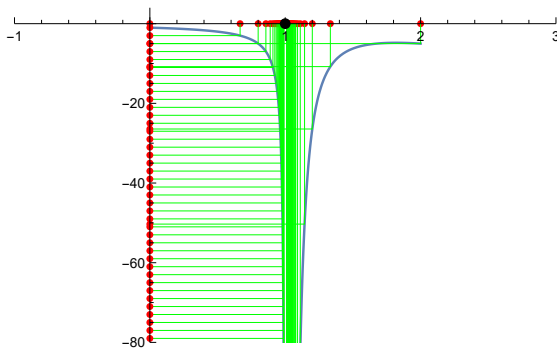
$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$



Definicja Heinego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$



Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa $-\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D .
Równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ zachodzi, jeśli

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, a -2 jest jej punktem skupienia. Dla $M > 0$ i $x \neq -2$ mamy

$$\frac{1}{(x+2)^2} > M \iff 0 < |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Wystarczy więc przyjąć $\delta = 1/\sqrt{M}$.

Przykłady:

(1) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$.

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, a -2 jest jej punktem skupienia. Dla $M > 0$ i $x \neq -2$ mamy

$$\frac{1}{(x+2)^2} > M \iff 0 < |x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Wystarczy więc przyjąć $\delta = 1/\sqrt{M}$.

(2) Z definicji Heinego obliczyć $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4}$.

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{-4/5\}$, a 2 jest jej punktem skupienia. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach z $D \setminus \{2\}$ takim, że $x_n \rightarrow 2$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2},$$

ponieważ granica mianownika wynosi $14 \neq 0$. Z definicji Heinego szukana granica jest równa $1/2$.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} = 1.$$

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a 1 jest jej punktem skupienia.

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} = 1.$$

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a 1 jest jej punktem skupienia.

Dla $x \neq 1$ zachodzi

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} - 1 \right| = \left| \frac{x + 1}{2} - 1 \right| = \frac{|x - 1|}{2}.$$

(3) Z definicji Cauchy'ego wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} = 1.$$

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a 1 jest jej punktem skupienia.
Dla $x \neq 1$ zachodzi

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} - 1 \right| = \left| \frac{x + 1}{2} - 1 \right| = \frac{|x - 1|}{2}.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wybieramy $\delta = 2\varepsilon$. Wówczas

$$0 < |x - 1| < \delta \implies \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

To dowodzi żądanej granicy. □

Niech $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia D .

Twierdzenie

(1) Dla $L \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|.$$

(2) Jeśli istnieje $r > 0$ takie, że dla $x \in D$, $0 < |x - x_0| < r$, mamy $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = K \in \mathbb{R},$$

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$ (twierdzenie o trzech funkcjach).

(3) Jeśli $f(x) \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow x_0$ i istnieją $r, M > 0$ takie, że

$$x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < r \implies |g(x)| \leq M,$$

to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$.

Uwaga

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli istnieją ciągi (x_n) i (y_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ takie, że

$$x_n \rightarrow x_0, \quad y_n \rightarrow x_0,$$

a ciągi $(f(x_n))$ i $(f(y_n))$ mają różne granice (właściwe lub niewłaściwe), to f nie ma granicy w x_0 .

Uwaga

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli istnieją ciągi (x_n) i (y_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ takie, że

$$x_n \rightarrow x_0, \quad y_n \rightarrow x_0,$$

a ciągi $(f(x_n))$ i $(f(y_n))$ mają różne granice (właściwe lub niewłaściwe), to f nie ma granicy w x_0 .

Przykład: granica $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ nie istnieje, ponieważ

$$\begin{aligned} x_n = 1/n &\rightarrow 0, & f(x_n) = n &\rightarrow +\infty, \\ y_n = -1/n &\rightarrow 0, & f(y_n) = -n &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Uwaga

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli istnieją ciągi (x_n) i (y_n) o wyrazach z $D \setminus \{x_0\}$ takie, że

$$x_n \rightarrow x_0, \quad y_n \rightarrow x_0,$$

a ciągi $(f(x_n))$ i $(f(y_n))$ mają różne granice (właściwe lub niewłaściwe), to f nie ma granicy w x_0 .

Przykład: granica $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ nie istnieje, ponieważ

$$\begin{aligned} x_n = 1/n &\rightarrow 0, & f(x_n) = n &\rightarrow +\infty, \\ y_n = -1/n &\rightarrow 0, & f(y_n) = -n &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Definicja

Dla $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $A \subseteq D$ funkcję $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$, określoną wzorem $(f|_A)(x) = f(x)$ dla $x \in A$, nazywamy *ograniczeniem (obcięciem)* funkcji f do zbioru A .

Definicja granic jednostronnych

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$. Oznaczmy

$$D_- = D \cap (-\infty, x_0), \quad D_+ = D \cap (x_0, +\infty).$$

Jeśli x_0 jest punktem skupienia D_- , to *granicą lewostronną* funkcji f w x_0 nazywamy granicę jej ograniczenia do D_- :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D_-})(x).$$

Jeśli x_0 jest punktem skupienia D_+ , to analogicznie definiujemy *granicę prawostronną*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D_+})(x).$$

Granice jednostronne mogą być właściwe lub niewłaściwe.

Twierdzenie

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia zarówno $D \cap (-\infty, x_0)$, jak i $D \cap (x_0, +\infty)$. Granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne istnieją i są równe. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dotyczy to granic właściwych i niewłaściwych.

Twierdzenie

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia zarówno $D \cap (-\infty, x_0)$, jak i $D \cap (x_0, +\infty)$. Granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne istnieją i są równe. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dotyczy to granic właściwych i niewłaściwych.

Przykład: granica $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ nie istnieje, ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a zbiór D będzie nieograniczony z góry.

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa w $+\infty$)

Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > K \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a zbiór D będzie nieograniczony z góry.

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa w $+\infty$)

Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > K \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Definicja Heinego (granica właściwa w $+\infty$)

Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$ oznacza, że dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D

$$x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow g.$$

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a zbiór D będzie nieograniczony z góry.

Definicja Cauchy'ego (granica właściwa w $+\infty$)

Dla $g \in \mathbb{R}$ równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > K \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Definicja Heinego (granica właściwa w $+\infty$)

Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$ oznacza, że dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D

$$x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow g.$$

Definicja Heinego (granica niewłaściwa w $+\infty$)

Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ oznacza, że dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D

$$x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow -\infty.$$

Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa w $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a D będzie nieograniczony z góry. Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ oznacza, że

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > K \implies f(x) < -M.$$

Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa w $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a D będzie nieograniczony z góry. Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ oznacza, że

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > K \implies f(x) < -M.$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $\pm\infty$ definiujemy analogicznie. Przy $x \rightarrow -\infty$ wymagamy, aby D był nieograniczony z dołu, i zastępujemy warunek $x > K$ warunkiem $x < -K$.

Definicja Cauchy'ego (granica niewłaściwa w $+\infty$)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a D będzie nieograniczony z góry. Równość $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ oznacza, że

$$\forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > K \implies f(x) < -M.$$

Pozostałe granice właściwe i niewłaściwe w $\pm\infty$ definiujemy analogicznie. Przy $x \rightarrow -\infty$ wymagamy, aby D był nieograniczony z dołu, i zastępujemy warunek $x > K$ warunkiem $x < -K$.

Przykład: granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ nie istnieje. Dla ciągów

$$x_n = n\pi \rightarrow +\infty, \quad y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty$$

mamy $\sin x_n = 0$ oraz $\sin y_n = 1$. Ich granice są różne.

Twierdzenie o działaniach na granicach funkcji

Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia D . Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca.$$

Jeśli $b \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że $g(x) \neq 0$ dla $x \in D$,
 $0 < |x - x_0| < r$. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Twierdzenie o działaniach na granicach funkcji

Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia D . Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca.$$

Jeśli $b \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że $g(x) \neq 0$ dla $x \in D$,
 $0 < |x - x_0| < r$. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Twierdzenie obowiązuje również dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, przy odpowiednich założeniach dotyczących dziedziny.

Podstawowe granice:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

W (1) i (3) rozpatrujemy $x > -1$, $x \neq 0$. Argumenty funkcji trygonometrycznych mierzymy w radianach.

Podstawowe granice:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

W (1) i (3) rozpatrujemy $x > -1$, $x \neq 0$. Argumenty funkcji trygonometrycznych mierzymy w radianach.

Podstawowe granice:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbb{R}).$$

W (1) i (3) rozpatrujemy $x > -1$, $x \neq 0$. Argumenty funkcji trygonometrycznych mierzymy w radianach.

Podstawowe granice:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbb{R}).$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

W (1) i (3) rozpatrujemy $x > -1$, $x \neq 0$. Argumenty funkcji trygonometrycznych mierzymy w radianach.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (1)$$

Z poznanych wcześniej granic ciągów i definicji Heinego wynika, że

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (1)$$

Z poznanych wcześniej granic ciągów i definicji Heinego wynika, że

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

Podstawmy $t = 1/u$. Wtedy $u \rightarrow +\infty$ odpowiada $t \rightarrow 0^+$, a $u \rightarrow -\infty$ odpowiada $t \rightarrow 0^-$. Stąd

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{1/t} = e,$$

co daje granicę dwustronną (1).

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (1)$$

Z poznanych wcześniej granic ciągów i definicji Heinego wynika, że

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

Podstawmy $t = 1/u$. Wtedy $u \rightarrow +\infty$ odpowiada $t \rightarrow 0^+$, a $u \rightarrow -\infty$ odpowiada $t \rightarrow 0^-$. Stąd

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{1/t} = e,$$

co daje granicę dwustronną (1). Przykład (dla $x \neq 0$ i dostatecznie bliskich 0):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-2x)^{-1/(2x)} \right]^{-2} = e^{-2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0). \quad (2)$$

Korzystamy z ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmicznej; jej niezależne uzasadnienie podajemy w dalszej części wykładu.

Dla $a = 1$ iloraz jest równy $0 = \ln 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0). \quad (2)$$

Korzystamy z ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmicznej; jej niezależne uzasadnienie podajemy w dalszej części wykładu.

Dla $a = 1$ iloraz jest równy $0 = \ln 1$. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, podstawmy $t = a^x - 1$. Wtedy $t \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow 0$ oraz

$$x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}, \quad t > -1, \quad t \neq 0 \text{ dla } x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0). \quad (2)$$

Korzystamy z ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmicznej; jej niezależne uzasadnienie podajemy w dalszej części wykładu.

Dla $a = 1$ iloraz jest równy $0 = \ln 1$. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, podstawmy $t = a^x - 1$. Wtedy $t \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow 0$ oraz

$$x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}, \quad t > -1, \quad t \neq 0 \text{ dla } x \neq 0.$$

Z (1) i ciągłości logarytmu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln a}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln((1+t)^{1/t})} \\ &= \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Dla $r = 0$ iloraz jest równy 0.

Dla $r \neq 0$, $x > -1$ i $x \neq 0$ podstawmy $t = r \ln(1+x)$. Wtedy $t \neq 0$ oraz $t \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow 0$ i

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} = \frac{e^t - 1}{t} \cdot r \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Dla $r = 0$ iloraz jest równy 0.

Dla $r \neq 0$, $x > -1$ i $x \neq 0$ podstawmy $t = r \ln(1+x)$. Wtedy $t \neq 0$ oraz $t \rightarrow 0$ przy $x \rightarrow 0$ i

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} = \frac{e^t - 1}{t} \cdot r \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad (4)$$

Na podstawie (2) dla $a = e$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Natomiast z (1) i ciągłości logarytmu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{1/x}) = \ln e = 1.$$

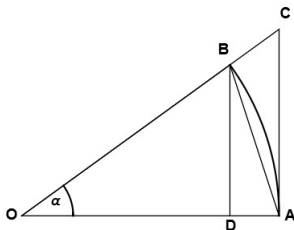
Zatem granica iloczynu w (4) wynosi $1 \cdot r \cdot 1 = r$.

Potrzebne będą następujące nierówności. Dla $\alpha \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$, mierzonego w radianach:

$$(a) \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1,$$

$$(b) \quad \cos \alpha \geq 1 - |\alpha|.$$

(a) Dla $0 < \alpha < \pi/2$ rozważmy wycinek koła o środku O , promieniu $r > 0$ i kącie $\angle AOB = \alpha$. Niech C będzie punktem przecięcia półprostej OB ze styczną w punkcie A , a D – rzutem prostokątnym B na OA .



Mamy $|OA| = |OB| = r$, $|BD| = r \sin \alpha$ oraz $|AC| = r \operatorname{tg} \alpha$. Porównanie pól daje

$$P_{\triangle OAB} < P_{\text{wycinka } OAB} < P_{\triangle OAC},$$

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha < \frac{1}{2}r^2 \alpha < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

(a) Dla $0 < \alpha < \pi/2$ otrzymujemy

$$\sin \alpha < \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{więc} \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

Jeśli $-\pi/2 < \alpha < 0$, to $0 < -\alpha < \pi/2$, zatem

$$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1.$$

Z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa otrzymujemy $\cos \alpha < \sin \alpha / \alpha < 1$ także dla ujemnych α .

(a) Dla $0 < \alpha < \pi/2$ otrzymujemy

$$\sin \alpha < \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{więc} \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

Jeśli $-\pi/2 < \alpha < 0$, to $0 < -\alpha < \pi/2$, zatem

$$\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1.$$

Z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa otrzymujemy $\cos \alpha < \sin \alpha / \alpha < 1$ także dla ujemnych α .

(b) Stosując (a) do $|\alpha|/2$, uzyskujemy $|\sin(\alpha/2)| \leq |\alpha|/2$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\alpha|}{2} = |\alpha|. \end{aligned}$$

Stąd $\cos \alpha \geq 1 - |\alpha|$.



(4) Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dziedziną funkcji jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dla $0 < |x| < \pi/2$ mamy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \cos x \geq 1 - |x|.$$

(4) Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dziedziną funkcji jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dla $0 < |x| < \pi/2$ mamy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \cos x \geq 1 - |x|.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\} > 0$. Jeśli $0 < |x| < \delta$, to

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \leq |x| < \varepsilon.$$

To dowodzi granicy na mocy definicji Cauchy'ego. □

Symbole nieoznaczone – przykłady:

$$\begin{aligned}(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} &= \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1/4} - 1}{t} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}, \quad t = x/16.\end{aligned}$$

Symbole nieoznaczone – przykłady:

$$\begin{aligned}(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} &= \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1/4} - 1}{t} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}, \quad t = x/16.\end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right] = \ln 3.$$

Symbole nieoznaczone – przykłady:

$$\begin{aligned}(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} &= \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1/4} - 1}{t} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}, \quad t = x/16.\end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right] = \ln 3.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(2 + \frac{1}{x} \right) \frac{\sin(1/x)}{1/x} \right] = 2.$$

Symbole nieoznaczone – przykłady:

$$\begin{aligned}(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} &= \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1/4} - 1}{t} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}, \quad t = x/16.\end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right] = \ln 3.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(2 + \frac{1}{x} \right) \frac{\sin(1/x)}{1/x} \right] = 2.$$

$$\begin{aligned}(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Korzystamy ze wzorów

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ wybieramy $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Jeśli $0 < |x| < \delta$, to

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x \leq |x| < \varepsilon.$$

Korzystamy ze wzorów

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ wybieramy $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Jeśli $0 < |x| < \delta$, to

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x \leq |x| < \varepsilon.$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Ten sam wybór δ daje

$$0 < |x| < \delta \implies |\sin x| < |x| < \varepsilon.$$

Korzystamy ze wzorów

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ wybieramy $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Jeśli $0 < |x| < \delta$, to

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x \leq |x| < \varepsilon.$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Ten sam wybór δ daje

$$0 < |x| < \delta \implies |\sin x| < |x| < \varepsilon.$$

(7) Przykład symbolu $\infty - \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

(8) Podstawmy $y = \operatorname{arctg}(x + 2)$, czyli $x + 2 = \operatorname{tg} y$. Wtedy $x \rightarrow -2$ odpowiada $y \rightarrow 0$ i

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{arctg}(x + 2)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y (\operatorname{tg} y - 4)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\sin y}{y} \frac{\operatorname{tg} y - 4}{\cos y} \right] = -4.\end{aligned}$$

(8) Podstawmy $y = \operatorname{arctg}(x + 2)$, czyli $x + 2 = \operatorname{tg} y$. Wtedy $x \rightarrow -2$ odpowiada $y \rightarrow 0$ i

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{arctg}(x + 2)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y (\operatorname{tg} y - 4)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\sin y}{y} \frac{\operatorname{tg} y - 4}{\cos y} \right] = -4.\end{aligned}$$

(9) Podstawmy $y = 1 - x$ i użyjmy tożsamości $\operatorname{tg}(\pi/2 - u) = \operatorname{ctg} u$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\cos \frac{\pi y}{2} \frac{\pi y/2}{\sin(\pi y/2)} \right] = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Ciągłość funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$.

Definicja Heinego

Funkcja f jest *ciągła* w x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D zachodzi

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Ciągłość funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$.

Definicja Heinego

Funkcja f jest *ciągła* w x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D zachodzi

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Definicja Cauchy'ego

Funkcja f jest *ciągła* w x_0 , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ciągłość funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$.

Definicja Heinego

Funkcja f jest *ciągła* w x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z D zachodzi

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Definicja Cauchy'ego

Funkcja f jest *ciągła* w x_0 , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Punkt x_0 należy do dziedziny, ale nie musi być jej punktem skupienia.
Dopuszczamy $x_n = x_0$; w definicji Cauchy'ego dopuszczamy $x = x_0$.

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła* w zbiorze $A \subseteq D$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie A (względem dziedziny D).

Funkcję nazywamy *ciągłą*, jeśli jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła* w zbiorze $A \subseteq D$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie A (względem dziedziny D).

Funkcję nazywamy *ciągłą*, jeśli jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ i każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$ mamy

$$f(x_n) = x_n \rightarrow x_0 = f(x_0).$$

Definicja

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła* w zbiorze $A \subseteq D$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie A (względem dziedziny D).

Funkcję nazywamy *ciągłą*, jeśli jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ i każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$ mamy

$$f(x_n) = x_n \rightarrow x_0 = f(x_0).$$

(2) Funkcja stała $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, jest ciągła na $\mathbb{R}$, ponieważ dla każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$

$$f(x_n) = c \rightarrow c = f(x_0).$$

Uwaga

(1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, to

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uwaga

(1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, to

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(2) W każdym izolowanym punkcie x_0 swojej dziedziny funkcja f jest ciągła. Istotnie, dla ciągu (x_n) o wyrazach z D :

$$x_n \rightarrow x_0 \iff \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n = x_0.$$

Wtedy również $f(x_n) = f(x_0)$ od pewnego miejsca.

(1) Funkcja $f(x) = \sin x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Z poznanych nierówności oraz $|\sin t| \leq 1$ wynika $|\sin t| \leq |t|$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Dla dowolnych $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mamy więc

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|. \end{aligned}$$

(1) Funkcja $f(x) = \sin x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Z poznanych nierówności oraz $|\sin t| \leq 1$ wynika $|\sin t| \leq |t|$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Dla dowolnych $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mamy więc

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|. \end{aligned}$$

Dla $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$. Wówczas $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

(2) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, a $f(0) = a$.

(2) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, a $f(0) = a$.

(3) Funkcja $f(x) = 1/x$ jest ciągła na $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeśli $x_0 \in D$ i (x_n) jest ciągiem o wyrazach z D takim, że $x_n \rightarrow x_0$, to $1/x_n \rightarrow 1/x_0$, ponieważ $x_0 \neq 0$.

(2) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, a $f(0) = a$.

(3) Funkcja $f(x) = 1/x$ jest ciągła na $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeśli $x_0 \in D$ i (x_n) jest ciągiem o wyrazach z D takim, że $x_n \rightarrow x_0$, to $1/x_n \rightarrow 1/x_0$, ponieważ $x_0 \neq 0$.

(4) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

jest nieciągła w 0 dla każdego $a \in \mathbb{R}$, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku

Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D$ i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że

$$x \in D, \quad |x - x_0| < r \quad \implies \quad f(x)f(x_0) > 0.$$

Zatem $f(x)$ ma w tym otoczeniu taki sam znak jak $f(x_0)$.

Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku

Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D$ i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że

$$x \in D, \quad |x - x_0| < r \quad \implies \quad f(x)f(x_0) > 0.$$

Zatem $f(x)$ ma w tym otoczeniu taki sam znak jak $f(x_0)$.

Twierdzenie o działaniach na funkcjach ciągłych

Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe w $x_0 \in D$. Wówczas $f + g$, $f - g$ oraz fg są ciągłe w x_0 .

Jeśli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to iloraz f/g jest ciągły w x_0 na swojej dziedzinie $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Z ciągłości funkcji stałych, funkcji $x \mapsto x$ i twierdzenia o działaniach wynika ciągłość wielomianów na $\mathbb{R}$ oraz funkcji wymiernych P/Q na $\{x : Q(x) \neq 0\}$, gdzie P, Q są wielomianami, $Q \not\equiv 0$.

Z ciągłości funkcji stałych, funkcji $x \mapsto x$ i twierdzenia o działaniach wynika ciągłość wielomianów na $\mathbb{R}$ oraz funkcji wymiernych P/Q na $\{x : Q(x) \neq 0\}$, gdzie P, Q są wielomianami, $Q \not\equiv 0$.

Ciągłość funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$ dla $a > 0$.

Dla $a > 1$ z monotoniczności potęgowania otrzymujemy

$$|h| < \frac{1}{n} \implies a^{-1/n} \leq a^h \leq a^{1/n}.$$

Ponieważ $a^{1/n} \rightarrow 1$ i $a^{-1/n} \rightarrow 1$, dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać n tak, aby oba oszacowania różniły się od 1 o mniej niż ε . Stąd $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = 1$.

Z ciągłości funkcji stałych, funkcji $x \mapsto x$ i twierdzenia o działaniach wynika ciągłość wielomianów na $\mathbb{R}$ oraz funkcji wymiernych P/Q na $\{x : Q(x) \neq 0\}$, gdzie P, Q są wielomianami, $Q \not\equiv 0$.

Ciągłość funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$ dla $a > 0$.

Dla $a > 1$ z monotoniczności potęgowania otrzymujemy

$$|h| < \frac{1}{n} \implies a^{-1/n} \leq a^h \leq a^{1/n}.$$

Ponieważ $a^{1/n} \rightarrow 1$ i $a^{-1/n} \rightarrow 1$, dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać n tak, aby oba oszacowania różniły się od 1 o mniej niż ε . Stąd $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = 1$. Dla $0 < a < 1$ stosujemy ten wynik do $(1/a)^{-h}$, a dla $a = 1$ wynik jest oczywisty. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0+h} = a^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} a^h = a^{x_0}.$$

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Niech $f : D \rightarrow E$ i $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli f jest ciągła w $x_0 \in D$, a h jest ciągła w $f(x_0)$, to $h \circ f$ jest ciągła w x_0 .

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Niech $f : D \rightarrow E$ i $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli f jest ciągła w $x_0 \in D$, a h jest ciągła w $f(x_0)$, to $h \circ f$ jest ciągła w x_0 .

Ciągłość funkcji trygonometrycznych.

Funkcja $\sin x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Zatem $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ również jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Niech $f : D \rightarrow E$ i $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli f jest ciągła w $x_0 \in D$, a h jest ciągła w $f(x_0)$, to $h \circ f$ jest ciągła w x_0 .

Ciągłość funkcji trygonometrycznych.

Funkcja $\sin x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Zatem $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ również jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Z twierdzenia o ilorazie funkcji ciągłych wynika, że

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{jest ciągła na } \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{jest ciągła na } \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym przedziałem. Jeśli funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ściśle monotoniczna, to $f(A)$ jest przedziałem, a funkcja odwrotna $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w tym samym kierunku co f .

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym przedziałem. Jeśli funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ściśle monotoniczna, to $f(A)$ jest przedziałem, a funkcja odwrotna $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w tym samym kierunku co f .

Wynika stąd ciągłość następujących funkcji na podanych dziedzinach:

Funkcja	Dziedzina
$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$(0, +\infty)$
$\arcsin x, \arccos x$	$[-1, 1]$
$\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$

Przykład (1):

$$\varphi(x) = \sin(x^2 + 1) = (h \circ f)(x),$$

gdzie

$$f(x) = x^2 + 1, \quad h(u) = \sin u.$$

Obie funkcje są ciągłe na $\mathbb{R}$, zatem φ również jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Przykład (2):

$$\psi(x) = 2^{\sin(x^2+1)} = (g \circ \varphi)(x),$$

gdzie $\varphi(x) = \sin(x^2 + 1)$ oraz $g(v) = 2^v$. Obie funkcje są ciągłe, zatem ψ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Przykład (2):

$$\psi(x) = 2^{\sin(x^2+1)} = (g \circ \varphi)(x),$$

gdzie $\varphi(x) = \sin(x^2 + 1)$ oraz $g(v) = 2^v$. Obie funkcje są ciągłe, zatem ψ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Twierdzenie o granicy złożenia z funkcją ciągłą

Niech $f : D \rightarrow E$ i $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D, E \subseteq \mathbb{R}$, a x_0 będzie punktem skupienia D . Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in E$ i h jest ciągła w L , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = h(L).$$

Przykłady:

(1) Jeśli $f(x) \rightarrow a > 0$ i $g(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$ przy $x \rightarrow x_0$, to dla x z dziedziny, dostatecznie bliskich x_0 i różnych od x_0 , mamy $f(x) > 0$ i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$$

Przykłady:

(1) Jeśli $f(x) \rightarrow a > 0$ i $g(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$ przy $x \rightarrow x_0$, to dla x z dziedziny, dostatecznie bliskich x_0 i różnych od x_0 , mamy $f(x) > 0$ i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$$

(2) Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > -1$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a((1+x)^{1/x}) \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

Przykłady:

(1) Jeśli $f(x) \rightarrow a > 0$ i $g(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$ przy $x \rightarrow x_0$, to dla x z dziedziny, dostatecznie bliskich x_0 i różnych od x_0 , mamy $f(x) > 0$ i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$$

(2) Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > -1$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a((1+x)^{1/x}) \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

(3) Z ciągłości cosinusa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \cos\left(\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \cos \pi = -1.$$

Twierdzenie o wartości pośredniej (własność Darboux)

Niech $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Jeśli

$$\min\{f(a), f(b)\} < d < \max\{f(a), f(b)\},$$

to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = d$.

Twierdzenie o wartości pośredniej (własność Darboux)

Niech $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Jeśli

$$\min\{f(a), f(b)\} < d < \max\{f(a), f(b)\},$$

to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = d$.

Przykłady:

(1) Równanie $\sin x - x + 1 = 0$ ma rozwiązanie. Funkcja $f(x) = \sin x - x + 1$ jest ciągła i

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(3\pi/2) = -3\pi/2 < 0.$$

Zatem istnieje $c \in (0, 3\pi/2)$ takie, że $f(c) = 0$.

Twierdzenie o wartości pośredniej (własność Darboux)

Niech $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Jeśli

$$\min\{f(a), f(b)\} < d < \max\{f(a), f(b)\},$$

to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = d$.

Przykłady:

(1) Równanie $\sin x - x + 1 = 0$ ma rozwiązanie. Funkcja $f(x) = \sin x - x + 1$ jest ciągła i

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(3\pi/2) = -3\pi/2 < 0.$$

Zatem istnieje $c \in (0, 3\pi/2)$ takie, że $f(c) = 0$.

(2) Funkcja $f(x) = x^3/4 - \sin(\pi x) + 3$ przyjmuje wartość $8/3$ w przedziale $(-2, 2)$, ponieważ jest ciągła oraz

$$f(-2) = 1 < 8/3 < 5 = f(2).$$

Twierdzenie Weierstrassa

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona i osiąga na $[a, b]$ swoje minimum i maksimum:

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M,$$

$$\begin{aligned} \exists c_1, c_2 \in [a, b] : \quad & f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \\ & f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x). \end{aligned}$$

Twierdzenie Weierstrassa

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona i osiąga na $[a, b]$ swoje minimum i maksimum:

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M,$$

$$\begin{aligned} \exists c_1, c_2 \in [a, b] : \quad & f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \\ & f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x). \end{aligned}$$

Uwaga: na przedziale otwartym funkcja ciągła nie musi być ograniczona ani osiągać swoich kresów. Na $(0, 1)$ funkcja $f(x) = 1/x$ jest nieograniczona z góry, a $g(x) = x$ jest ograniczona, lecz nie osiąga ani kresu dolnego 0, ani górnego 1.

Punkty nieciągłości

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Punkt x_0 nazywamy *izolowanym punktem nieciągłości*, jeśli f jest nieciągła w x_0 i istnieje $r > 0$ takie, że f jest ciągła w każdym punkcie zbioru

$$(D \cap (x_0 - r, x_0 + r)) \setminus \{x_0\}.$$

Punkty nieciągłości

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Punkt x_0 nazywamy *izolowanym punktem nieciągłości*, jeśli f jest nieciągła w x_0 i istnieje $r > 0$ takie, że f jest ciągła w każdym punkcie zbioru

$$(D \cap (x_0 - r, x_0 + r)) \setminus \{x_0\}.$$

Rodzaje nieciągłości

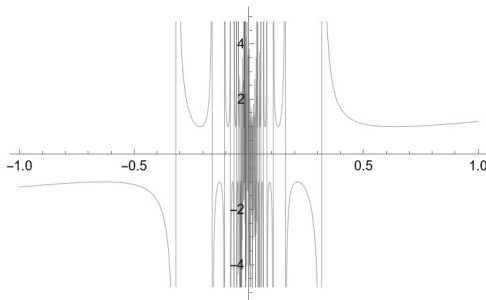
Niech dodatkowo x_0 będzie punktem skupienia dziedziny z obu stron. Punkt nieciągłości jest:

- *I rodzaju*, jeśli obie granice jednostronne są skończone (ich równość oznacza nieciągłość usuwalną, a różność – skokową);
- *II rodzaju*, jeśli co najmniej jedna z granic jednostronnych jest niewłaściwa albo nie istnieje.

(1) Niech $E = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(1/x)}, & x \notin E \cup \{0\}, \\ 0, & x \in E \cup \{0\}. \end{cases}$$

Każdy punkt $x_k = 1/(k\pi)$, $k \neq 0$, jest izolowanym punktem nieciągłości II rodzaju: granice jednostronne są nieskończone i mają przeciwne znaki. Punkt 0 również jest punktem nieciągłości, ponieważ $u_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi) \rightarrow 0$ i $f(u_n) = 1 \neq f(0)$. Nie jest izolowanym punktem nieciągłości, gdyż $1/(n\pi) \rightarrow 0$ i każdy z tych punktów należy do E .



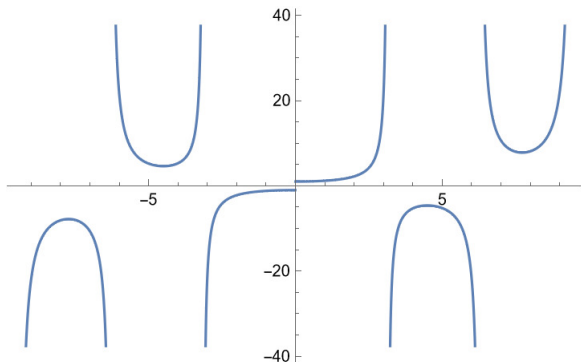
(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sin x}, & x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Punkt 0 jest izolowanym punktem nieciągłości I rodzaju (skokowej), ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Punkty $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, są izolowanymi punktami nieciągłości II rodzaju: ich granice jednostronne są nieskończone i mają przeciwne znaki.



(3) Dla funkcji

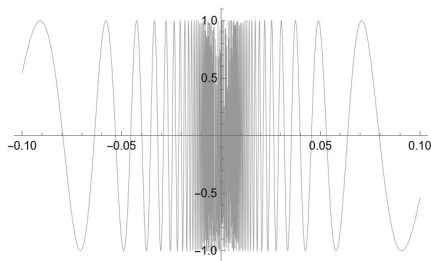
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

punkt 0 jest izolowanym punktem nieciągłości II rodzaju; żadna z granic jednostronnych w 0 nie istnieje.

Istotnie, dla dowolnego $y \in [-1, 1]$ wybierzmy $\alpha = \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$ i przyjmijmy

$$x_n^+ = \frac{1}{\alpha + 2n\pi} \rightarrow 0^+, \quad x_n^- = \frac{1}{\alpha - 2n\pi} \rightarrow 0^- \quad (n \geq 1).$$

Wtedy $f(x_n^+) = f(x_n^-) = y$. Wybierając dwa różne y , wykluczamy istnienie każdej z granic jednostronnych.



Funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funkcja ta nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funkcja ta nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon = 1/2$. Każde otoczenie x_0 zawiera zarówno liczby wymierne, jak i niewymierne. Zatem dla każdego $\delta > 0$ istnieje x takie, że

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{oraz} \quad |f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon.$$

Warunek ciągłości nie jest więc spełniony w żadnym x_0 . □