

Analiza, Wykład: Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej cz. 2

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Tw. (I. warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje pochodna f' w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$, to jeśli:

(1) $\exists \delta > 0$ $f'(x) < 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$
 f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,

(2) $\exists \delta > 0$ $f'(x) > 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$
 f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe,

(3) $\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) f'(x) > 0$ lub

$\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) f'(x) < 0 \Rightarrow f$ nie ma w punkcie x_0
ekstremum.

Tw. (I. warunek wystarczający istnienia ekstremum)

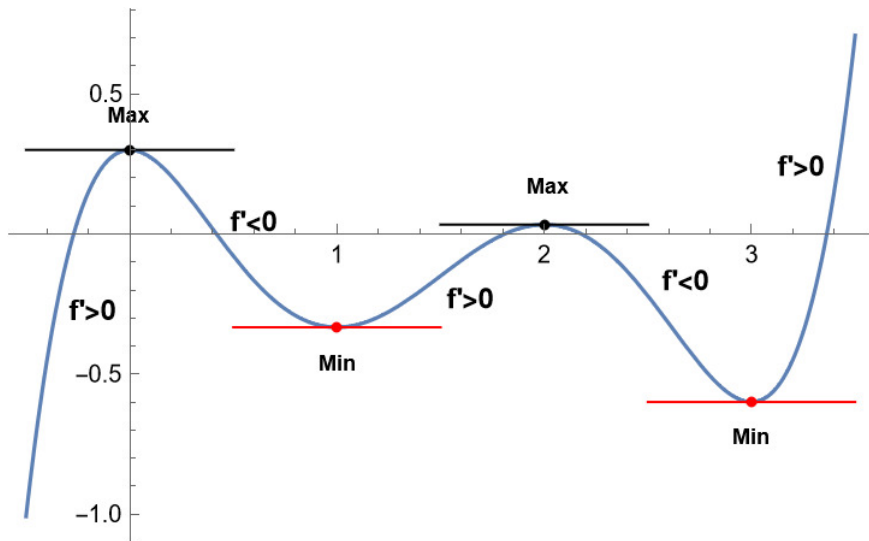
Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje pochodna f' w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$, to jeśli:

(1) $\exists \delta > 0$ $f'(x) < 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,

(2) $\exists \delta > 0$ $f'(x) > 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe,

(3) $\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) f'(x) > 0$ lub
 $\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) f'(x) < 0 \Rightarrow f$ nie ma w punkcie x_0 ekstremum.

Dowód: Z Twierdzenia Lagrange'a wynika, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ istnieje c leżący między x_0 i x taki, że $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$. Z tej uwagi otrzymujemy wszystkie punkty tezy. \square



Przykład:

$$(1) f(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i

Przykład:

$$(1) f(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases} \text{ zmienia znak w } x = 0.$$

Przykład:

$$(1) f(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases} \text{ zmienia znak w } x = 0.$$

(2) $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w $x = 0$, bo funkcja ciągła i

$$f'(x) = \cos x > 0 \quad \forall x \in S(0, \frac{\pi}{4}).$$

Przykład:

$$(1) f(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases} \text{ zmienia znak w } x = 0.$$

(2) $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w $x = 0$, bo funkcja ciągła i $f'(x) = \cos x > 0 \forall x \in S(0, \frac{\pi}{4})$.

$$(3) f(x) = x^2 + \sqrt{x^5}, \quad D_f = [0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} > 0 \quad x \in (0, +\infty) \text{ i } f'(0+) = 0$$

$\forall x \in (0, +\infty) f(0) = 0 < f(x)$ czyli f ma minimum w $x = 0$.

$$(4) f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ - minimum lokalne}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ - maksimum lokalne}$$

W punktach $x = -1$ i $x = 1$ funkcja f nie jest różniczkowalna,

ale $f(-1) = 0 > x\sqrt{1-x^2}$ dla $x \in (-1, 0)$

oraz $f(1) = 0 < x\sqrt{1-x^2}$ dla $x \in (0, 1)$.

Stąd $f(-1) = 0$ to maksimum lokalne oraz $f(1) = 0$ to minimum lokalne.

Uwaga

Jeśli w pewnym (skończonym lub nieskończonym) przedziale funkcja $f(x)$ jest ciągła i ma tylko jedno ekstremum wewnątrz przedziału i jeśli jest to maksimum (minimum), to jest ono wartością największą (najmniejszą) tej funkcji w tym przedziale.

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Weierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Weierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b) , to:

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Weierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b) , to:

- znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Weierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b) , to:

- znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,
- obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału, czyli $f(a)$ i $f(b)$,

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Weierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b) , to:

- znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,
- obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału, czyli $f(a)$ i $f(b)$,
- porównujemy otrzymane wartości funkcji: największa z nich jest wartością największą $f(x)$ na $[a, b]$, a najmniejsza jest wartością najmniejszą $f(x)$ na $[a, b]$.

Przykład:

(1) Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \text{ w } [0, \frac{5}{2}].$$

f - ciągła w $[0, \frac{5}{2}]$ i różniczkowalna w $(0, \frac{5}{2})$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x_1 = -1 \notin (0, \frac{5}{2}), x_2 = 2 \in (0, \frac{5}{2}),$$

Przykład:

(1) Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \text{ w } [0, \frac{5}{2}].$$

f - ciągła w $[0, \frac{5}{2}]$ i różniczkowalna w $(0, \frac{5}{2})$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x_1 = -1 \notin (0, \frac{5}{2}), x_2 = 2 \in (0, \frac{5}{2}),$$

$$f(2) = -19, f(0) = 1, f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\max_{0 \leq x \leq 5/2} f(x) = 1, \quad \min_{0 \leq x \leq 5/2} f(x) = -19$$

$$(2) f(x) = 2 \sin x + \sin 2x, \quad x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$$

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 2 \cos \frac{3}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 0$$

$$\iff \cos \frac{3}{2}x = 0 \vee \cos \frac{1}{2}x = 0$$

$$\iff \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3}(2k+1) \vee x = \pi(2k+1) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} \vee x_2 = \pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(\pi) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2 \Rightarrow$$

$$\max_{0 \leq x \leq 3\pi/2} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \min_{0 \leq x \leq 3\pi/2} f(x) = -2$$

Tw. (wzór Taylora)

Jeśli funkcja f ma ciągłe pochodne do rzędu $(n - 1)$ włącznie w przedziale domkniętym o końcach x_0 i x oraz ma pochodną rzędu n wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c leżący między x_0 i x , że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n, \quad f^{(0)} = f$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

Dowód: Niech $p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k + r(t - x_0)^n$. Wtedy $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$. Stałą r dobieramy w ten sposób, aby $p(x) = f(x)$. Niech $g(t) = f(t) - p(t)$. Wtedy $g(x_0) = 0 = g(x)$. Stąd z Tw. Rolle'a istnieje x_1 między x i x_0 taki, że $g'(x_1) = 0$, ale również $g'(x_0) = 0$. Stąd z Tw. Rolle'a istnieje x_2 między x_1 i x_0 taki, że $g''(x_2) = 0$, ale również $g''(x_0) = 0$. Powtarzając w ten sposób otrzymujemy, że istnieje x_n między x_{n-1} i x_0 taki, że $g^{(n)}(x_n) = 0$. Ale $g^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(x_n) - n!r$ czyli $r = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$. Niech $c = x_n$. Wtedy $f(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$. \square

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!}x^n$$

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n = \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Uwaga:

Twierdzenie Taylora dla $n = 1$ jest twierdzeniem Lagrange'a.

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!}x^n$$

Uwaga:

Twierdzenie Taylora dla $n = 1$ jest twierdzeniem Lagrange'a.

Przykład:

Zapisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

$$f(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) + \frac{f''(1)}{2!} (x - 1)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (x - 1)^3$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2, \quad f^{(k)}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^k$$

$$2^x = 2 + 2 \ln 2 \cdot (x - 1) + (\ln 2)^2 \cdot (x - 1)^2 + \frac{2^c \cdot (\ln 2)^3}{3!} (x - 1)^3$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2, \quad f^{(k)}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^k$$

$$2^x = 2 + 2 \ln 2 \cdot (x - 1) + (\ln 2)^2 \cdot (x - 1)^2 + \frac{2^c \cdot (\ln 2)^3}{3!} (x - 1)^3$$

Uwaga

We wzorze Taylora (Maclaurina)

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n = R_n, \quad \text{gdzie } c = x_0 + \Theta(x - x_0)$$

nazywamy *resztą*, a

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

wielomianem Taylora.

Wzór Taylora pozwala przedstawić w sposób przybliżony (aproksymować) dowolną funkcję za pomocą wielomianu oraz szacować powstały przy tym błąd.

Przykłady:

$$(1) f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Błąd przybliżenia:

$$R_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

Przykłady:

$$(1) f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Błąd przybliżenia:

$$R_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

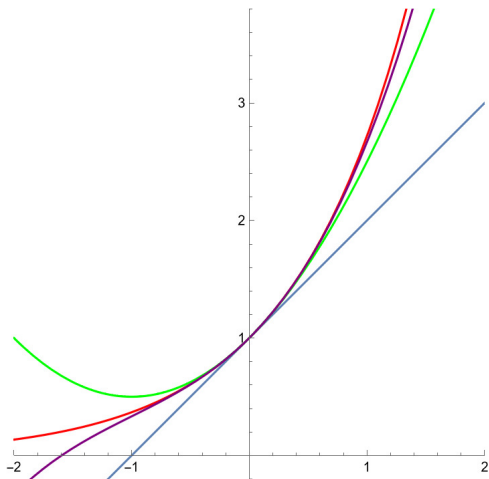
Wartość błędu zależy od n i od x , np.:

$$n = 3, x = 1: \quad R_3 = \frac{1}{4!} e^{\Theta} < \frac{1}{4!} e < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$$

$$n = 5, x = 1: \quad R_5 = \frac{1}{6!} e^{\Theta} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}$$

Stąd wzory przybliżone:

$$e^x \approx 1 + x, \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$



$$(2) f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

Błąd przybliżenia:

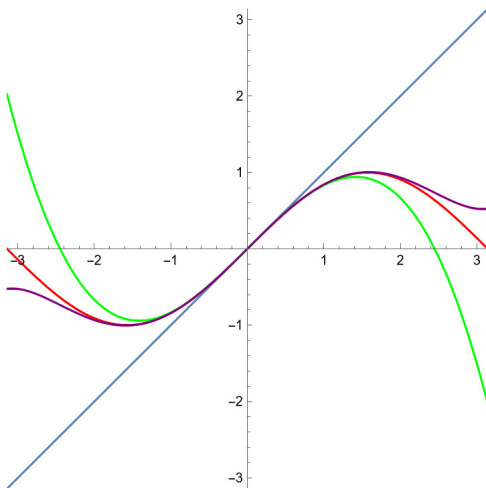
$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin \left[\Theta x + (2m+1) \frac{\pi}{2} \right], \quad 0 < \Theta < 1$$

Stąd

$$|R_{2m}| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Wzory przybliżone:

$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$



$$(3) f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = 0$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

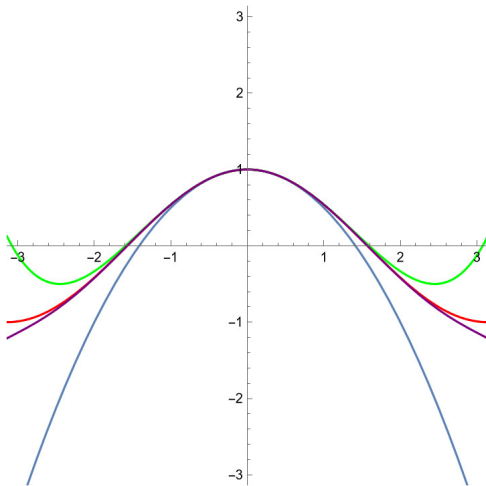
Stąd

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$|R_{2m+1}| \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

Wzory przybliżone:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$



$$(4) f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2}, \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f'''(1) = 2!$$

$$f^{(4)} = -2 \cdot 3x^{-4}, \quad f^{(4)}(1) = -3!$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

po podstawieniu $x := x - 1$:

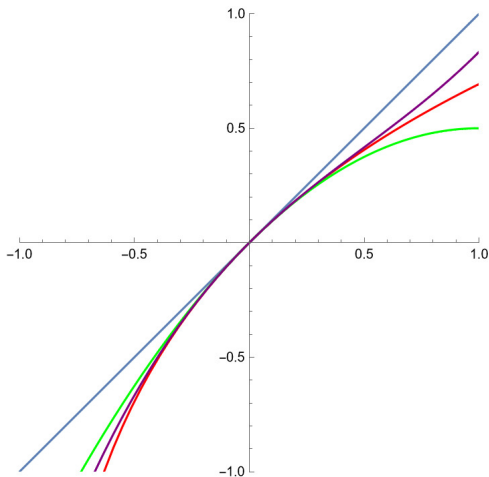
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Reszta:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad R_n \rightarrow 0 \iff -1 < x \leq 1$$

Wzory przybliżone:

$$\ln(1+x) \approx x, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$



(5) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\cos 5^\circ$.

(5) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\cos 5^\circ$.

$5^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}$, wzór Maclaurina:

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} - \dots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)!36^{2n}}$$

szacujemy reszty i $|R_5| \leq \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!36^6} < 10^{-6}$, więc wystarczy wziąć trzy pierwsze wyrazy:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} \approx 0,996195$$

(6) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\sin 49^\circ$.

Skorzystamy z wzoru Taylora:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!} \sin \left(a + \frac{\pi}{2} \right) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \sin \left(a + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + R_n$$

$$|R_n| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Im mniejsze jest $|x - a|$, tym mniej wyrazów trzeba uwzględnić, aby uzyskać żadaną dokładność:

$$\begin{aligned} x = 49^\circ, a = 45^\circ &\Rightarrow x = \frac{49\pi}{180}, a = \frac{45\pi}{180} \Rightarrow x - a = \frac{\pi}{180}(49 - 45) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - a = \frac{\pi}{45} \end{aligned}$$

$$\sin 49^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \frac{\pi}{1! \cdot 45} - \frac{\pi^2}{2! \cdot 45^2} + \dots \pm \frac{\pi^n}{n! \cdot 45^n} \right] + R_n$$

$$|R_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)! \cdot 45^{n+1}}$$

Szacujemy reszty:

$$|R_3| \leq \frac{\pi^4}{4! \cdot 45^4} < 10^{-6}$$

Stąd:

$$\sin 49^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \frac{\pi}{1! \cdot 45} - \frac{\pi^2}{2! \cdot 45^2} + \frac{\pi^3}{6 \cdot 45^3} \right] \approx 0,754709$$

We wzorze Maclaurina trzeba uwzględnić znacznie więcej wyrazów.

Tw. (II. warunek wystarczający dla ekstremum)

Niech funkcja f ma w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ pochodne do rzędu n włącznie, $f^{(n)}$ niech będzie ciągła w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, \dots, n - 1$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wtedy:

- (1) jeśli n jest nieparzyste, to f nie ma ekstremum w x_0 ,
- (2) jeśli n jest parzyste, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Tw. (II. warunek wystarczający dla ekstremum)

Niech funkcja f ma w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ pochodne do rzędu n włącznie, $f^{(n)}$ niech będzie ciągła w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, \dots, n - 1$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wtedy:

(1) jeśli n jest nieparzyste, to f nie ma ekstremum w x_0 ,

(2) jeśli n jest parzyste, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Dowód:

Wynika z tw. Taylora i z tw. o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej.

Jeśli $x \in S(x_0, r)$, to istnieje c leżące między x_0 i x takie, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n$$

Jeśli x - bliskie x_0 , to $f^{(n)}(c)$ ma taki sam znak jak $f^{(n)}(x_0)$.

Jeśli x - bliskie x_0 , to $f^{(n)}(c)$ ma taki sam znak jak $f^{(n)}(x_0)$.

Przykłady:

$$(1) f(x) = x^2(x - 1)^2$$

$$f'(x) = 2x(x - 1)^2 + x^2 \cdot 2(x - 1) = 2x(x - 1)(2x - 1) = 0 \iff \\ \iff x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$$f''(0) > 0 \Rightarrow f(0) = 0 - \text{minimum lokalne}$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f(1) = 0 - \text{minimum lokalne}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \text{maksimum lokalne}$$

$$(2) f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad x = 0$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(4)}(0) > 0 \Rightarrow f(0) = 4 \text{ minimum}$$

lokalne właściwe.

Definicja (wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 . Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definicja (wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 . Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definicja (wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 . Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na przedziale otwartym, jeśli jest wypukła (wklęsła) w każdym jego punkcie.

Definicja (wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 . Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0 , jeśli

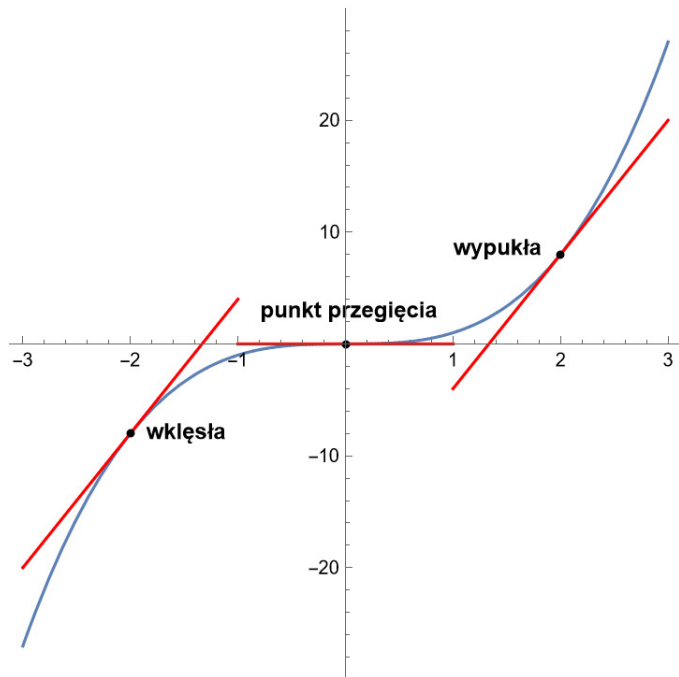
$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

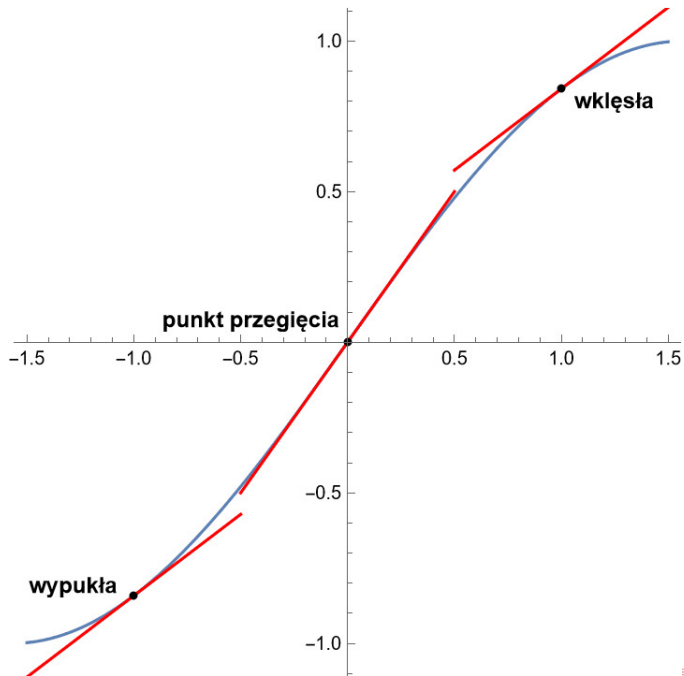
Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0 , jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na przedziale otwartym, jeśli jest wypukła (wklęsła) w każdym jego punkcie.

Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy *punktem przegięcia* krzywej $y = f(x)$, jeśli f jest ciągła w x_0 oraz krzywa jest wypukła w lewostronnym sąsiedztwie x_0 i wklęsła w prawostronnym sąsiedztwie x_0 lub na odwrót.





Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:

(1) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b) ,

Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:

- (1) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b) ,
- (2) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest wklęsła na (a, b) .

Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:

- (1) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b) ,
- (2) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest wklęsła na (a, b) .

Dowód: Z Tw. Taylora mamy

$$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \exists c \in (x_0, x) \vee c \in (x, x_0) \\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - x_0)^2.$$

Jeśli $f''(c) > 0$ to $f(x) =$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

czyli f jest wypukła w x_0 .

Jeśli $f''(c) < 0$ to $f(x) =$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - x_0)^2 < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

czyli f jest wklęsła w x_0 .

(1) $f(x) = x^3$ jest wypukła w $(0, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, 0)$, bo $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ i $f''(x) > 0$ dla $x > 0$, $f''(x) < 0$ dla $x < 0$.

Stąd punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia $f(x) = x^3$.

(2) $f(x) = 2^x$ jest wypukła na całym \mathbb{R} , bo $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0$

(3) $f(x) = \ln x$ jest wklęsła w $(0, +\infty)$, bo $\forall x > 0 \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Tw. (warunek wystarczający dla punktu przegięcia)

Jeśli:

(1) f jest ciągła w punkcie x_0 ,

(2) f'' istnieje w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$ punktu x_0 ,

(3) $\exists \delta > 0$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f''(x) > 0 \wedge f''(x) < 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

lub na odwrót, to

$(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Tw. (warunek wystarczający dla punktu przegięcia)

Jeśli:

(1) f jest ciągła w punkcie x_0 ,

(2) f'' istnieje w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$ punktu x_0 ,

(3) $\exists \delta > 0$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f''(x) > 0 \wedge f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

lub na odwrót, to

$(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Przykłady:

(1) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x$

$f''(x) < 0$ dla $x > 0 \wedge f''(x) > 0$ dla $x < 0 \Rightarrow (0, 0)$ - punkt przegięcia

$$(2) f(x) = |\ln x|, \quad x_0 = 1$$

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -\frac{1}{x}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ dla } x > 1,$$

$$f''(x) > 0 \text{ dla } x < 1 \Rightarrow (1, 0) - \text{punkt przegięcia.}$$

Tw. (warunek konieczny dla punktu przegięcia)

Jeśli f'' istnieje w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, f'' jest ciągła w x_0 oraz $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(x_0) = 0$.

Tw. (warunek konieczny dla punktu przegięcia)

Jeśli f'' istnieje w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, f'' jest ciągła w x_0 oraz $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(x_0) = 0$.

Dowód:

Założmy, że $f''(x_0) \neq 0$. Ponieważ f'' jest ciągła w x_0 , to z tw. o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in Q(x_0, \delta) \quad f''(x) > 0 \text{ jeśli } f''(x_0) > 0$$

lub

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in Q(x_0, \delta) \quad f''(x) < 0 \text{ jeśli } f''(x_0) < 0$$

więc $y = f(x)$ jest wypukła lub wklęsła w całym otoczeniu $Q(x_0, \delta)$ wbrew założeniu, że $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Przykład:

Krzywa $y = \cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ nie ma punktów przegięcia,
bo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y'' = 2(e^{2x} + e^{-2x}) = 4 \cosh 2x \neq 0$$

Badanie funkcji

Badanie funkcji

- (1) Dziedzina
- (2) Cechy szczególne
- (3) Granice na końcach dziedziny
- (4) Asymptoty
- (5) Monotoniczność i ekstrema
- (6) Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia
- (7) Wykres

Przykłady:

$$(1) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa
prawostronna.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Przykłady:

$$(1) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow x = 0 - \text{asymptota pionowa}$$

prawostronna.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] \Rightarrow$$

$$y = x + 1 - \text{asymptota ukośna obustronna}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1).$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1).$$

Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1).$$

Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1).$$

Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ nie ma rozwiązań.}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1).$$

Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ nie ma rozwiązań.}$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} > 0 \iff x > 0$$

Stąd $f(x)$ wypukła dla $x \in (0, +\infty)$

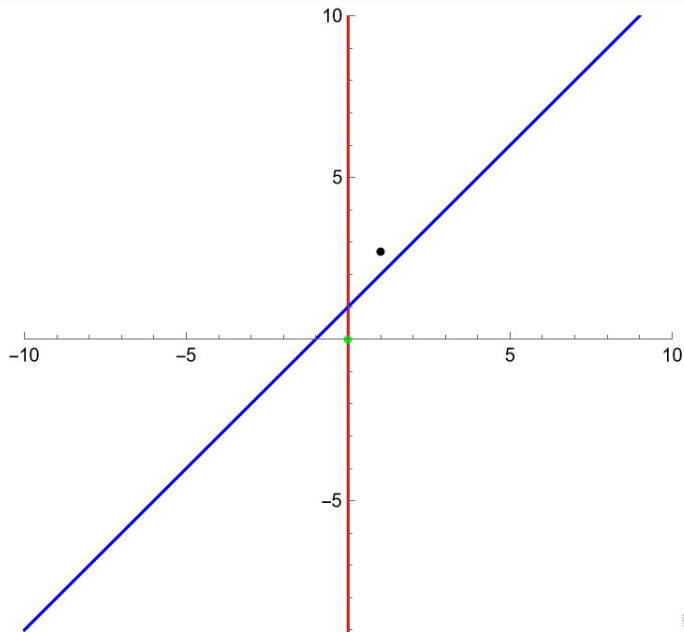
$$f''(x) < 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0 \iff x < 0$$

Stąd $f(x)$ wklęsła dla $x \in (-\infty, 0)$

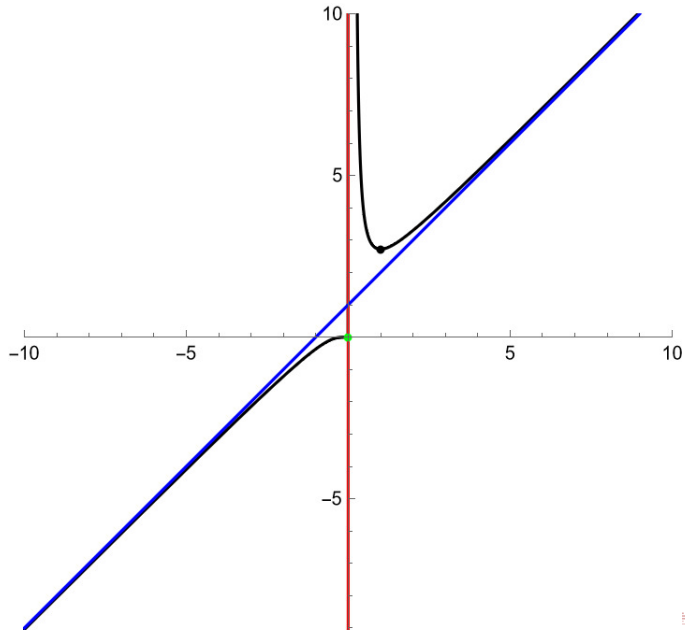
$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}} \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	\times	$-$	0		$+$
$f''(x)$		$-$	\times	$+$	e		$+$
$f(x)$	$-\infty$	\curvearrowright	0	\times	$+\infty \curvearrowleft$	e	$\curvearrowright +\infty$

Wykres $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (asymptoty, granice, ekstrema)



Wykres $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$



(2) $f(x) = xe^x$, $D = \mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych
 $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ - asymptota pozioma lewostronna} \end{aligned}$$

Badamy istnienie asymptoty ukośnej prawostronnej $y = mx + k$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ - brak asymptoty ukośnej prawostronnej.

Badamy monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$$

$$f'(x) = e^x(x + 1) = 0 \iff x = -1$$

$$f'(x) = e^x(x + 1) > 0 \iff x + 1 > 0 \iff x \in (-1, +\infty)$$

Stąd $f(x)$ rośnie w przedziale $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = e^x(x + 1) < 0 \iff x \in (-\infty, -1)$$

Stąd $f(x)$ maleje w przedziale $(-\infty, -1)$.

Stąd $f(-1) = -e^{-1}$ jest minimum lokalnym.

Badamy wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia

$$f''(x) = 2e^x + xe^x = e^x(x + 2)$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -2, \quad f(-2) = -2e^{-2}, \quad f''(x) > 0 \iff x \in (-2, +\infty), \quad f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2)$$

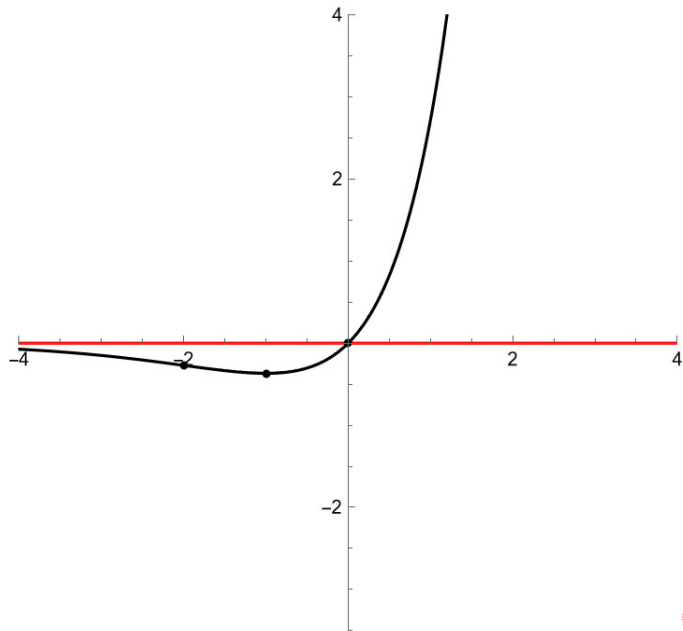
Stąd $f(x)$ jest wypukła w $(-2, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, -2)$, oraz $(-2, -2e^{-2})$ jest punktem przegięcia.

Wykres

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -1)$ i rosnąca dla $x \in (-1, +\infty)$.

Wykres funkcji jest wklęsły dla $x \in (-\infty, -2)$ i wypukły dla $x \in (-2, +\infty)$.

Wykres $f(x) = xe^x$



(3) $f(x) = xe^{-|x|}$, $D = \mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych

$f(-x) = -f(x)$ - funkcja nieparzysta \Rightarrow badamy

$$f|_{[0,+\infty)} = g \Rightarrow g(x) = xe^{-x} \text{ dla } x \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma
prawostronna

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \iff x-1=0 \iff x=1$$

$g'(x) > 0 \iff (1-x) > 0 \iff x < 1 \Rightarrow f(x)$ rośnie dla $x < 1$

i $g'(x) < 0 \iff x > 1 \Rightarrow f(x)$ maleje dla $x > 1$

$g(1) = e^{-1}$ to maksimum lokalne.

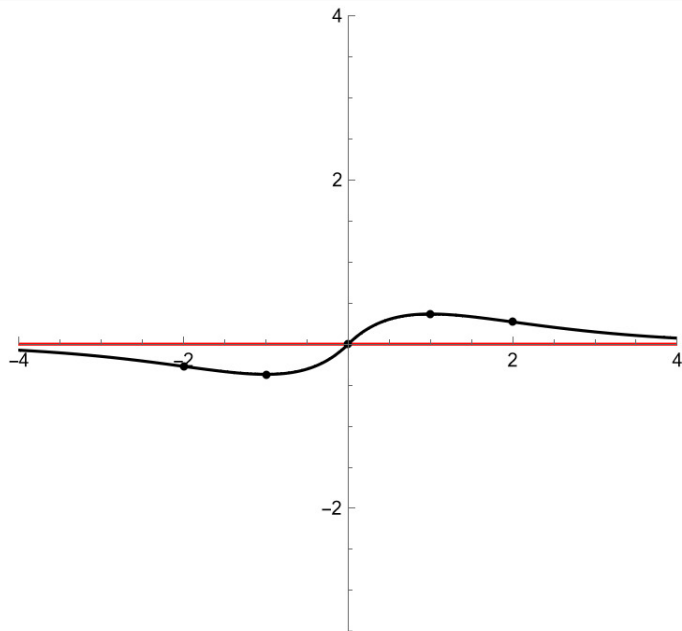
$$g''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2) = 0 \iff x=2$$

$g''(x) < 0 \iff x < 2 \Rightarrow g(x)$ wklęśła dla $x < 2$ i

$g''(x) > 0 \iff x > 2 \Rightarrow g(x)$ wypukła dla $x > 2$ i

$(2, g(2)) = (2, 2e^{-2})$ to punkt przegięcia $g(x)$

Wykres $f(x) = xe^{-|x|}$



(4) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ $D = \mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych

$f(-x) = f(x)$ - funkcja parzysta, $f(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$ - funkcja okresowa, bo:

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$f(x + k\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{4} [1 - \cos 4(x + k\frac{\pi}{2})] =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} [1 - \cos(4x + 2k\pi)] = 1 - \frac{1}{4} [1 - \cos 4x] = f(x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

Wystarczy badać funkcję na $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$f(0) = 1, \quad f(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f'(x) = 4 \sin^3 \cos x - 4 \cos^3 \sin x = 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) =$$

$$= -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x = 0 \iff x = k\frac{\pi}{4} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge$$

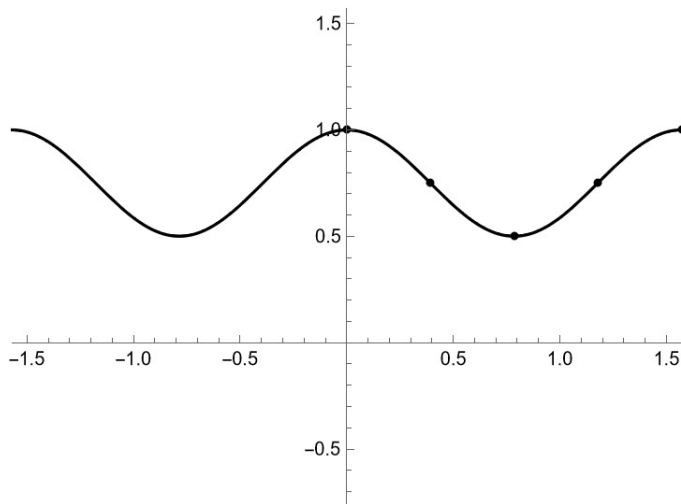
$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} - \text{minimum lokalne}$$

$$f''(x) = -4 \cos 4x = 0 \iff x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge$$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{3}{8}\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{3}{4} - \text{punkty przegięcia}$$

Wykres



$$(5) f(x) = \frac{\ln(e^2 x^2)}{|x|} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f|_{(0,+\infty)} = g \Rightarrow g(x) = \frac{2+2\ln x}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+2\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa
prawostronna

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+2\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma
prawostronna

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2 - 2\ln x}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x^2} > 0 \iff -2x^2 \ln x > 0$$

$$f' > 0 \iff x < 1 \quad \wedge \quad f' < 0 \iff x > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(1) = 2$ - maksimum lokalne

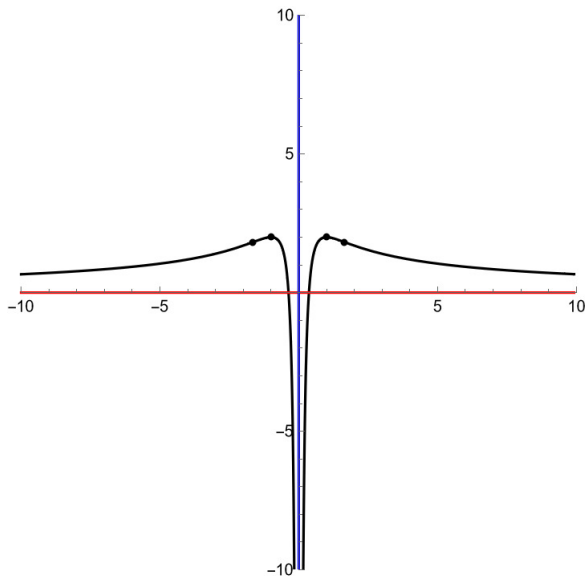
$$f''(x) = \frac{-2(1-2\ln x)}{x^3} > 0 \iff -2x^3(1-2\ln x) > 0$$

$$f'' < 0 \iff x < \sqrt{e} \quad \wedge \quad f'' > 0 \iff x > \sqrt{e} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{3}{\sqrt{e}}$ - punkt przegięcia

Wykres

$$\text{Wykres } f(x) = \frac{\ln(e^2 x^2)}{|x|}$$



(6) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$, bo $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$
brak asymptot pionowych

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) \Big|_{[0,+\infty)} = g(x)$$

$f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma prawostronna

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2) \cdot |1-x^2|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in (0, 1) \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$f' > 0 \iff x < 1 \quad \wedge \quad f' < 0 \iff x > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{2} - \text{maksimum lokalne}$$

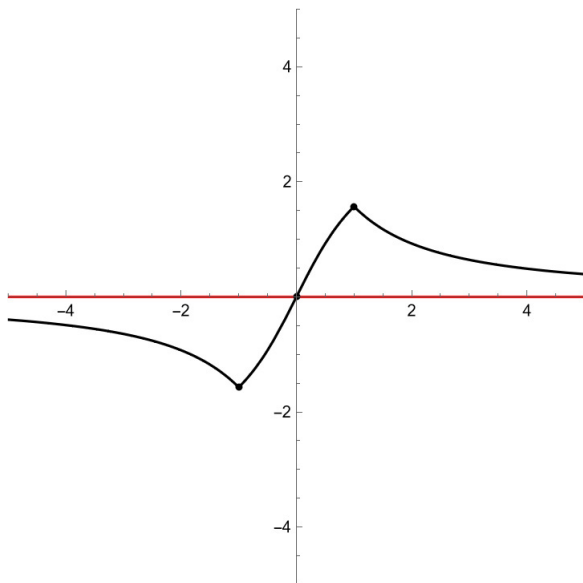
$f'(1)$ - nie istnieje, bo pochodne jednostronne są różne

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (0, 1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{2} - \text{punkt przegięcia } (f''(1) \text{ nie istnieje})$$

Wykres

Wykres $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$



Funkcje hiperboliczne

Funkcje hiperboliczne

$$(7) f(x) = \operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = +\infty$$

Asymptoty ukośne $y = mx + k$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

brak asymptot ukośnych

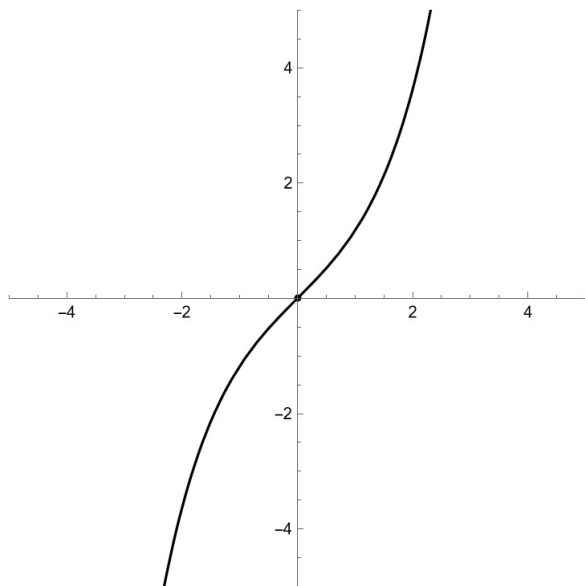
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \iff x > 0 \quad \wedge$$

$$f''(x) < 0 \iff x < 0 \Rightarrow f(0) = 0 - \text{punkt przegięcia}$$

Wykres

Wykres $f(x) = \sinh x$



$$(8) f(x) = \operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = +\infty$$

Asymptoty ukośne $y = mx + k$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

brak asymptot ukośnych

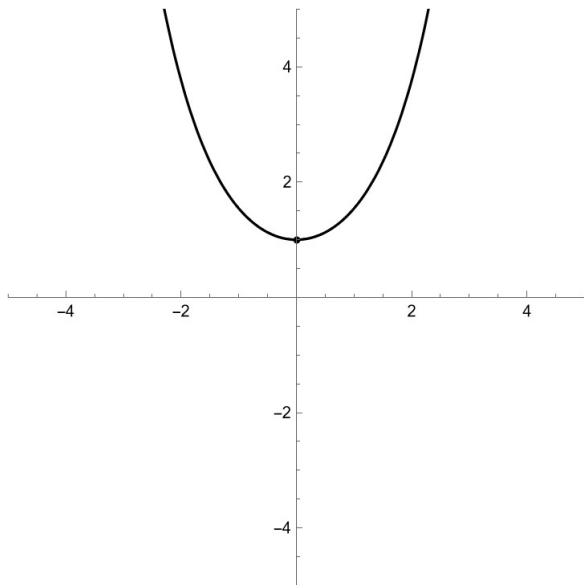
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x > 0 \iff x > 0 \wedge$$

$$f'(x) < 0 \iff x < 0 \Rightarrow f(0) = 1 - \text{minimum lokalne}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Wykres

Wykres $f(x) = \cosh x$



$$(9) f(x) = \operatorname{tgh} x = \operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 1$ - asymptota pozioma prawostronna

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(-1 + e^{2x})}{e^{-x}(1 + e^{2x})} = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -1$ - asymptota pozioma lewostronna

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

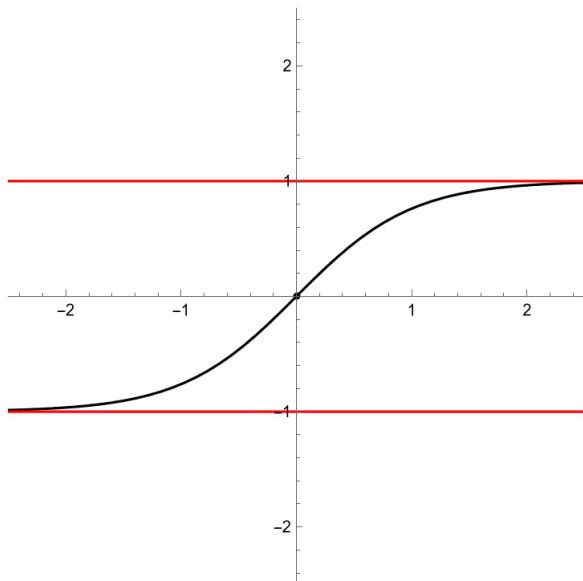
$$f''(x) = -\frac{2}{\cosh^3 x} \cdot \sinh x > 0 \iff -2 \sinh x \cosh^3 x > 0$$

$$f'' > 0 \iff x < 0 \quad \wedge \quad f'' < 0 \iff x > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(0) = 0$ - punkt przegięcia

Wykres

Wykres $f(x) = \operatorname{tgh}x$



$$(10) f(x) = \operatorname{ctgh} x = \operatorname{cth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh x}{\sinh x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 0 - \text{asymptota pionowa obustronna}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1 \Rightarrow y = 1 - \text{asymptota pozioma prawostronna}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = -1 \Rightarrow y = -1 - \text{asymptota pozioma lewostronna}$$

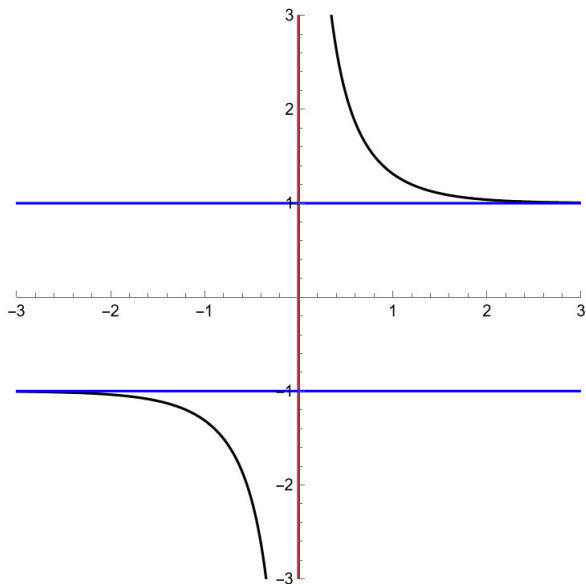
$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{1}{\sinh^2 x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f''(x) = \frac{2}{\sinh^3 x} \cdot \cosh x > 0 \iff 2 \sinh^3 x \cosh x > 0$$

$$f'' > 0 \iff x > 0 \quad \wedge \quad f'' < 0 \iff x < 0 \Rightarrow - \text{brak punktu} \\ \text{przełomu, bo } 0 \notin D$$

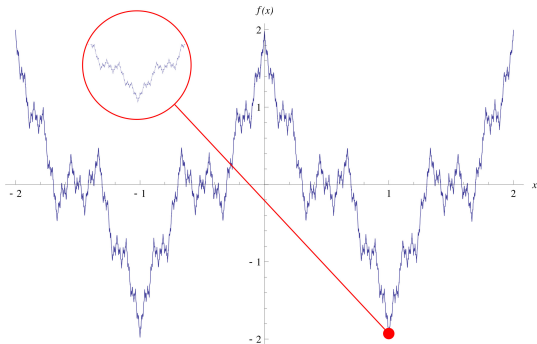
Wykres

Wykres $f(x) = \operatorname{ctgh}x$



Funkcja Weierstrassa - przykład funkcji ciągłej i nie różniczkowalnej w żadnym punkcie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad a \in (0, 1), \quad b \in \mathbb{N} \text{ nieparzysta}, \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$



Rysunek: By Eeyore22 - Own work, Public Domain,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5075959>