

Analiza matematyczna

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Pochodna funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, oraz $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$ dla pewnego $r > 0$.

Pochodna funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, oraz $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$ dla pewnego $r > 0$.

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R},$$

to nazywamy ją *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Pochodna funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, oraz $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$ dla pewnego $r > 0$.

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R},$$

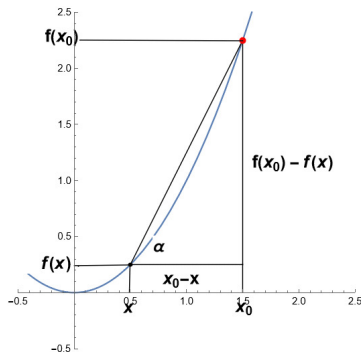
to nazywamy ją *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Jeśli funkcja ma pochodną w punkcie x_0 , to mówimy, że jest *różniczkowalna* w tym punkcie. Przyrost h oznacza także Δx .

Iloraz różnicowy – interpretacja graficzna

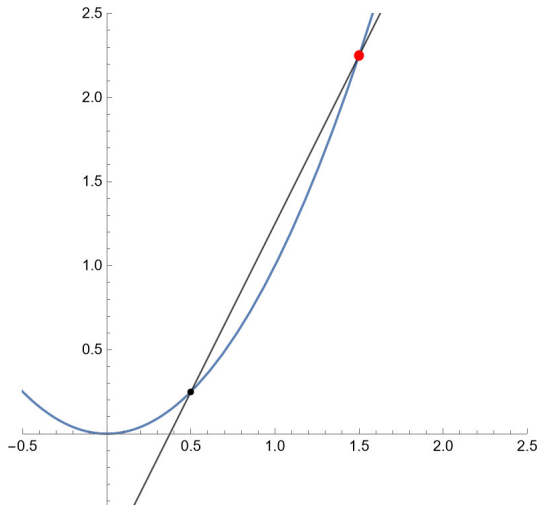
Niech $x \neq x_0$, a α będzie kątem nachylenia do osi OX secznej przechodzącej przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$. Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$



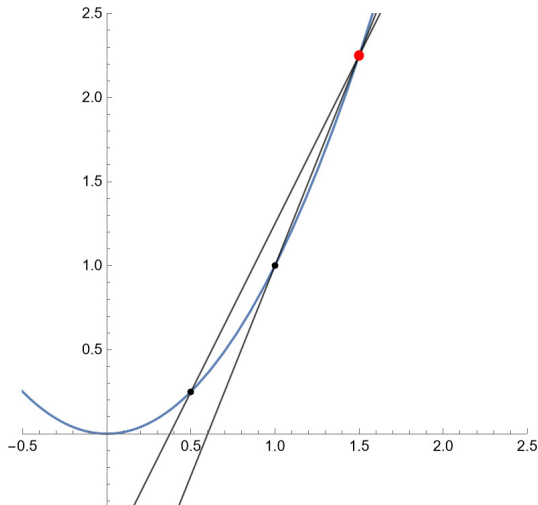
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



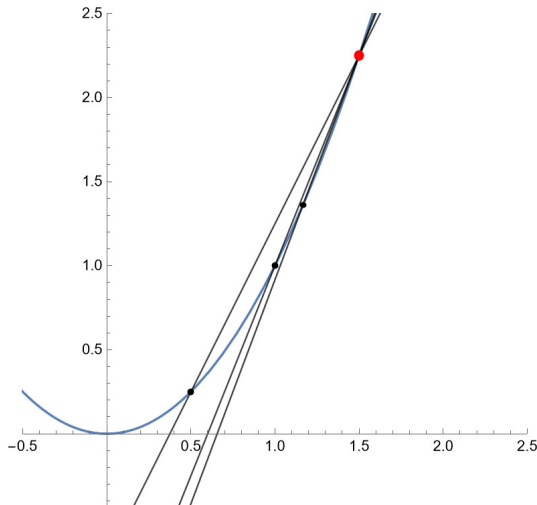
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



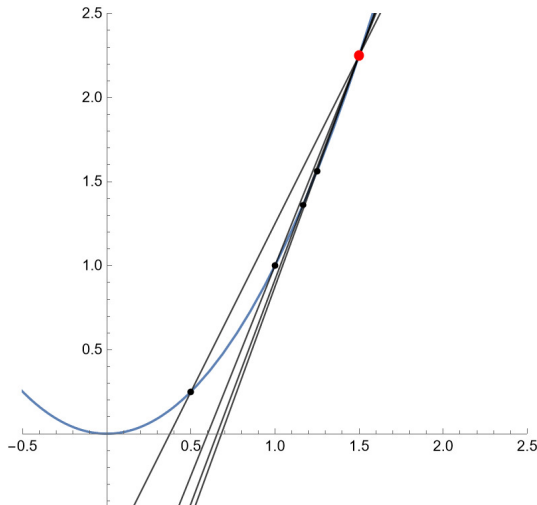
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



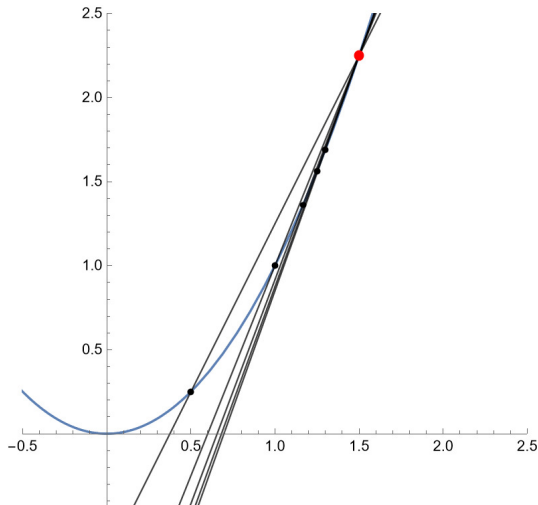
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



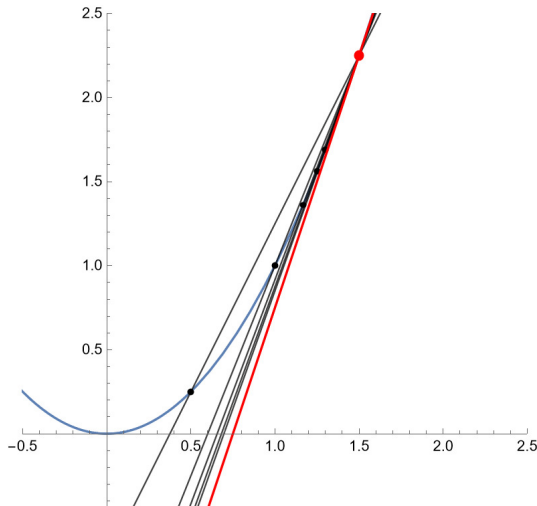
Prosta styczna do wykresu w punkcie

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



Prosta styczna do wykresu w punkcie

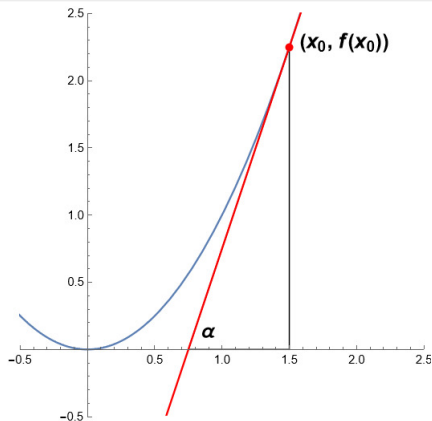
Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to dla $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, sieczne przechodzące przez $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$ dążą do stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech f będzie różniczkowalna w x_0 . Tangens kąta nachylenia siecznej jest ilorazem różnicowym. Gdy $x \rightarrow x_0$, iloraz ten dąży do $f'(x_0)$. Zatem dla kąta α nachylenia stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$



Interpretacja fizyczna pochodnej – prędkość chwilowa

Punkt P porusza się po osi OX . Jego współrzędna $s(t)$ jest funkcją czasu. Iloraz

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0,$$

opisuje średnią prędkość między chwilami t_0 i $t_0 + \Delta t$. Jeśli s jest różniczkowalna w t_0 , to prędkość chwilowa wynosi

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$



Przykład 1. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3x^2 - 4x$.

$$\begin{aligned}f(x+h) &= 3(x+h)^2 - 4(x+h) \\&= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 4x - 4h.\end{aligned}$$

Dla $h \neq 0$ otrzymujemy

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{6xh + 3h^2 - 4h}{h} = 6x + 3h - 4.$$

Stąd dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 4) = 6x - 4.$$

Przykład 2. Dla $f(x) = \sqrt{x}$ i $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Przykład 2. Dla $f(x) = \sqrt{x}$ i $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pochodne jednostronne

Jeśli f jest określona w x_0 i w odpowiednim jednostronnym otoczeniu tego punktu, definiujemy – o ile granice są skończone –

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Przykład 2. Dla $f(x) = \sqrt{x}$ i $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pochodne jednostronne

Jeśli f jest określona w x_0 i w odpowiednim jednostronnym otoczeniu tego punktu, definiujemy – o ile granice są skończone –

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dla punktu wewnętrznego dziedziny $f'(x_0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie pochodne jednostronne istnieją i są równe.

Funkcja $\sqrt{x}$ nie ma skończonej pochodnej prawostronnej w 0, bo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Przykład 1. Dla $f(x) = \sin x$ mamy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} = 1.$$

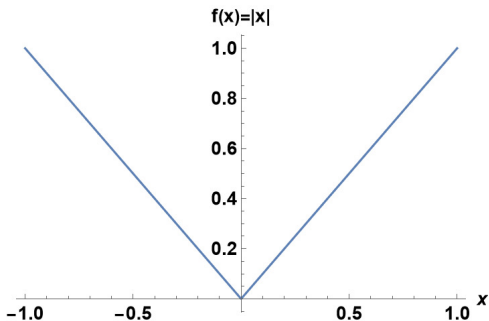
Przykład 1. Dla $f(x) = \sin x$ mamy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} = 1.$$

Przykład 2. Funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w 0:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Pochodne jednostronne są różne, więc $f'(0)$ nie istnieje.



Twierdzenie: różniczkowalność pociąga za sobą ciągłość

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w x_0 , to jest ciągła w x_0 .

Implikacja odwrotna nie zachodzi: $f(x) = |x|$ jest ciągła w 0, ale nie jest tam różniczkowalna.

Dowód. Dla $x \neq x_0$ mamy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

czyli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Pochodne wyższych rzędów

Jeśli f jest różniczkowalna na otwartym przedziale I , to jej pochodna jest funkcją $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f' nazywamy *drugą pochodną* funkcji f :

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Pochodne wyższych rzędów

Jeśli f jest różniczkowalna na otwartym przedziale I , to jej pochodna jest funkcją $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f' nazywamy *drugą pochodną* funkcji f :

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Przyjmując $f^{(0)} = f$, definiujemy rekurencyjnie

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}.$$

Wymagamy, aby $f^{(n)}$ była określona w otoczeniu x . Stosujemy też oznaczenie $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$.

Pochodne wyższych rzędów

Jeśli f jest różniczkowalna na otwartym przedziale I , to jej pochodna jest funkcją $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f' nazywamy *drugą pochodną* funkcji f :

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Przyjmując $f^{(0)} = f$, definiujemy rekurencyjnie

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}.$$

Wymagamy, aby $f^{(n)}$ była określona w otoczeniu x . Stosujemy też oznaczenie $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$.

Dla $n \geq 1$ funkcja jest *n -krotnie różniczkowalna* w x_0 , jeśli $f^{(n-1)}$ jest określona w otoczeniu x_0 i ma pochodną w x_0 .

Interpretacja drugiej pochodnej – przyspieszenie

Punkt P porusza się po osi OX , a jego współrzędna $s(t)$ jest dwukrotnie różniczkowalną funkcją czasu. Prędkość chwilowa wynosi

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Przyspieszenie w chwili t_0 jest równe

$$a(t_0) = s''(t_0) = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$



Dla funkcji stałej $f(x) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Dla funkcji stałej $f(x) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Ponadto $(x)' = 1$, a dla całkowitego $n \geq 2$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Ze wzoru dwumianowego, dla $h \neq 0$,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ składniki sumy dążą do zera. Stąd $(x^n)' = nx^{n-1}$. W zapisie wielomianu przyjmujemy $x^0 \equiv 1$. □

Podstawowe wzory – ciąg dalszy

Potęga rzeczywista: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Podstawiając $t = h/x$ i korzystając ze znanej granicy, otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Podstawowe wzory – ciąg dalszy

Potęga rzeczywista: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Podstawiając $t = h/x$ i korzystając ze znanej granicy, otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Funkcja wykładnicza: $(a^x)' = a^x \ln a$ dla $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

W szczególności $(e^x)' = e^x$; dla $a = 1$ pochodna wynosi 0.

Podstawowe wzory – ciąg dalszy

Potęga rzeczywista: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Podstawiając $t = h/x$ i korzystając ze znanej granicy, otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Funkcja wykładnicza: $(a^x)' = a^x \ln a$ dla $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

W szczególności $(e^x)' = e^x$; dla $a = 1$ pochodna wynosi 0.

Sinus: $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$ (kąty w radianach):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos(x+h/2) = \cos x.$$

Cosinus: $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(x+h/2) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

Cosinus: $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(x+h/2) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

Działania arytmetyczne na pochodnych

Jeśli f i g są różniczkowalne w x_0 , a $c \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\ (cf)'(x_0) &= cf'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Reguła Leibniza

Dla funkcji f i g różniczkowalnych w rozważanym punkcie

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Δg	$f \cdot \Delta g$	$\Delta f \cdot \Delta g$
g	$f \cdot g$	$\Delta f \cdot g$
	f	Δf

Dowody reguł dla iloczynu i ilorazu

Założmy, że f i g są różniczkowalne w x . Dla $F = fg$ i $h \neq 0$ mamy

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ponieważ g jest ciągła w x , po przejściu do granicy otrzymujemy

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dowody reguł dla iloczynu i ilorazu

Założmy, że f i g są różniczkowalne w x . Dla $F = fg$ i $h \neq 0$ mamy

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ponieważ g jest ciągła w x , po przejściu do granicy otrzymujemy

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Jeśli $g(x) \neq 0$, to z ciągłości g wynika, że także $g(x+h) \neq 0$ dla dostatecznie małych h . Dla $H = f/g$ mamy

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}.$$

Stąd

$$H'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i ściśle monotoniczna. Załóżmy, że $x_0 \in (a, b)$, a pochodna $f'(x_0)$ istnieje i jest niezerowa. Wówczas funkcja odwrotna $g : f((a, b)) \rightarrow (a, b)$ jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dowód twierdzenia o funkcji odwrotnej. Ciągłość funkcji odwrotnej daje $y \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y) \rightarrow x_0$. Dla $y = f(x)$, dzięki różnowartościowości f , otrzymujemy

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowód twierdzenia o funkcji odwrotnej. Ciągłość funkcji odwrotnej daje $y \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y) \rightarrow x_0$. Dla $y = f(x)$, dzięki różnowartościowości f , otrzymujemy

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Logarytm. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ oraz $y = \log_a x$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dowód twierdzenia o funkcji odwrotnej. Ciągłość funkcji odwrotnej daje $y \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y) \rightarrow x_0$. Dla $y = f(x)$, dzięki różnowartościowości f , otrzymujemy

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Logarytm. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ oraz $y = \log_a x$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Arcus sinus. Dla $x \in (-1, 1)$ i $y = \arcsin x$ mamy $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, więc $\cos y > 0$ i

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arcus cosinus. Dla $x \in (-1, 1)$ oraz $y = \arccos x \in (0, \pi)$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arcus cosinus. Dla $x \in (-1, 1)$ oraz $y = \arccos x \in (0, \pi)$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arcus tangens. Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $y = \arctg x \in (-\pi/2, \pi/2)$:

$$(\arctg x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Arcus cosinus. Dla $x \in (-1, 1)$ oraz $y = \arccos x \in (0, \pi)$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arcus tangens. Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $y = \arctg x \in (-\pi/2, \pi/2)$:

$$(\arctg x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Arcus cotangens. Przyjmujemy gałąź $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$. Dla $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Niech h będzie różniczkowalna w x_0 , a f – w $u_0 = h(x_0)$. Załóżmy, że złożenie $\varphi = f \circ h$ jest określone w otoczeniu x_0 . Wówczas φ jest różniczkowalna w x_0 i

$$\varphi'(x_0) = f'(h(x_0))h'(x_0).$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Niech h będzie różniczkowalna w x_0 , a f – w $u_0 = h(x_0)$. Załóżmy, że złożenie $\varphi = f \circ h$ jest określone w otoczeniu x_0 . Wówczas φ jest różniczkowalna w x_0 i

$$\varphi'(x_0) = f'(h(x_0))h'(x_0).$$

Przykład. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\left[2^{\arctg(\sin x)} \right]' = 2^{\arctg(\sin x)} \ln 2 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

Różniczkowanie logarytmiczne

Dla $x \neq 0$ mamy $(\ln |x|)' = 1/x$: dla $x > 0$ różniczkujemy $\ln x$, a dla $x < 0$ – $\ln(-x)$. Jeśli f jest różniczkowalna i $f(x) \neq 0$, to

$$[\ln |f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Różniczkowanie logarytmiczne

Dla $x \neq 0$ mamy $(\ln |x|)' = 1/x$: dla $x > 0$ różniczkujemy $\ln x$, a dla $x < 0$ – $\ln(-x)$. Jeśli f jest różniczkowalna i $f(x) \neq 0$, to

$$[\ln |f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Przykład. Rozważmy rzeczywiste pierwiastki nieparzystych stopni:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} = \frac{x\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[15]{5-x}}, \quad x \neq 5.$$

Dla $x \notin \{0, 5\}$:

$$\ln |f(x)| = \ln |x| + \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{15} \ln |5 - x|,$$

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2 + 1)} + \frac{1}{15(5 - x)} \right).$$

W punkcie 0 obliczamy pochodną z definicji:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2+1}}{\sqrt[15]{5-h}} = 5^{-1/15}.$$

Styczna do wykresu funkcji

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to styczna do jej wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.

Styczna do wykresu funkcji

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 , to styczna do jej wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.

Jeśli f jest ciągła w x_0 , a granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

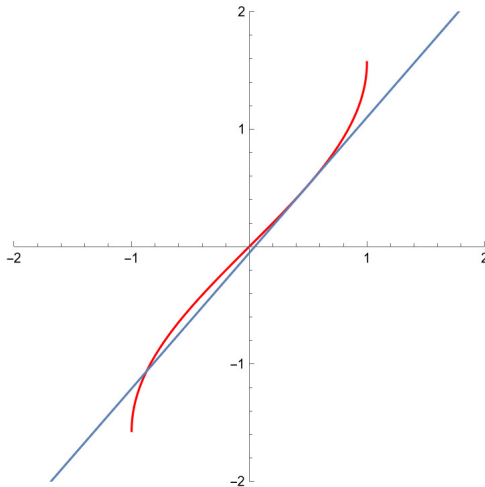
wynosi $+\infty$ lub $-\infty$, to wykres ma w tym punkcie *styczną pionową* o równaniu $x = x_0$.

Na końcu przedziału dziedziny rozpatrujemy odpowiednią granicę jednostronną i ciągłość jednostronną.

Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \arcsin x$

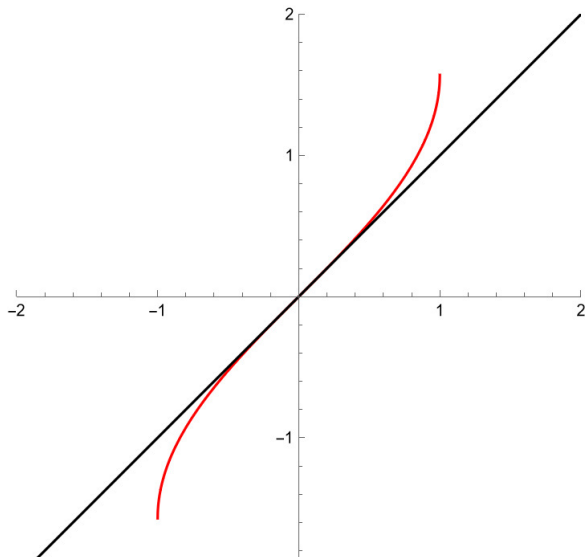
W punkcie $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ mamy $f'(1/2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Stąd

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{6}.$$



Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \arcsin x$

W punkcie $(0,0)$ mamy $f'(0) = 1$, więc styczna ma równanie $y = x$.



Styczne pionowe na końcach dziedziny

Funkcje $\arcsin x$ i $\arccos x$ są ciągłe na $[-1, 1]$, ale w $x = -1$ i $x = 1$ nie mają skończonych pochodnych jednostronnych.

Styczne pionowe na końcach dziedziny

Funkcje $\arcsin x$ i $\arccos x$ są ciągłe na $[-1, 1]$, ale w $x = -1$ i $x = 1$ nie mają skończonych pochodnych jednostronnych.

Na przykład, podstawiając $x = \sin y$ oraz $t = y + \pi/2 \rightarrow 0^+$, otrzymujemy $x = -\cos t$ i

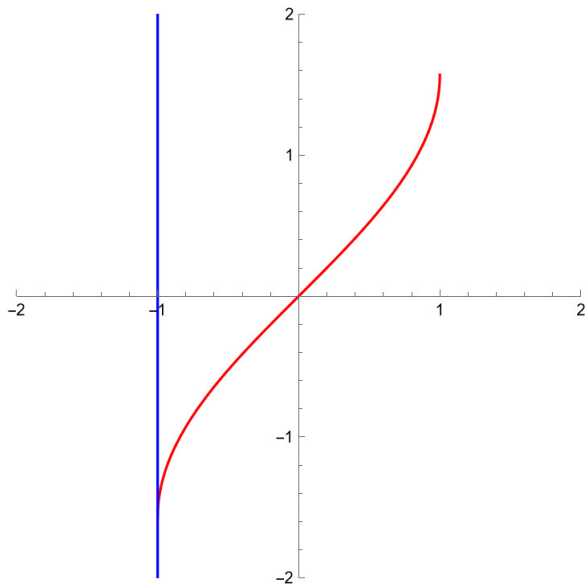
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arcsin x - \arcsin(-1)}{x + 1} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{1 - \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t/2}{\sin(t/2)} \frac{1}{\sin(t/2)} = +\infty.\end{aligned}$$

Także przy $x \rightarrow 1^-$ iloraz różnicowy dla $\arcsin$ dąży do $+\infty$. Dla $\arccos$ obie odpowiednie granice wynoszą $-\infty$.

Styczne do obu wykresów na końcach dziedziny są pionowe: $x = -1$ oraz $x = 1$.

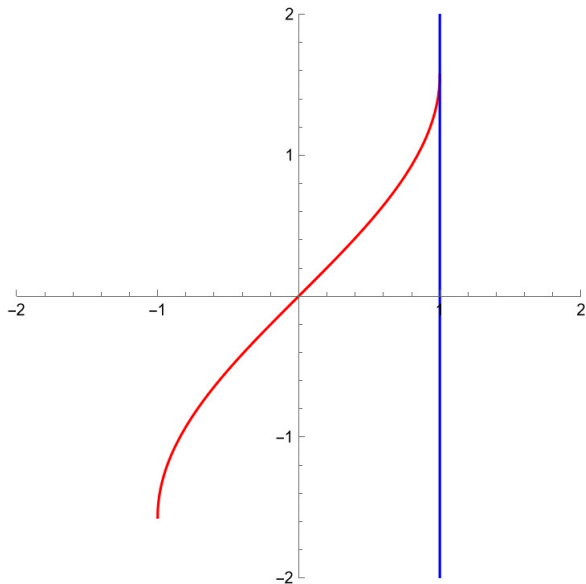
Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \arcsin x$

W punkcie $(-1, -\pi/2)$ styczna ma równanie $x = -1$.



Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \arcsin x$

W punkcie $(1, \pi/2)$ styczna ma równanie $x = 1$.



Normalna do wykresu funkcji

Normalna do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to prosta przechodząca przez ten punkt i prostopadła do stycznej.

Niech f będzie różniczkowalna w x_0 . Jeśli $f'(x_0) \neq 0$, współczynnik kierunkowy normalnej wynosi

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi/2) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

gdzie α jest kątem nachylenia stycznej do osi OX . Zatem równanie normalnej ma postać

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Jeśli $f'(x_0) = 0$, styczna jest pozioma, a normalna ma równanie $x = x_0$.

Styczna i normalna do paraboli

Wyznaczyć styczne i normalne do paraboli $y = x^2 - 4x$ w punktach o odciętych 1 i 2.

$$f(x) = x^2 - 4x, \quad f'(x) = 2x - 4.$$

Dla $x = 1$: $f(1) = -3$, $f'(1) = -2$.

$$\text{styczna: } y = -2(x - 1) - 3 = -2x - 1,$$

$$\text{normalna: } y = \frac{1}{2}(x - 1) - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

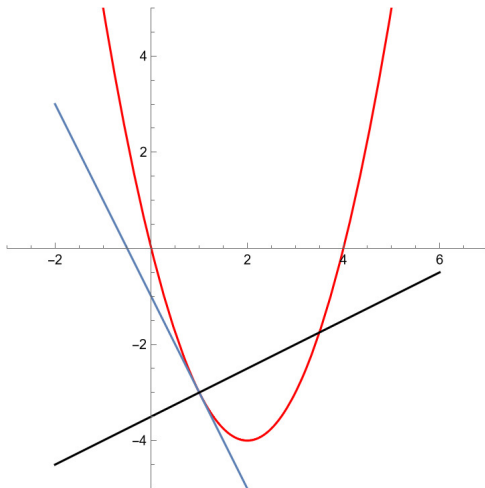
Dla $x = 2$: $f(2) = -4$, $f'(2) = 0$.

$$\text{styczna: } y = -4, \quad \text{normalna: } x = 2.$$

Styczna i normalna do paraboli w punkcie $(1, -3)$

Dla $y = x^2 - 4x$ otrzymujemy:

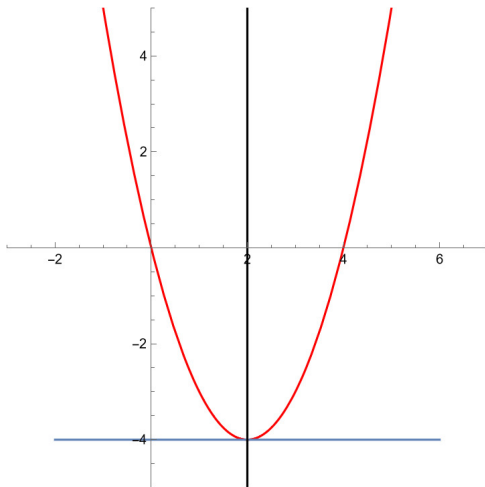
$$\text{styczna: } y = -2x - 1, \quad \text{normalna: } y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$



Styczna i normalna do paraboli w punkcie $(2, -4)$

Dla $y = x^2 - 4x$ otrzymujemy:

styczna: $y = -4$, normalna: $x = 2$.



Styczne i normalne do okręgu

Wyznaczyć styczne i normalne do okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ w punktach przecięcia z osią OX .

$$y = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0, \quad A = (-1, 0), \quad B = (3, 0).$$

W otoczeniu tych punktów górna gałąź okręgu jest wykresem funkcji

$$y = -2 + \sqrt{8 - (x - 1)^2}.$$

Różniczkując równanie okręgu względem x , otrzymujemy

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0, \quad y' = \frac{1 - x}{y + 2}.$$

W punktach A i B mianownik jest niezerowy, a nachylenia wynoszą odpowiednio 1 i -1 . Zatem

	styczna	normalna
A	$y = x + 1$	$y = -x - 1$
B	$y = -x + 3$	$y = x - 3$

Styczna i normalna do cykloidy

Dla $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ i $t_0 = \pi/2$ mamy

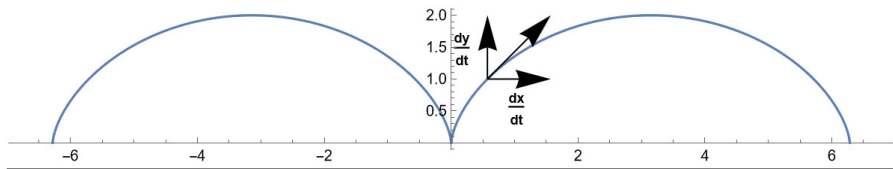
$$P = \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right), \quad x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t.$$

Ponieważ $x'(t_0) = 1 \neq 0$, lokalnie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/2} = 1.$$

Zatem

$$\text{styczna: } y = x - \frac{\pi}{2} + 2, \quad \text{normalna: } y = -x + \frac{\pi}{2}.$$



□

Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$

Iloczyn skalarny wektorów $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$ to liczba

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Długość wektora u wynosi

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{u \cdot u}.$$

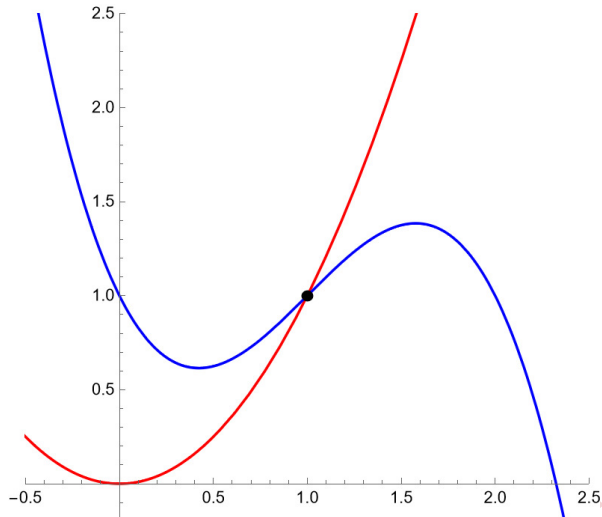
Jeśli oba wektory są niezerowe, a $\alpha \in [0, \pi]$ jest kątem między nimi, to

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha.$$

Zatem niezerowe wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $u \cdot v = 0$ (czyli $\alpha = \pi/2$).

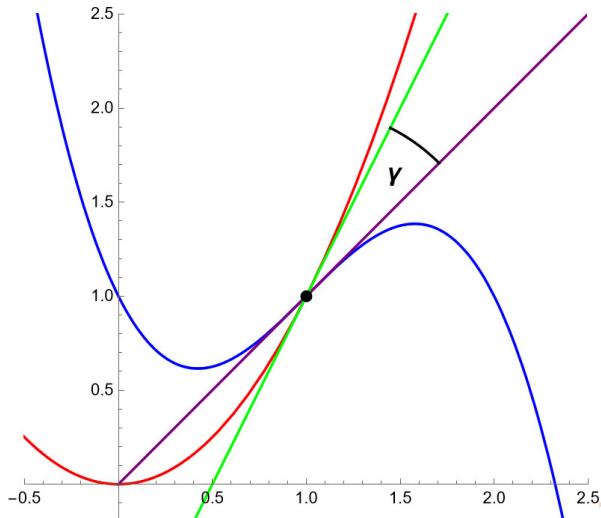
Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Założmy, że krzywe mają styczne w punkcie przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$. Kątem między krzywymi nazywamy mniejszy z kątów między tymi stycznymi, czyli $\gamma \in [0, \pi/2]$.



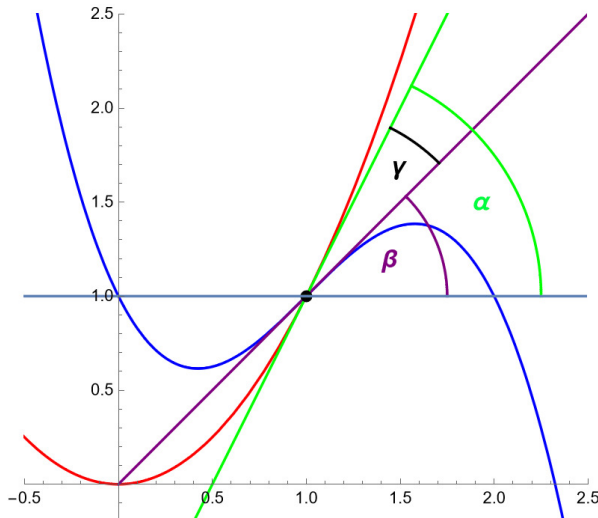
Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Założmy, że krzywe mają styczne w punkcie przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$. Kątem między krzywymi nazywamy mniejszy z kątów między tymi stycznymi, czyli $\gamma \in [0, \pi/2]$.



Kąt między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Założmy, że krzywe mają styczne w punkcie przecięcia $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$. Kątem między krzywymi nazywamy mniejszy z kątów między tymi stycznymi, czyli $\gamma \in [0, \pi/2]$.



Kąt między krzywymi

Twierdzenie

Niech $f(x_0) = g(x_0)$, a f i g będą różniczkowalne w x_0 . Dla $m_1 = f'(x_0)$ i $m_2 = g'(x_0)$ kąt między wykresami wynosi

$$\gamma = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|, & 1 + m_1 m_2 \neq 0, \\ \pi/2, & 1 + m_1 m_2 = 0. \end{cases}$$

Kąt między krzywymi

Twierdzenie

Niech $f(x_0) = g(x_0)$, a f i g będą różniczkowalne w x_0 . Dla $m_1 = f'(x_0)$ i $m_2 = g'(x_0)$ kąt między wykresami wynosi

$$\gamma = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|, & 1 + m_1 m_2 \neq 0, \\ \pi/2, & 1 + m_1 m_2 = 0. \end{cases}$$

Dowód. Niech α i β będą kątami nachylenia stycznych. Dla $1 + m_1 m_2 \neq 0$ mamy

$$\operatorname{tg} \gamma = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Jeśli $1 + m_1 m_2 = 0$, wektory kierunkowe stycznych $u = (1, m_1)$ i $v = (1, m_2)$ spełniają $u \cdot v = 0$. Są więc prostopadłe i $\gamma = \pi/2$. □

Kąt przecięcia wykresów sinusa i cosinusa

Punkty przecięcia spełniają

$$\sin x = \cos x \iff x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dla $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ mamy

$$f'(x_k) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g'(x_k) = -(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem w każdym punkcie przecięcia

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left| \frac{(-1)^k \sqrt{2}}{1 - 1/2} \right| = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}).$$

Kąty przecięcia prostej i paraboli

Rozważmy prostą $x + y - 4 = 0$ i parabolę $2y = 8 - x^2$. Ich punkty przecięcia to $A = (0, 4)$ i $B = (2, 2)$.

$$f(x) = 4 - x, \quad f'(x) = -1, \quad g(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2, \quad g'(x) = -x.$$

W punkcie A nachylenia wynoszą -1 i 0 , więc

$$\gamma_A = \operatorname{arctg} \left| \frac{-1 - 0}{1 + 0} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

W punkcie B nachylenia wynoszą -1 i -2 , więc

$$\gamma_B = \operatorname{arctg} \left| \frac{-1 - (-2)}{1 + (-1)(-2)} \right| = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Twierdzenie de l'Hospitala

Sąsiedztwo punktu

Dla $r > 0$ sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r).$$

Twierdzenie de l'Hospitala

Niech f i g będą różniczkowalne w $S(x_0, r)$ oraz niech $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ w tym zbiorze. Załóżmy, że przy $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \rightarrow 0, \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{lub} \quad |f(x)| \rightarrow +\infty, \quad |g(x)| \rightarrow +\infty.$$

Jeśli istnieje granica $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ w zbiorze $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Twierdzenie stosuje się także do granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, przy odpowiednich założeniach w jednostronnym sąsiedztwie lub na odpowiedniej półprostej. Zapis $\stackrel{H}{=}$ oznacza użycie reguły de l'Hospitala.

Twierdzenie stosuje się także do granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, przy odpowiednich założeniach w jednostronnym sąsiedztwie lub na odpowiedniej półprostej. Zapis $\stackrel{H}{=}$ oznacza użycie reguły de l'Hospitala.

1. Dwukrotnie otrzymujemy iloraz typu 0/0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Twierdzenie stosuje się także do granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, przy odpowiednich założeniach w jednostronnym sąsiedztwie lub na odpowiedniej półprostej. Zapis $\stackrel{H}{=}$ oznacza użycie reguły de l'Hospitala.

1. Dwukrotnie otrzymujemy iloraz typu $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Iloczyn typu $0 \cdot (-\infty)$ przekształcamy w iloraz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0.$$

Twierdzenie stosuje się także do granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, przy odpowiednich założeniach w jednostronnym sąsiedztwie lub na odpowiedniej półprostej. Zapis $\stackrel{H}{=}$ oznacza użycie reguły de l'Hospitala.

1. Dwukrotnie otrzymujemy iloraz typu $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Iloczyn typu $0 \cdot (-\infty)$ przekształcamy w iloraz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0.$$

3. Dla potęgi typu ∞^0 najpierw obliczamy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Stąd } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x/x} = e^0 = 1.$$

4. Rozważmy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$. Iloraz pochodnych $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ nie ma granicy: dla $x_n = 2n\pi$ wynosi 0, a dla $y_n = 2n\pi + \pi/2$ wynosi 1. Ponadto $1 + \cos x = 0$ w punktach $(2n + 1)\pi$. Założenia reguły de l'Hospitala nie są więc spełnione. Bezpośrednio otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x/x}{1 + \sin x/x} = 1,$$

ponieważ $|\sin x/x| \leq 1/x \rightarrow 0$.

4. Rozważmy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$. Iloraz pochodnych $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ nie ma granicy: dla $x_n = 2n\pi$ wynosi 0, a dla $y_n = 2n\pi + \pi/2$ wynosi 1. Ponadto $1 + \cos x = 0$ w punktach $(2n + 1)\pi$. Założenia reguły de l'Hospitala nie są więc spełnione. Bezpośrednio otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x/x}{1 + \sin x/x} = 1,$$

ponieważ $|\sin x/x| \leq 1/x \rightarrow 0$.

5. Po sprowadzeniu różnicy do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

Definicja

Niech c będzie punktem skupienia dziedziny z rozważanej strony. Prosta $x = c$ jest *lewostronną asymptotą pionową* wykresu f , jeśli

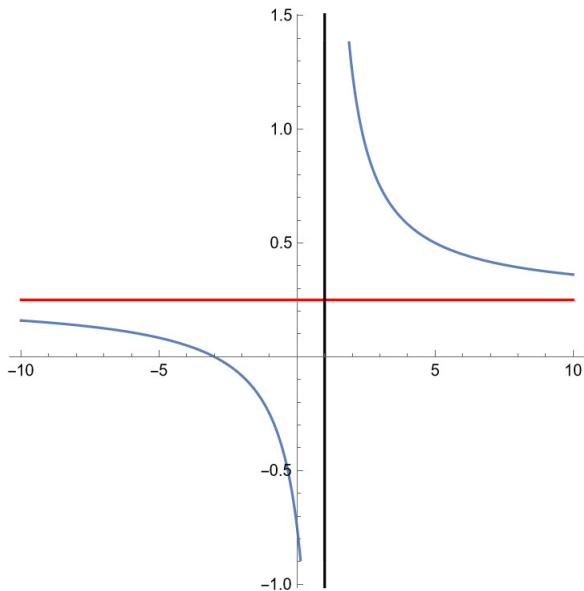
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty.$$

Jest *prawostronną asymptotą pionową*, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty.$$

Jest *obustronną asymptotą pionową*, gdy spełnia oba warunki. Znaki granic jednostronnych mogą być różne.

Obustronne asymptoty: pionowa i pozioma



Asymptoty ukośne i poziome

Niech $m, k \in \mathbb{R}$, a dziedzina f będzie nieograniczona w rozważanym kierunku. Prosta $y = mx + k$ jest asymptotą wykresu f :

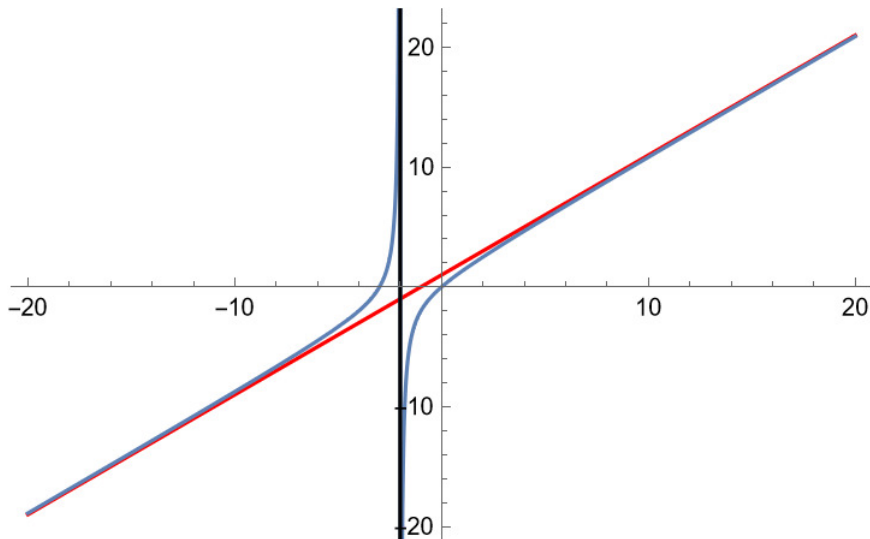
lewostronną, jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx - k] = 0$,

prawostronną, jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - k] = 0$.

Dla $m \neq 0$ nazywamy ją *asymptotą ukośną*, a dla $m = 0$ – *asymptotą poziomą*.

Asymptota jest *obustronna*, jeśli ta sama prosta jest asymptotą lewostronną i prawostronną.

Obustronne asymptoty: ukośna i pionowa



Wyznaczanie asymptoty w $+\infty$

Niech dziedzina f będzie nieograniczona z góry. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$, jest asymptotą prawostronną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = k.$$

Dla $m \neq 0$ asymptota jest ukośna, a dla $m = 0$ – pozioma.

Analogicznie postępujemy w $-\infty$, dla dziedziny nieograniczonej z dołu.

Wyznaczanie asymptoty w $+\infty$

Niech dziedzina f będzie nieograniczona z góry. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$, jest asymptotą prawostronną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = k.$$

Dla $m \neq 0$ asymptota jest ukośna, a dla $m = 0$ – pozioma.

Analogicznie postępujemy w $-\infty$, dla dziedziny nieograniczonej z dołu.

Dowód ($\Rightarrow$). Jeśli $r(x) = f(x) - mx - k \rightarrow 0$, to

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{k}{x} + \frac{r(x)}{x} \rightarrow m,$$

co daje pierwszą granicę.

Dalszy ciąg dowodu. Dla $r(x) = f(x) - mx - k \rightarrow 0$ mamy również

$$f(x) - mx = k + r(x) \rightarrow k.$$

($\Leftarrow$) Jeśli $f(x) - mx \rightarrow k$, to $f(x) - mx - k \rightarrow 0$, co jest definicją asymptoty. □

Dalszy ciąg dowodu. Dla $r(x) = f(x) - mx - k \rightarrow 0$ mamy również

$$f(x) - mx = k + r(x) \rightarrow k.$$

($\Leftarrow$) Jeśli $f(x) - mx \rightarrow k$, to $f(x) - mx - k \rightarrow 0$, co jest definicją asymptoty. □

Przykład 1. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

W każdym punkcie $x_0 \neq -2$ funkcja jest ciągła, zatem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Jedynym kandydatem na asymptotę pionową jest więc prosta $x = -2$.

Asymptota pionowa funkcji wymiernej

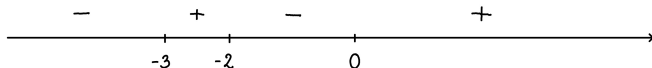
Dla $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$ licznik dąży do -2 przy $x \rightarrow -2$. Mianownik zmienia znak, więc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Zatem $x = -2$ jest obustronną asymptotą pionową.

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2} = \frac{x(x+3)}{x+2}$$

$$x(x+3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = -3$$



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (0, \infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x(x+3)(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 0)$$

Asymptota ukośna funkcji wymiernej

Dla $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$ otrzymujemy w obu kierunkach:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x} = 1,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+2} = 1.$$

Prosta $y = x + 1$ jest obustronną asymptotą ukośną. Można to również odczytać z rozkładu

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x+2}, \quad f(x) - (x+1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Asymptoty funkcji $f(x) = x + \sin x/x$

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcja jest ciągła w każdym punkcie dziedziny, a ponadto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Nie ma więc asymptot pionowych. W obu kierunkach nieskończoności

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2} \right) = 1, \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Jedyną asymptotą ukośną jest zatem prosta $y = x$; jest to asymptota obustronna. Asymptot poziomych nie ma.

Zachowanie słabej nierówności przy przejściu do granicy

Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$, a x_0 niech będzie punktem skupienia D . Załóżmy, że istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Jeśli dla pewnego $r > 0$ zachodzi

$$\forall x \in D \cap S(x_0, r) \quad f(x) \leq g(x),$$

to $a \leq b$.

Twierdzenie zachodzi również dla granic jednostronnych, przy odpowiednim jednostronnym warunku skupienia dziedziny.

Ekstrema lokalne funkcji

Definicja

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Funkcja ma w x_0 *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap S(x_0, \delta) \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Ma w x_0 *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap S(x_0, \delta) \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Ekstrema lokalne funkcji

Definicja

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Funkcja ma w x_0 *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap S(x_0, \delta) \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Ma w x_0 *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap S(x_0, \delta) \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Jeśli w tych warunkach zastąpimy $\leq$ przez $<$ albo $\geq$ przez $>$, otrzymamy odpowiednio *maksimum lokalne właściwe* albo *minimum lokalne właściwe* (nazywane też ścisłymi).

Maksima i minima lokalne nazywamy *ekstremami lokalnymi*.

1. Na przedziale $(-\pi, \pi)$ funkcja $f(x) = |\sin x|$ ma minimum lokalne właściwe w 0 oraz maksima lokalne właściwe w $-\pi/2$ i $\pi/2$. Wystarczy przyjąć $\delta = \pi/4$:

$$0 < |x| < \delta \implies |\sin x| > 0 = f(0),$$

$$0 < |x + \pi/2| < \delta \implies |\sin x| < 1 = f(-\pi/2).$$

Analogicznie uzasadniamy maksimum w $\pi/2$.

1. Na przedziale $(-\pi, \pi)$ funkcja $f(x) = |\sin x|$ ma minimum lokalne właściwe w 0 oraz maksima lokalne właściwe w $-\pi/2$ i $\pi/2$. Wystarczy przyjąć $\delta = \pi/4$:

$$0 < |x| < \delta \implies |\sin x| > 0 = f(0),$$

$$0 < |x + \pi/2| < \delta \implies |\sin x| < 1 = f(-\pi/2).$$

Analogicznie uzasadniamy maksimum w $\pi/2$.

2. Funkcja $f(x) = x^3$ nie ma ekstremum lokalnego w 0. Dla każdego $\delta > 0$ punkty $x_+ = \delta/2$ i $x_- = -\delta/2$ należą do $S(0, \delta)$, a

$$f(x_+) > f(0) = 0 > f(x_-).$$

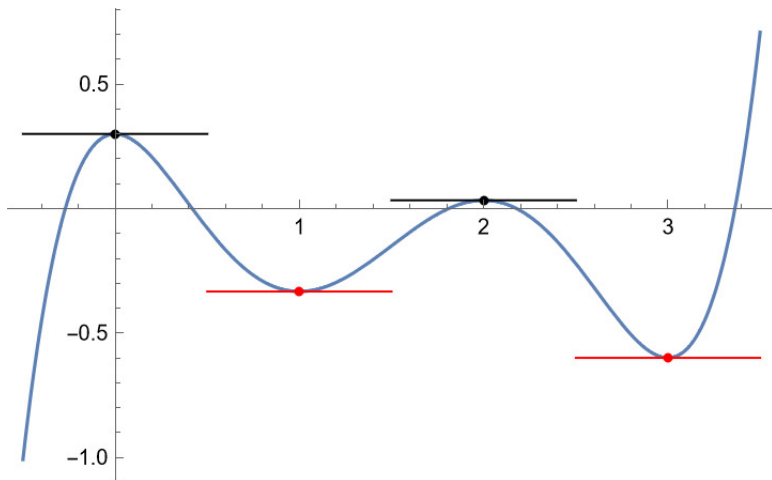
W każdym sąsiedztwie 0 występują zatem wartości większe i mniejsze od $f(0)$.

Twierdzenie Fermata – warunek konieczny ekstremum

Jeśli x_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny, funkcja f ma w nim ekstremum lokalne i jest w nim różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie Fermata – warunek konieczny ekstremum

Jeśli x_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny, funkcja f ma w nim ekstremum lokalne i jest w nim różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.



Twierdzenie Fermata – warunek konieczny ekstremum

Jeśli x_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny, funkcja f ma w nim ekstremum lokalne i jest w nim różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód dla maksimum. Wybierzmy $r > 0$ tak małe, aby $(x_0 - r, x_0 + r)$ zawierał się w dziedzinie i $f(x) \leq f(x_0)$ dla wszystkich x z tego przedziału. Wtedy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r),$$

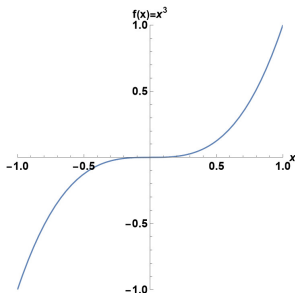
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0).$$

Ponieważ f jest różniczkowalna w x_0 , otrzymujemy

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0,$$

a więc $f'(x_0) = 0$. Dowód dla minimum jest analogiczny. □

1. Warunek $f'(x_0) = 0$ nie wystarcza do istnienia ekstremum. Na przykład dla $f(x) = x^3$ mamy $f'(0) = 0$, lecz f nie ma ekstremum w 0.



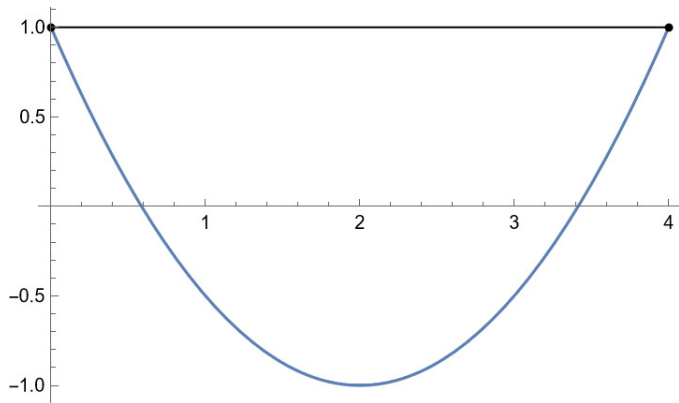
2. Kandydatami na ekstrema wewnątrz dziedziny są punkty, w których pochodna jest równa zero lub nie istnieje. Na przykład $|x|$ ma minimum w 0, mimo że nie jest tam różniczkowalna.

Osobno należy sprawdzić należące do dziedziny punkty brzegowe, np. końce przedziału. Funkcja $f(x) = x$ na $[0, 1]$ ma minimum w 0 i maksimum w 1.

Twierdzenie Rolle'a

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b) i $f(a) = f(b)$, to

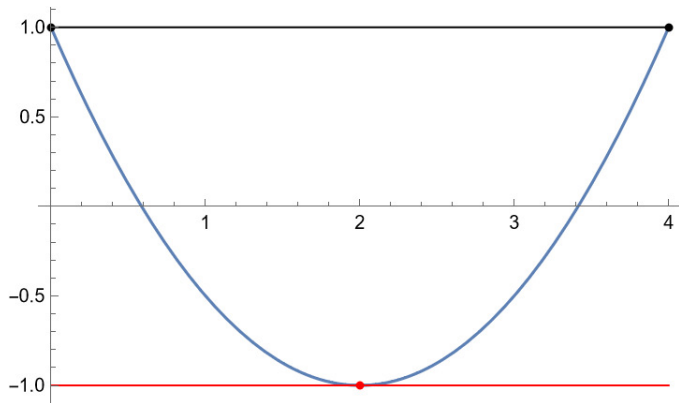
$$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.$$



Twierdzenie Rolle'a

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b) i $f(a) = f(b)$, to

$$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.$$



Dowód twierdzenia Rolle'a

Z twierdzenia Weierstrassa istnieją $c_1, c_2 \in [a, b]$ takie, że

$$f(c_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(c_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Jeśli $f(c_1) = f(c_2)$, funkcja jest stała na $[a, b]$, więc $f'(c) = 0$ dla każdego $c \in (a, b)$.

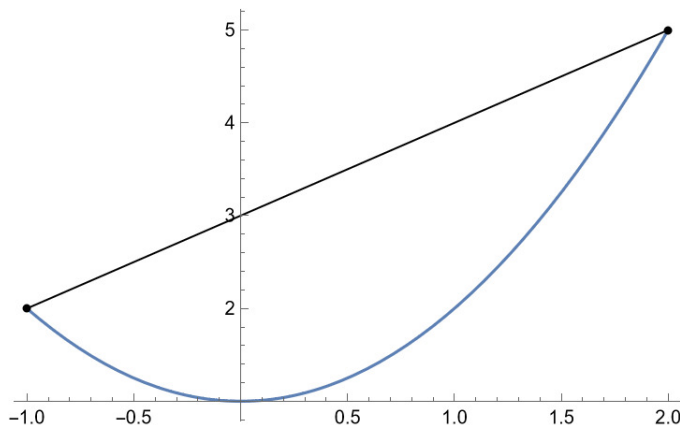
Jeśli $f(c_1) < f(c_2)$, to z równości $f(a) = f(b)$ wynika, że przynajmniej jeden z punktów c_1, c_2 leży w (a, b) .

W tym punkcie funkcja osiąga ekstremum lokalne i jest różniczkowalna, więc na mocy twierdzenia Fermata jej pochodna jest równa zeru. □

Twierdzenie Lagrange'a

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) , to

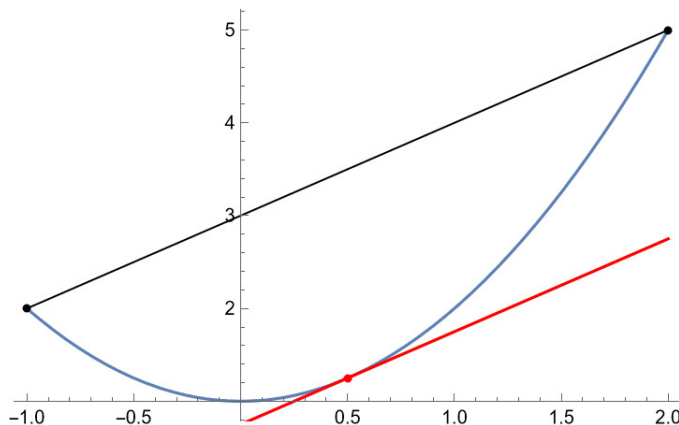
$$\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Twierdzenie Lagrange'a

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) , to

$$\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Dowód twierdzenia Lagrange'a

Zdefiniujmy

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funkcja h jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b) oraz $h(a) = h(b) = 0$. Spełnia więc wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a.

Istnieje zatem $c \in (a, b)$ takie, że

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad \square$$

Styczne równoległe do siecznej

Dla $f(x) = x^3$ znaleźć punkty wykresu, w których styczne są równoległe do siecznej przechodzącej przez $A = (-1, -1)$ i $B = (2, 8)$. Jej współczynnik kierunkowy wynosi

$$m = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3.$$

Rozwiązujemy równanie $f'(x) = m$ na całej dziedzinie funkcji:

$$3x^2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ lub } x = -1.$$

Szukane punkty to $M_1 = (1, 1)$ i $M_2 = (-1, -1)$.

Związek z twierdzeniem Lagrange'a

Twierdzenie zastosowane na $[-1, 2]$ zapewnia punkt $c \in (-1, 2)$ spełniający $f'(c) = 3$. W tym otwartym przedziale jedynym rozwiązaniem jest $c = 1$. Punkt $x = -1$ jest końcem przedziału i nie jest takim punktem c .

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Niech f będzie różniczkowalna na otwartym przedziale (a, b) .

- 1 Jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest stała na (a, b) .
- 2 Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest ściśle rosnąca.
- 3 Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest ściśle malejąca.

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Niech f będzie różniczkowalna na otwartym przedziale (a, b) .

- 1 Jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest stała na (a, b) .
- 2 Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest ściśle rosnąca.
- 3 Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest ściśle malejąca.

Dowód punktu 2. Niech $a < x_1 < x_2 < b$. Funkcja f jest ciągła na $[x_1, x_2]$ i różniczkowalna na (x_1, x_2) . Istnieje więc $c \in (x_1, x_2)$ takie, że

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

Ponieważ $x_2 - x_1 > 0$, mamy $f(x_2) > f(x_1)$. Pozostałe dwa wnioski dowodzimy analogicznie. □

1. Sinus hiperboliczny. Funkcja

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$, ponieważ

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x = \operatorname{ch} x > 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcję $\cosh$ nazywamy cosinusem hiperbolicznym.

1. Sinus hiperboliczny. Funkcja

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$, ponieważ

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x = \operatorname{ch} x > 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcję $\cosh$ nazywamy cosinusem hiperbolicznym.

2. Liczba pierwiastków równania. Niech $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$.

Ponieważ

$$f'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

funkcja jest ściśle rosnąca i ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Z ciągłości oraz nierówności $f(0) = -8 < 0 < 10 = f(1)$ wynika, że ma miejsce zerowe w $(0, 1)$. Równanie $3x^5 + 15x - 8 = 0$ ma więc dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

3. Wykazać, że $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ dla $x \in [-1, 1]$. Funkcja $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ jest ciągła na $[-1, 1]$, a dla $|x| < 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Jest więc stała na $(-1, 1)$, a dzięki ciągłości – również na $[-1, 1]$.
Ponieważ $f(0) = \pi/2$, otrzymujemy żadaną tożsamość.

3. Wykazać, że $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ dla $x \in [-1, 1]$. Funkcja $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ jest ciągła na $[-1, 1]$, a dla $|x| < 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Jest więc stała na $(-1, 1)$, a dzięki ciągłości – również na $[-1, 1]$. Ponieważ $f(0) = \pi/2$, otrzymujemy żadaną tożsamość.

4. Wykazać, że $\operatorname{arctg} x < x - x^3/6$ dla $x \in (0, 1)$. Niech $F(x) = \operatorname{arctg} x - x + x^3/6$. Wówczas $F(0) = 0$ i

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)} < 0 \quad (0 < x < 1).$$

Z twierdzenia Lagrange'a na $[0, x]$ istnieje $c \in (0, x)$ takie, że

$$F(x) - F(0) = F'(c)x < 0.$$

Zatem $\operatorname{arctg} x < x - x^3/6$ dla każdego $x \in (0, 1)$.

Monotoniczność a znak pochodnej

Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna.

- 1 Jeśli f jest niemalejąca, to $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.
- 2 Jeśli f jest nierosnąca, to $f'(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Dowód punktu 1. Ustalmy $x \in (a, b)$. Dla dostatecznie małego $h > 0$, takiego że $x + h \in (a, b)$, z monotoniczności wynika $f(x + h) \geq f(x)$, a więc

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Przechodząc do granicy prawostronnej i korzystając z różniczkowalności, mamy

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Dowód punktu 2 jest analogiczny. □