Analiza, Wykład: Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Pochodna funkcji

Pochodna funkcji

Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ i niech
$\exists\, r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \subset D$.

Pochodna funkcji

Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ i niech $\exists\, r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \subset D$.

Definicja

Jeśli istnieje granica właściwa tzw. ilorazu różnicowego

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}$$

to tę granicę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Pochodna funkcji

Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ i niech
$\exists\, r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \subset D$.

Definicja

Jeśli istnieje granica właściwa tzw. ilorazu różnicowego

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}$$

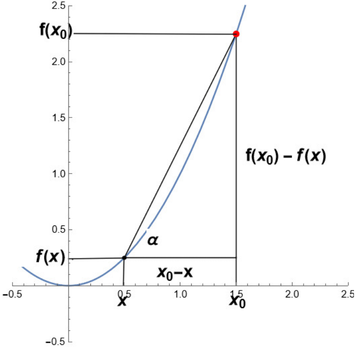
to tę granicę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Jeśli funkcja ma pochodną w x_0, to mówimy, że jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.

Iloraz różnicowy - interpretacja graficzna

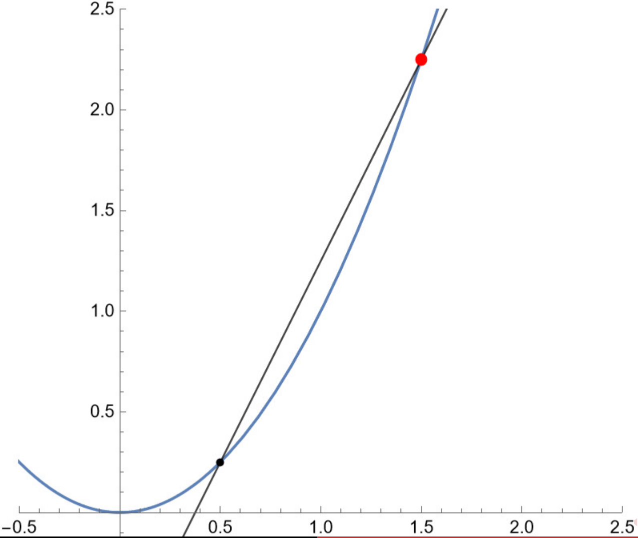
Niech α będzie kątem nachylenia prostej siecznej przechodzącej przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$. Wtedy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$



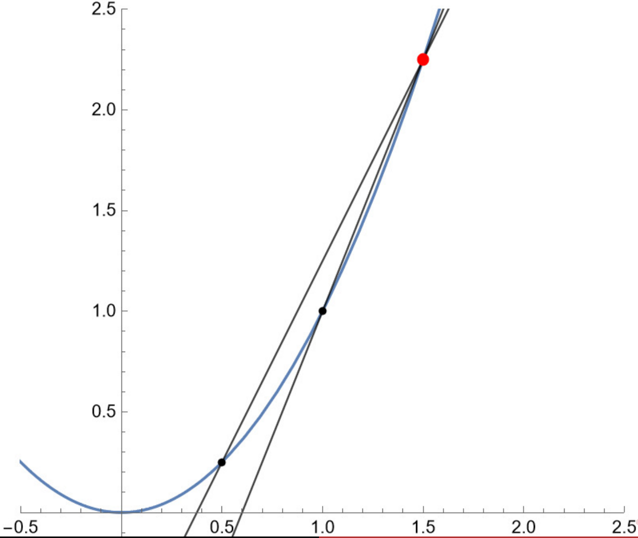
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



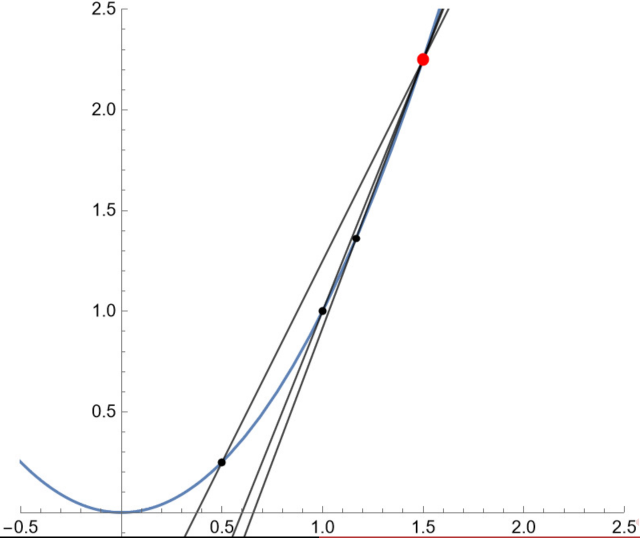
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



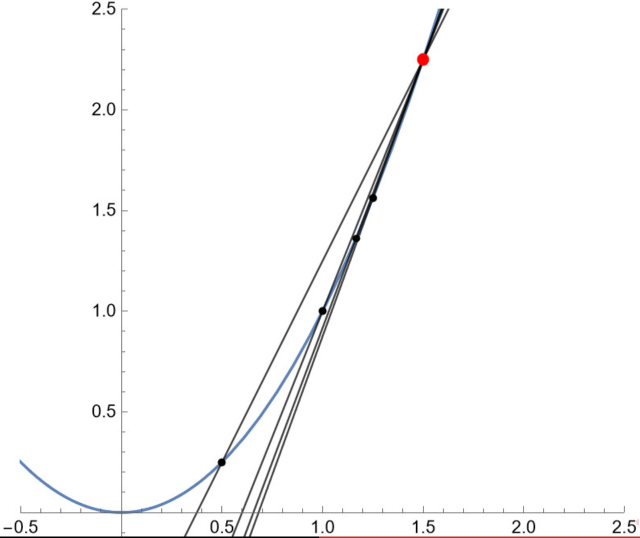
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



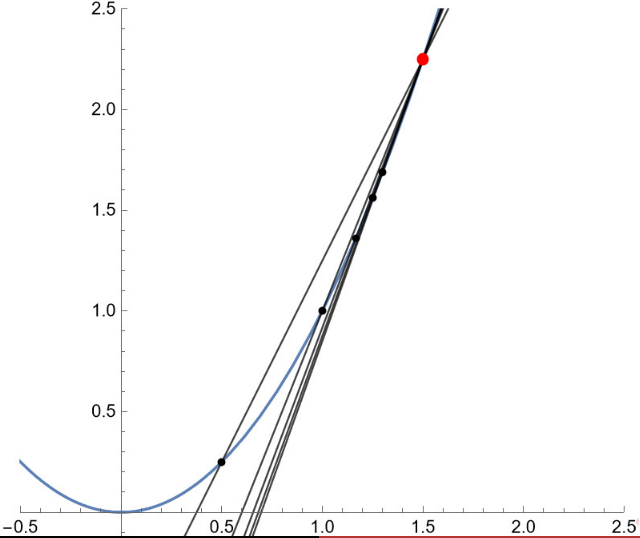
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



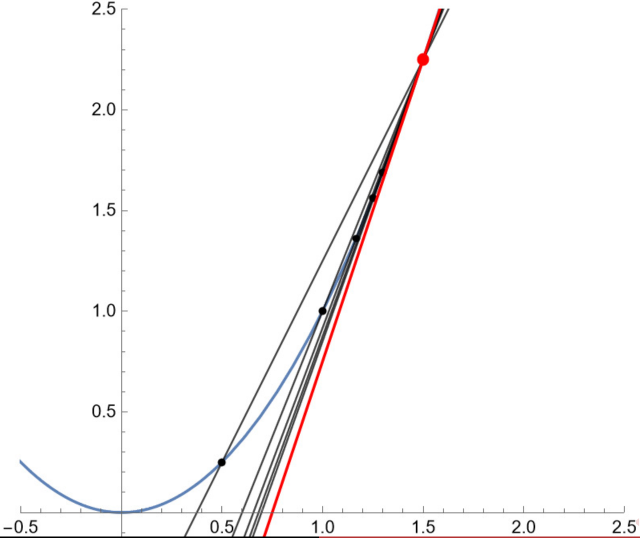
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



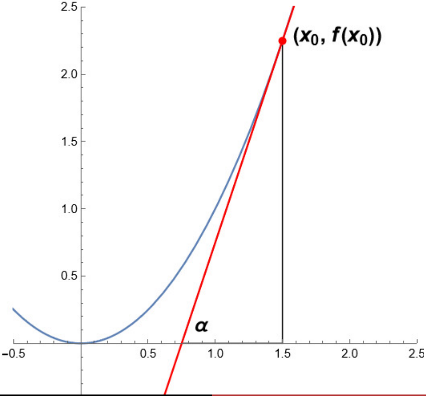
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Proste sieczne przechodzące przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dla $x \to x_0$ dążą do prostej stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



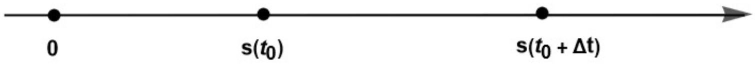
Interpretacja geometryczna pochodnej

Tangens kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ jest ilorazem różnicowym z definicji pochodnej. Gdy $x \to x_0$, to iloraz różnicowy dąży do pochodnej $f'(x_0)$, a tangens kąta nachylenia siecznych dąży do tangensa kąta nachylenia prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Stąd $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$.



Interpretacja fizyczna pochodnej - prędkość chwilowa

Punkt P porusza się po prostej OX. Współrzędna $x = s(t)$ punktu jest funkcją od czasu t.
Iloraz różnicowy $\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ jest średnią prędkością między chwilą t_0 i chwilą $t_0 + \Delta t$.
Pochodna $v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ jest prędkością (chwilową) w chwili t_0.



Przykłady:

(1) Korzystając z definicji wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3x^2 - 4x$

$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) =$
$3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x} = 6x+3\Delta x-4 \to 6x-4 = f'(x)$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$$

Pochodne jednostronne

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$$

Pochodne jednostronne

Definicja

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – *pochodna prawostronna*

$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – *pochodna lewostronna*

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$$

Pochodne jednostronne

Definicja

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – *pochodna prawostronna*

$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – *pochodna lewostronna*

Uwaga

$f'(x_0)$ – istnieje $\iff$ istnieją skończone pochodne jednostronne $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ i są sobie równe.

Przykłady: (1) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

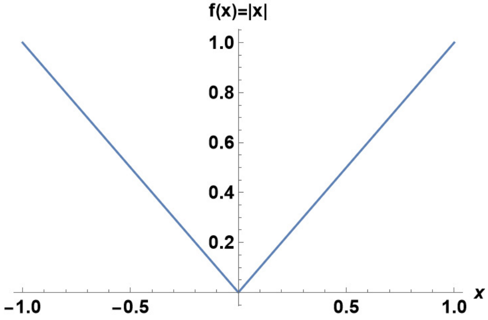
Przykłady: (1) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$. Dowód:.

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$ Więc $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nie istnieje. $\square$



Tw. (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeśli $f'(x_0)$ – istnieje $\Rightarrow$ f jest ciągła w x_0.

Uwaga. W powyższym twierdzeniu implikacja w drugą stronę nie zachodzi, np. $f(x) = |x|$ jest ciągła i nie jest różniczkowalna w $x = 0$.

Dowód Tw.:

$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \ \wedge \ \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) =$$
$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ - ciągła w } x_0.$$

Definicja (Pochodne wyższych rzędów)

Jeśli $f'(x)$ istnieje $\forall\, x \in X$, to w X określona jest funkcja

$$\mathbb{R} \supset X \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodną tej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy $f''(x) = (f'(x))'$.

Ogólnie: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$
Ozn. $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$

Definicja (Pochodne wyższych rzędów)

Jeśli $f'(x)$ istnieje $\forall\, x \in X$, to w X określona jest funkcja

$$\mathbb{R} \supset X \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodną tej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy $f''(x) = (f'(x))'$.

Ogólnie: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$
Ozn. $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$

$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$

Definicja (Pochodne wyższych rzędów)

Jeśli $f'(x)$ istnieje $\forall\, x \in X$, to w X określona jest funkcja

$$\mathbb{R} \supset X \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodną tej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy $f''(x) = (f'(x))'$.

Ogólnie: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$
Ozn. $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x+\Delta x) - f^{(n)}(x)}{\Delta x}$$

Definicja (Pochodne wyższych rzędów)

Jeśli $f'(x)$ istnieje $\forall\, x \in X$, to w X określona jest funkcja

$$\mathbb{R} \supset X \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

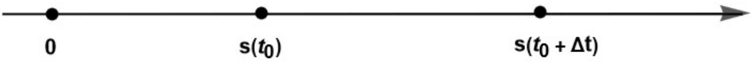
Pochodną tej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy $f''(x) = (f'(x))'$.

Ogólnie: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$
Ozn. $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$

$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$
$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x+\Delta x) - f^{(n)}(x)}{\Delta x}$ Jezeli funkcja ma pochodne $f^{(k)}(x_0)$ dla $k = 1, \cdots, n$ to mówimy, że jest n-krotnie różniczkowalna w x_0.

Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej - przyspieszenie

Punkt P porusza się po prostej OX. Współrzędna $x = s(t)$ punktu jest funkcją od czasu t.
Pochodna $v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ jest prędkością (chwilową) w chwili t_0.
Druga pochodna $a(v_0) = s''(t_0) = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0+\Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$ jest przyspieszeniem w chwili t_0.



Podstawowe wzory

Podstawowe wzory

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$

Podstawowe wzory

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$

Dowód: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0.\square$

Podstawowe wzory

- $f(x) = c \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$

Dowód: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0.\square$

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

Podstawowe wzory

- $f(x) = c \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$

Dowód: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0. \square$

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

Dowód: $(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}\Delta x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}. \square$$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. $\square$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$ □

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \;\; x \in \mathbb{R}$

• $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$ □

• $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \ x \in \mathbb{R}$

Dowód:$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$□

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. $\square$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \ x \in \mathbb{R}$

Dowód:$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$\square$

- $(e^x)' = e^x$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. $\square$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \; x \in \mathbb{R}$

Dowód:$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$\square$

- $(e^x)' = e^x$
- $(\sin x)' = \cos x$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

Dowód: $(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. $\square$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \ x \in \mathbb{R}$

Dowód:$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$\square$

- $(e^x)' = e^x$
- $(\sin x)' = \cos x$

Dowód: $(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$

$\square$

- $(\cos x)' = -\sin x$

- $(\cos x)' = -\sin x$

Dowód:

$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x. \square$

• $(\cos x)' = -\sin x$

Dowód:

$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x. \square$

Tw. (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)

Jeśli f' i g' istnieją i $c \in \mathbb{R}$, to istnieją:

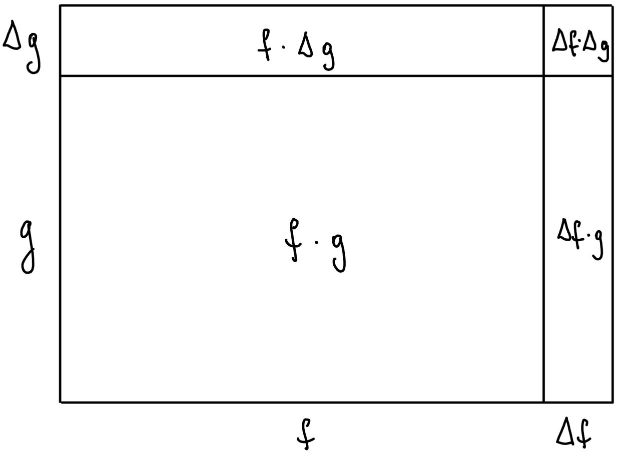
$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (cf)' = c \cdot f'$$

$$\text{Reguła Leibniza} : (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0$$

Reguła Leibniza

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$



Dowód tw.:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) \right] =$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = F'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$$

Dowód tw.:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) \right] =$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = F'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$$

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \; g(x) \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{H(x+\Delta x) - H(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x+\Delta x) + f(x) g(x) - f(x) g(x)}{g(x+\Delta x) g(x) \Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} =$$
$$= \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' \square$$

Podstawowe wzory c.d.

Podstawowe wzory c.d.

- $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Tw. (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale (a, b) i w punkcie $x_0 \in (a, b)$ ma pochodną $f'(x) \neq 0$, to funkcja $x = g(y)$ odwrotna do niej ma w punkcie $y_0 = f(x_0)$ pochodną

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = g(y_0)}$$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Dowód: $y = \log_a x \iff x = a^y$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \square$$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Dowód: $y = \log_a x \iff x = a^y$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \square$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Dowód: $y = \log_a x \iff x = a^y$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \square$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód tw.:

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

$$g'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \square$$

Podstawowe wzory c.d.

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Dowód: $y = \log_a x \iff x = a^y$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \square$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód: $y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \ x \in (-1, 1)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \square$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:$y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in (0, \pi),\ x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:$y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in (0, \pi),\ x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$

- $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:$y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in (0, \pi),\ x \in (-1, 1)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Dowód: $y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y, \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.\square$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:$y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in (0,\pi),\ x \in (-1,1)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$$

- $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Dowód: $y = \mathrm{arctg}\, x \iff x = \mathrm{tg}\, y, \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$
$$= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.\square$$

- $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:$y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in (0, \pi), \ x \in (-1, 1)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \square$$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Dowód: $y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y, \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$
$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \square$$

- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Dowód:$y = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} y, \quad y \in (0, \pi)$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$
$$= -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}. \ \square$$

Tw. (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$ w punkcie x, a funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$ w punkcie $u = h(x)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = f[h(x)]$ ma w punkcie x pochodną

$$\varphi'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Tw. (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeśli funkcja $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$ w punkcie x, a funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$ w punkcie $u = h(x)$, to funkcja złożona $\varphi(x) = f[h(x)]$ ma w punkcie x pochodną

$$\varphi'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Przykład:

$$\left[2^{\mathrm{arctg}\,(\sin x)}\right]' = 2^{\mathrm{arctg}\,(\sin x)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$$

Uwaga

(1) $\forall\, x \neq 0 \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$x > 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$x < 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

(2) Pochodna logarytmiczna

$$[\ln|f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Uwaga

(1) $\forall\, x \neq 0 \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$x > 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$x < 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

(2) Pochodna logarytmiczna

$$[\ln|f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Przykład:
$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$\ln|f(x)| = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x^2+1| - \frac{1}{15}\ln|5-x|$

$f'(x) = f(x) \cdot [\ln|f(x)|]'$

$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5-x}\right]$

Styczna do wykresu funkcji.

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowana w x_0 to równanie *stycznej* do wykresu jej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

bo tangens kąta nachylenia do osi OX prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$.

Styczna do wykresu funkcji.

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowana w x_0 to *równanie stycznej* do wykresu jej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

bo tangens kąta nachylenia do osi OX prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$.
Jeśli $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ lub $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, to równanie stycznej ma postać $x = x_0$.

Styczna do wykresu funkcji.

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowana w x_0 to *równanie stycznej* do wykresu jej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

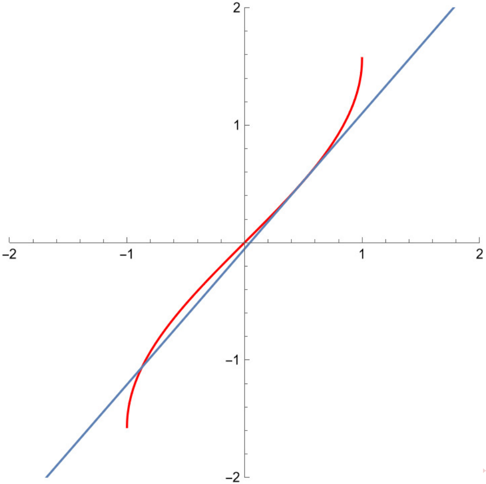
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

bo tangens kąta nachylenia do osi OX prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$.
Jeśli $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ lub $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, to równanie stycznej ma postać $x = x_0$.

Styczna do funkcji $f(x) = \arcsin(x)$ w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$.

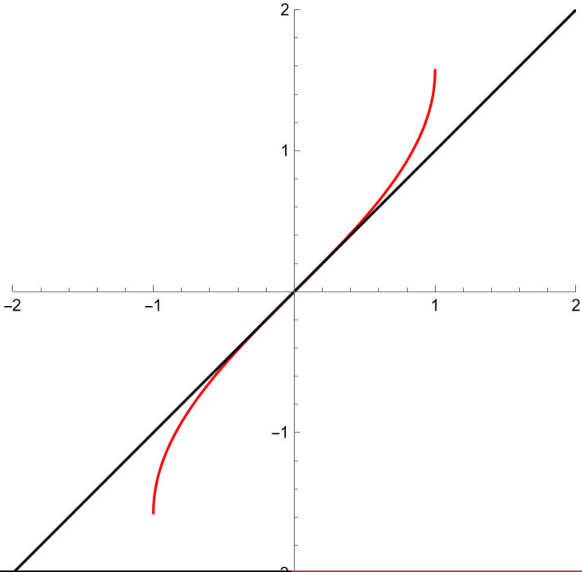
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}(x - x_0) + \arcsin(x_0)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{6}$$



Styczna do funkcji $f(x) = \arcsin(x)$ w punkcie $(0, 0)$.

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}(x - x_0) + \arcsin(x_0),\ x_0 = 0 \Rightarrow y = x.$$



W punktach $x = -1, x = 1$ funkcje $\arcsin x$, $\arccos x$ nie mają pochodnych jednostronnych (granice ilorazów różnicowych są niewłaściwe), np.

W punktach $x=-1, x=1$ funkcje $\arcsin x$, $\arccos x$ nie mają pochodnych jednostronnych (granice ilorazów różnicowych są niewłaściwe), np.

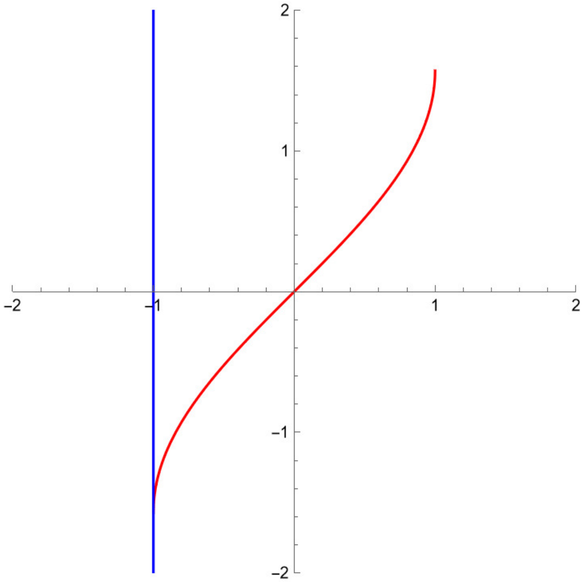
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\arcsin x - \arcsin(-1)}{x-(-1)} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} y = \arcsin x\,, & x \in [-1,1] \\ x = \sin y\,, & y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \to -1^+ \iff y \to -\frac{\pi}{2}^+ & \end{array} \right\| =$$

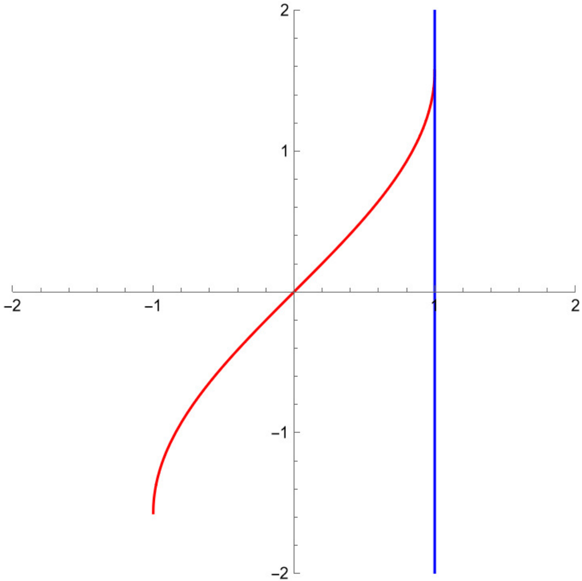
$$= \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{y+\frac{\pi}{2}}{\sin y - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{y+\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{1}{2}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{1}{2}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)} = +\infty$$

Styczna do funkcji $f(x) = \arcsin(x)$ w punkcie $(-1, -\frac{\pi}{2})$.



Styczna do funkcji $f(x) = \arcsin(x)$ w punkcie $(1, \frac{\pi}{2})$.



Normalna (czyli prostapadła do stycznej) do wykresu funkcji.

Niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie x_0. Prosta normalna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to prosta prostpadła do stycznej w tym punkcie.
Jeśli α jest kątem nachylnia do osi OX prostej stycznej, to kąt nachylenia prostej normalnej to $\alpha + \frac{\pi}{2}$, bo proste przecinają się prostopadle w $(x_0, f(x_0))$. Wiemy, że $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Stąd

$$\mathrm{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}(\alpha) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dlatego równanie normalnej do f w $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0), \text{ jeśli } f'(x_0) \neq 0.$$

Jeśli $f'(x_0) = 0$ to równanie normalnej do f w $(x_0, f(x_0))$ ma postać: $x = x_0$

Styczna i normalna do paraboli

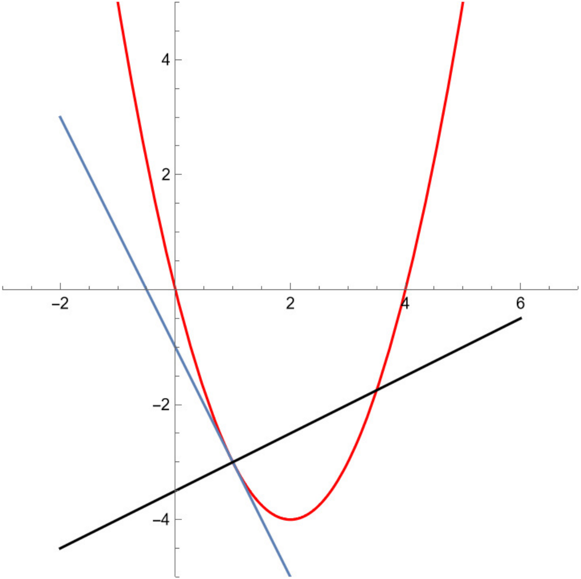
Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do paraboli $y = x^2 - 4x$ w punktach o odciętej $x = 1$ i $x = 2$.
$f(x) = x^2 - 4x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - 4$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -3, f'(1) = -2$
styczna: $y = -2(x - 1) - 3 = -2x - 1$
normalna: $y = \frac{1}{2}(x - 1) - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = -4, f'(2) = 0$
styczna: $y = -4$, normalna: $x = 2$

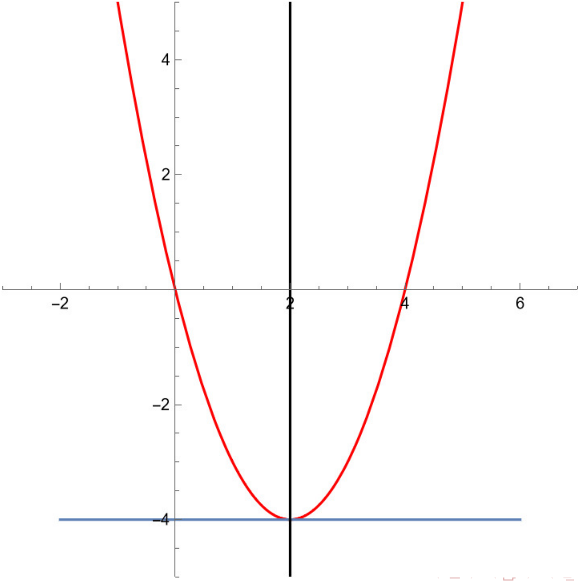
Styczna i normalna do paraboli $y = x^2 - 4x$ w $x = 1$

styczna: $y = -2x - 1$, normalna: $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$



Styczna i normalna do paraboli $y = x^2 - 4x$ w $x = 2$

styczna: $y = -4$, normalna: $x = 2$



Wyznaczyć równania stycznych i normalnych do okręgu $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ w punktach przecięcia z osią OX.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-3=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A=(-1,0)\,,\ B=(3,0)$$

różniczkujemy równanie okręgu względem x:

$2x+2y\cdot y'-2+4y'=0 \Rightarrow y'=\frac{1-x}{2+y} \Rightarrow y'_A=1\,,\ y'_B=-1$
dla A : styczna: $y=x+1$, normalna: $y=-x-1$.

dla B : styczna: $y=-x+3$, normalna: $y=x-3$.

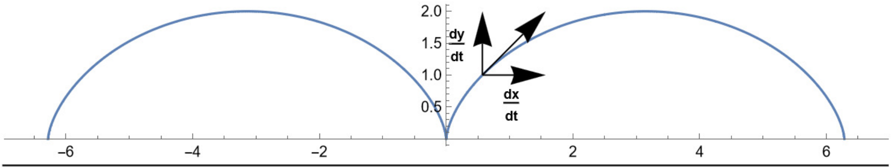
Styczne i normalne do cykloidy

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do cykloidy
$x(t) = t - \sin t\,,\ y(t) = 1 - \cos t$ dla $t = \frac{\pi}{2}$.

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \frac{dx}{dt}(t) = 1 - \cos t,\quad \frac{dy}{dt}(t) = \sin t$

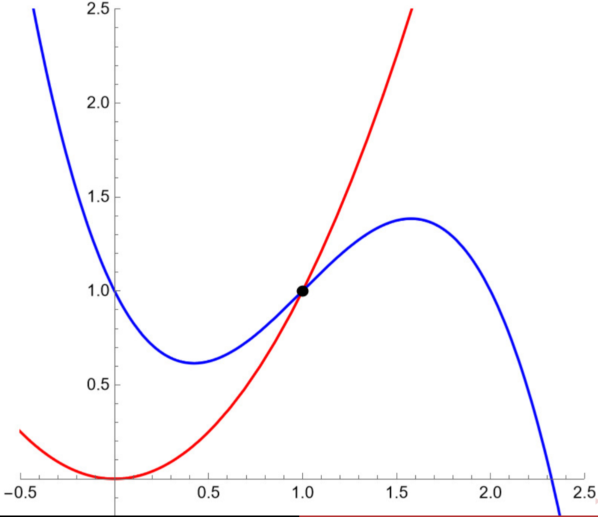
$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{\frac{dy}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow$ styczna: $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$, normalna: $y = -x + \frac{\pi}{2}$

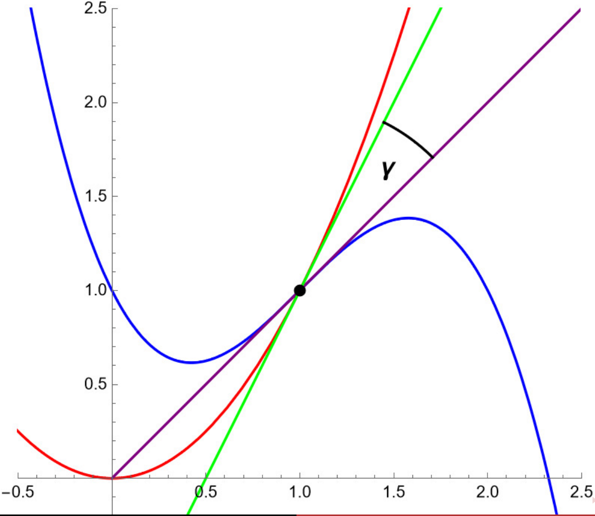


Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

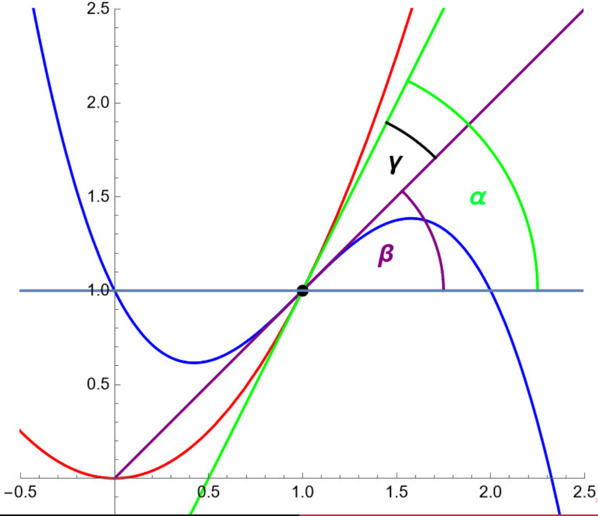
Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie ich przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ jest to kąt $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ między stycznymi do tych krzywych w tym punkcie.



Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie ich przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ jest to kąt $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ między stycznymi do tych krzywych w tym punkcie.



Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie ich przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ jest to kąt $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ między stycznymi do tych krzywych w tym punkcie.



Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Twierdzenie

Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ wynosi

$$\gamma = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|, & 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie

Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ wynosi

$$\gamma = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left| \frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)} \right|, & 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Dowód: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0), \operatorname{tg}\beta = g'(x_0)$.
$\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)|$
Wektory kierunkowe prostych stycznych to $u = (1, \operatorname{tg}\alpha) = (1, f'(x_0))$ oraz $v = (1, \operatorname{tg}\beta) = (1, g'(x_0))$. $(\alpha - \beta)$ to kąt między u i v.
Ich iloczyn skalarny równy jest $u \bullet v = 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)$. Iloczyn skalarny $u \bullet v = 1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) = 0$ jeśli niezerowe wektory u i v są prostopadłe czyli kąt między nimi to $\pm\frac{\pi}{2}$. Stąd $\gamma = \frac{\pi}{2}$.$\square$

Przykłady:

(1) Pod jakim kątem przecinają się krzywe $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad f'(x) = \cos x, \; g'(x) = -\sin x$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$$

(2) Pod jakim kątem przecinają się prosta $x+y-4=0$ i parabola $2y=8-x^2$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2y=8-x^2 \end{cases} \Rightarrow A=(0,4)\,,\ B=(2,2)$$

$$f(x)=-x+4 \Rightarrow f'(x)=-1 \quad \forall\, x$$

$$g(x)=-\tfrac{1}{2}x^2+4 \Rightarrow g'(x)=-x \Rightarrow g'(0)=0\,,\ g'(2)=-2$$

$$\gamma_A=\operatorname{arctg} 1=\tfrac{\pi}{4}\,, \quad \gamma_B=\operatorname{arctg}\left|\ \tfrac{-1+2}{1+2}\ \right|=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}$$

Twierdzenie de l'Hospitala

Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) = (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$$

dla pewnego $r > 0$.

Twierdzenie de l'Hospitala

Jeśli dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$, $\frac{f'}{g'}$ zawierają $S(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ ($+\infty$ lub $-\infty$) oraz istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa), to istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i są sobie równe:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga:

Powyższe twierdzenie zachodzi też dla
$x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Uwaga:

Powyższe twierdzenie zachodzi też dla $x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty.$

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Uwaga:

Powyższe twierdzenie zachodzi też dla
$x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty.$

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = [\frac{\infty}{\infty}] =$
$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-2x^{\frac{1}{2}}\right) = 0$

Uwaga:

Powyższe twierdzenie zachodzi też dla
$x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty.$

Przykłady:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = [\frac{\infty}{\infty}] =$
$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-2x^{\frac{1}{2}}\right) = 0$

(3) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = [\infty^0] = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} =$
$= e^0 = 1$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

w tym przypadku nie możemy zastosować tw. de l'Hospitala, bo granica ilorazu pochodnych nie istnieje $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

więc $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1$, bo $\frac{1}{x} \to 0\,,\ |\sin x| \leqslant 1$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

w tym przypadku nie możemy zastosować tw. de l'Hospitala, bo granica ilorazu pochodnych nie istnieje $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

więc $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1$, bo $\frac{1}{x} \to 0\,,\ |\sin x| \leqslant 1$

(5) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$

Asymptoty funkcji

Asymptoty funkcji

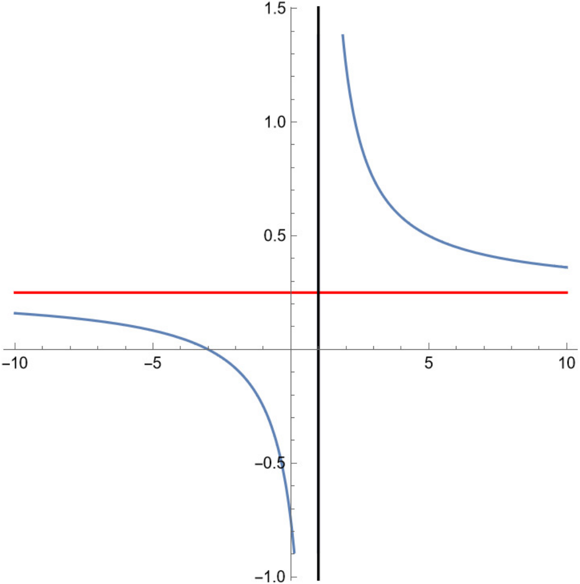
Definicja

Prostą $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową lewostronną* funkcji $y = f(x)$, jeśli $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$.

Prostą $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową prawostronną* funkcji $y = f(x)$, jeśli $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$.

Prostą $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową obustronną* funkcji $y = f(x)$, jeśli jest asymptotą lewostronną i prawostronną.

Asymptota pionowa obustronna (i pozioma obustronna)



Definicja

Prostą $y = mx + k$ nazywamy *asymptotą ukośną lewostronną* (poziomą, gdy $m = 0$) wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli

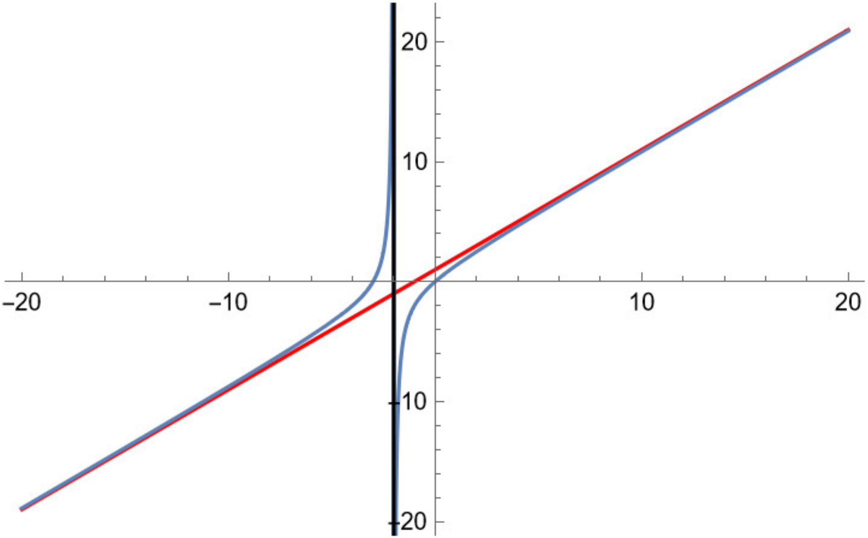
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - k] = 0$$

Prostą $y = mx + k$ nazywamy *asymptotą ukośną prawostronną* (poziomą, gdy $m = 0$) wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - k] = 0$$

Prostą $y = mx + k$ nazywamy *asymptotą ukośną obustronną* funkcji $y = f(x)$, jeśli jest asymptotą lewostronną i prawostronną.

Asymptoty ukośna obustronne i pionowa obustronna



Twierdzenie

Prosta $y = mx + k$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji $y = f(x) \iff$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad k = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla asymptoty ukośnej lewostronnej.

Twierdzenie

Prosta $y = mx + k$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji $y = f(x) \iff$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad k = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla asymptoty ukośnej lewostronnej.

Dowód tw.:

$'' \Rightarrow '' : \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - k] = 0 \wedge \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{k}{x}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - k] = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} k = k \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = k$

$'' \Leftarrow '' : \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = k \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} k = k \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - k] = 0.\square$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - k] = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} k = k \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = k$

$" \Leftarrow "$: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = k \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} k = k \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - k] = 0.\square$

Przykłady:

(1) Wyznaczyć, jeśli istnieją, wszystkie asymptoty funkcji
$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x_0 \neq -2 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ – brak asymptot pionowych

$x_0 = -2: \; f(x) > 0 \iff x(x+3)(x+2) > 0 \Rightarrow$
$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty, \; \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$
asymptota pionowa obustronna

$x_0 = -2: \ f(x) > 0 \iff x(x+3)(x+2) > 0 \Rightarrow$
$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$
asymptota pionowa obustronna

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x}{x^2+2x} = 1 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
$k = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2+3x}{x+2} - x\right] =$
$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+2} = 1 = \lim_{x\to -\infty} [f(x) - x]$
$\Rightarrow y = x + 1$ – asymptota ukośna obustronna

(2) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to 0} \left(x + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \Rightarrow$ brak asymptot pionowych

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$k = \lim_{x\to +\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = x$ - asymptota ukośna obustronna

Tw. (o zachowaniu słabej nierówności w granicy funkcji)

Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ mają w punkcie x_0 granice właściwe $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ i
$\exists\, r > 0\ \forall\, x \in D \cap S(x_0, r) \quad f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow a \leqslant b$.

Ekstrema funkcji

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli $\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \cap D \quad f(x) \leqslant f(x_0)$.

Funkcja$f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli $\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \cap D \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Ekstrema funkcji

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum lokalne*, jeśli $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in S(x_0, \delta) \cap D \quad f(x) \leqslant f(x_0)$.

Funkcja$f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in S(x_0, \delta) \cap D \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Jeśli w powyższej definicji zamiast $\leqslant$, $\geqslant$ są $<$, $>$ to maksimum, minimum jest lokalne właściwe.
Maksima i minima nazywamy *ekstremami*, są to ekstrema lokalne.

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x) = |\sin x|$ ma w $(-\pi, \pi)$ minimum lokalne właściwe w $x = 0$ i maksima lokalne w $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$

$\exists\, \delta = \frac{\pi}{4}\ \forall x \in S(0, \delta) \quad |\sin x| > |\sin 0|$

$\exists\, \delta = \frac{\pi}{4}\ \forall x \in S(-\frac{\pi}{2}, \delta) \quad |\sin x| < |\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)|$

analogicznie dla $x = \frac{\pi}{2}$

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x) = |\sin x|$ ma w $(-\pi, \pi)$ minimum lokalne właściwe w $x = 0$ i maksima lokalne w $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$

$\exists\, \delta = \frac{\pi}{4}\ \forall x \in S(0, \delta) \quad |\sin x| > |\sin 0|$

$\exists\, \delta = \frac{\pi}{4}\ \forall x \in S(-\frac{\pi}{2}, \delta) \quad |\sin x| < |\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)|$

analogicznie dla $x = \frac{\pi}{2}$

(2) Funkcja $f(x) = x^3$ nie ma ekstremum w $x = 0$

$\forall\, \delta > 0\ \exists x \in S(0, \delta) \quad f(x) > f(0)$ - brak maksimum

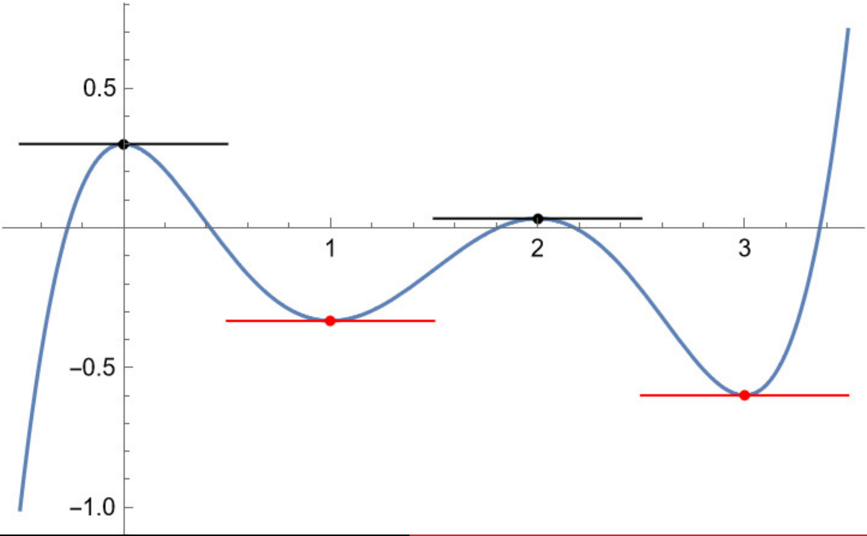
$\forall\, \delta > 0\ \exists x \in S(0, \delta) \quad f(x) < f(0)$ - brak minimum

Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli f ma w punkcie x_0 ekstremum i $f'(x_0)$ istnieje, to $f'(x_0) = 0$.

Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli f ma w punkcie x_0 ekstremum i $f'(x_0)$ istnieje, to $f'(x_0) = 0$.



Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli f ma w punkcie x_0 ekstremum i $f'(x_0)$ istnieje, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód:

Dla maksimum:

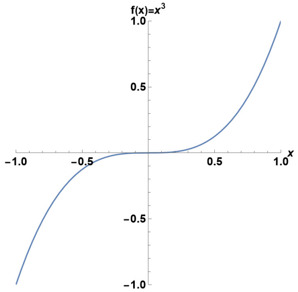
$\exists\, r > 0\ \forall\, x \in S(x_0, r) \quad f(x) \leqslant f(x_0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall\, x \in (x_0, x_0 + r) & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \\ \forall\, x \in (x_0 - r, x_0) & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 \leqslant f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ Analogicznie dla minimum. $\square$

Uwaga:

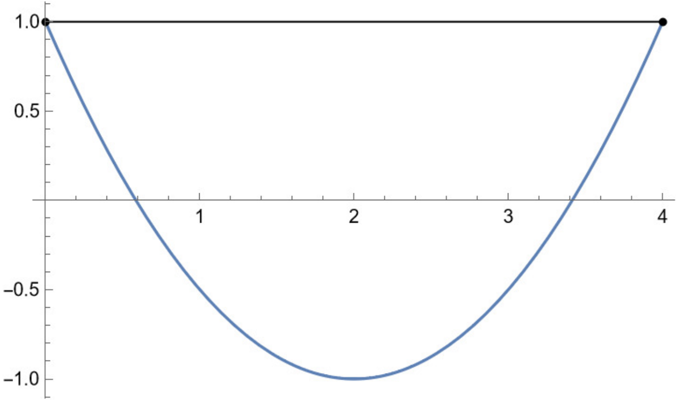
(1) W powyższym twierdzeniu implikacja odwrotna nie zachodzi, np. dla $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, pochodna $f'(0) = 0$, a funkcja nie ma ekstremum w tym punkcie.



(2) Funkcja może osiągać ekstremum tylko w tych punktach należących do dziedziny, w których pochodna się zeruje lub nie istnieje, np. $f(x) = |x|$ ma minimum w punkcie 0 i f nie jest różniczkowalna w 0.

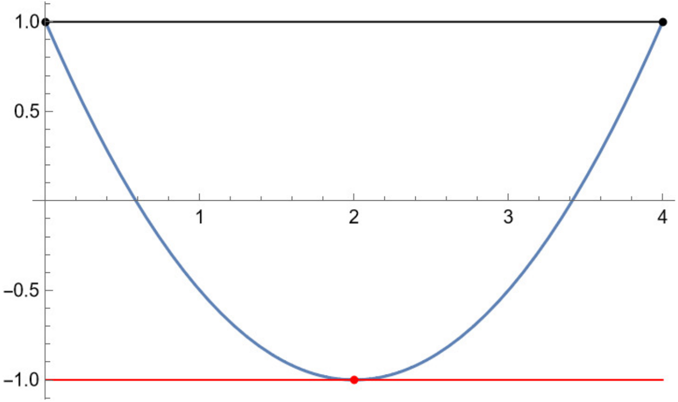
Tw. (Rolle'a)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domnkniętym $[a, b]$ i ma pochodną w (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to
$\exists\, c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.$



Tw. (Rolle'a)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i ma pochodną w (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to $\exists\, c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$.



Dowód:

Z tw. Weierstrassa funkcja jest ograniczona w $[a, b]$ i

$$\exists\, c_1, c_2 \in [a, b] \quad f(c_1) = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad f(c_2) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

Jeśli $f(c_1) = f(c_2)$, to funkcja jest stała w $[a, b]$ i $\forall\, x \in (a, b)\ f'(x) = 0$.

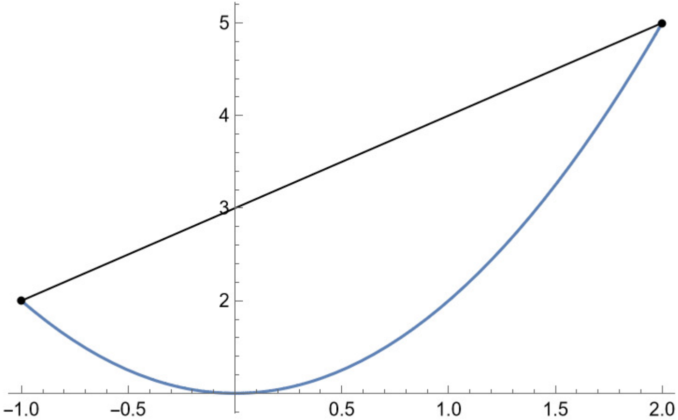
Jeśli $f(c_1) \neq f(c_2)$ i $f(a) = f(b)$, to $c_1 \in (a, b)$ lub $c_2 \in (a, b)$.

Jeśli np. $c_1 \in (a, b)$, to $f'(c_1) = 0$, bo f ma w c_1 minimum lokalne, a jeśli $c_2 \in (a, b)$, to $f'(c_2) = 0$, bo f ma w c_2 maksimum lokalne. $\square$

Tw. (Lagrange'a)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domnkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b), to

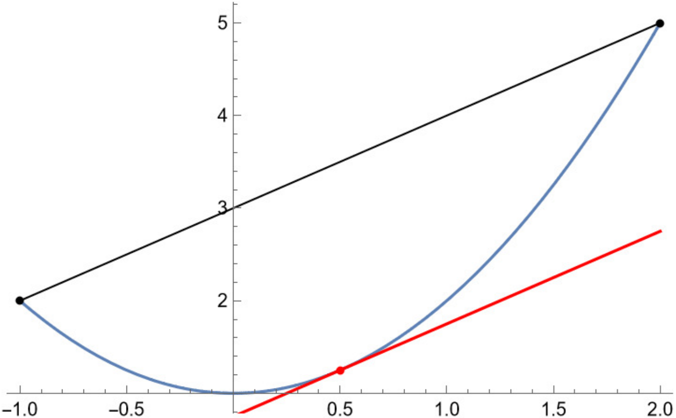
$$\exists\, c \in (a, b) \qquad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



Tw. (Lagrange'a)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domnkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b), to

$$\exists\, c \in (a, b) \qquad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



Dowód:

Funkcja $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(a)$ spełnia założenia tw. Rolle'a, bo $h(b) = h(a) = 0$ i h' istnieje w (a, b).

Stąd $\exists\, c \in (a, b) \quad h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.\square$

Przykład:

Dla funkcji $f(x) = x^3$ znaleźć punkty, w których styczne są równoległe do siecznej przechodzącej przez punkty $A = (-1, -1)$ i $B = (2, 8)$.

Funkcja f jest ciągła na $[-1, 2]$, f' istnieje $\forall\, x \in (-1, 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c \in (-1, 2) \quad f(2) - f(-1) = f'(c) \cdot (2 - (-1)) \Rightarrow 9 = 9c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow c_1 = 1\,,\ c_2 = -1 \Rightarrow M_1 = (1, 1)\,,\ M_2 = (-1, -1)$

Wnioski z tw. Lagrange'a

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w (a, b), to:

(1) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, b) \quad f(x) \equiv A$

(2) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a, b)

(3) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca w (a, b)

Wnioski z tw. Lagrange'a

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w (a, b), to:

(1) $\forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in (a, b) \quad f(x) \equiv A$

(2) $\forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a, b)

(3) $\forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca w (a, b)

Dowód (2): Niech $x_1, x_2 \in (a, b)$ i $x_1 < x_2$.
Funkcja $f|_{[x_1, x_2]}$ spełnia założenia Tw. Lagrange'a.
Stąd istnieje $c \in (x_1, x_2)$ taki, że $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0$.
Skoro $x_1 < x_2$ to $f(x_2) - f(x_1) > 0$ czyli $f(x_1) < f(x_2)$.
Dowód (1) i (3) analogicznie.$\square$

Przykłady:

(1) Funkcja *sinus hiperboliczny* $\sinh x = \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$, bo $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{sh}\, x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x = \mathrm{ch}\, x > 0$ (*cosinus hiperboliczny*).

Przykłady:

(1) Funkcja *sinus hiperboliczny* $\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$, bo $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x = \operatorname{ch} x > 0$ (*cosinus hiperboliczny*).

(2) Równanie $3x^5 + 15x - 8 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, bo

$f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ spełnia założenia tw. Lagrange'a,

$f'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca,

ponadto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$

f ma jedno miejsce zerowe, więc równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty.

(3) Wykazać, że $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, x \in [-1, 1]$

$f(x) = \arccos x + \arcsin x$ spełnia założenia tw. Lagrange'a,

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow$ funkcja jest stała na $[-1, 1]$,

$f(1) = \arccos 1 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \equiv \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

(3) Wykazać, że $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$

$f(x) = \arccos x + \arcsin x$ spełnia założenia tw. Lagrange'a,

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow$ funkcja jest stała na $[-1, 1]$,

$f(1) = \arccos 1 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \equiv \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

(4) Wykazać, że $\operatorname{arctg} x < x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x \in (0, 1)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{1}{6}x^3$ spełnia założenia tw. Lagrange'a,

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$

$\forall x \in (0, 1) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow$ funkcja jest malejąca i
$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) < 0$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} x < x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x \in (0, 1)$

Twierdzenie

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w (a, b). Wtedy:

(1) f - niemalejąca w $(a, b) \Rightarrow \forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) \geqslant 0$

(2) f - nierosnąca w $(a, b) \Rightarrow \forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) \leqslant 0$

Dowód (1): Niech $x \in (a, b)$. Wtedy dla każdego $\Delta x > 0$ takiego, że $(x + \Delta x) \in (a, b)$ mamy $x + \Delta x > x$. Stąd wynika,że $f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$. Więc dla każdego $\Delta x > 0$ mamy $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Przechodząc do granicy otrzymujemy $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Dowód (2) analogicznie. $\square$