

Analiza matematyczna

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Część 2

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Pierwszy warunek wystarczający ekstremum

Niech f będzie określona na $(x_0 - r, x_0 + r)$, ciągła w x_0 i różniczkowalna w $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$. Jeśli dla pewnego $0 < \delta \leq r$ znaki pochodnej są następujące, to:

f' na $(x_0 - \delta, x_0)$	f' na $(x_0, x_0 + \delta)$	wniosek w x_0
—	+	minimum lokalne właściwe
+	—	maksimum lokalne właściwe
+	+	brak ekstremum
—	—	brak ekstremum

Każdy znak oznacza ścisłą nierówność w całym wskazanym przedziale.

Pierwszy warunek wystarczający ekstremum

Niech f będzie określona na $(x_0 - r, x_0 + r)$, ciągła w x_0 i różniczkowalna w $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$. Jeśli dla pewnego $0 < \delta \leq r$ znaki pochodnej są następujące, to:

f' na $(x_0 - \delta, x_0)$	f' na $(x_0, x_0 + \delta)$	wniosek w x_0
—	+	minimum lokalne właściwe
+	—	maksimum lokalne właściwe
+	+	brak ekstremum
—	—	brak ekstremum

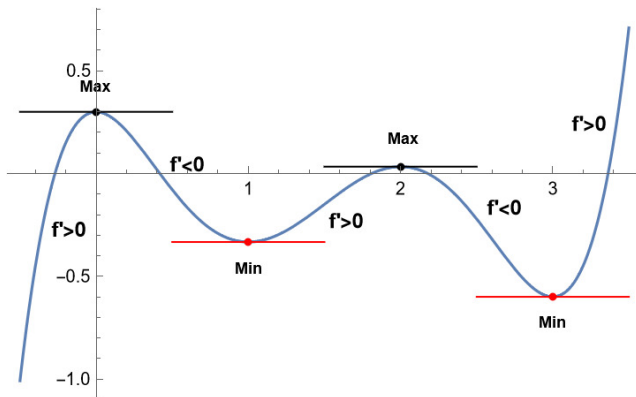
Każdy znak oznacza ścisłą nierówność w całym wskazanym przedziale.

Dowód. Dla $0 < |x - x_0| < \delta$ twierdzenie Lagrange'a daje

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

dla pewnego c między x_0 a x . Znaki obu czynników dają tezę. Istnienie $f'(x_0)$ nie jest wymagane. □

Zmiana znaku pochodnej a ekstrema



Zmiana $+$ $\rightarrow$ $-$ daje maksimum, a $- \rightarrow +$ - minimum lokalne.

1. Funkcja $f(x) = \sin |x|$ jest ciągła w 0, a dla $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ -\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Na $(-\pi/2, 0)$ pochodna jest ujemna, a na $(0, \pi/2)$ dodatnia. Zatem $f(0) = 0$ jest minimum lokalnym właściwym, chociaż $f'(0)$ nie istnieje.

1. Funkcja $f(x) = \sin |x|$ jest ciągła w 0, a dla $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ -\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Na $(-\pi/2, 0)$ pochodna jest ujemna, a na $(0, \pi/2)$ dodatnia. Zatem $f(0) = 0$ jest minimum lokalnym właściwym, chociaż $f'(0)$ nie istnieje.

2. Funkcja $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w 0, gdyż $f'(x) = \cos x > 0$ dla $|x| < \pi/2$.

1. Funkcja $f(x) = \sin |x|$ jest ciągła w 0, a dla $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ -\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Na $(-\pi/2, 0)$ pochodna jest ujemna, a na $(0, \pi/2)$ dodatnia. Zatem $f(0) = 0$ jest minimum lokalnym właściwym, chociaż $f'(0)$ nie istnieje.

2. Funkcja $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w 0, gdyż $f'(x) = \cos x > 0$ dla $|x| < \pi/2$.

3. Dla $f(x) = x^2 + \sqrt{x^5}$ dziedziną jest $[0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{3/2} > 0 \quad (x > 0), \quad f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h + h^{3/2}) = 0.$$

Ponieważ $f(x) > f(0) = 0$ dla każdego $x > 0$, punkt 0 jest miejscem minimum globalnego właściwego. Jest to koniec dziedziny, więc nie stosujemy tu dwustronnego testu zmiany znaku pochodnej.

Ekstrema wewnątrz dziedziny i na jej końcach

Dla $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ mamy $D = [-1, 1]$ oraz

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Pochodna zeruje się dla $x = -1/\sqrt{2}$ lub $x = 1/\sqrt{2}$. Jest dodatnia na $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, a ujemna na $(-1, -1/\sqrt{2})$ i $(1/\sqrt{2}, 1)$.

$$\min_{[-1,1]} f = f(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}, \quad \max_{[-1,1]} f = f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.$$

Oba ekstrema są również lokalne właściwe.

Ekstrema wewnątrz dziedziny i na jej końcach

Dla $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ mamy $D = [-1, 1]$ oraz

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Pochodna zeruje się dla $x = -1/\sqrt{2}$ lub $x = 1/\sqrt{2}$. Jest dodatnia na $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, a ujemna na $(-1, -1/\sqrt{2})$ i $(1/\sqrt{2}, 1)$.

$$\min_{[-1,1]} f = f(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}, \quad \max_{[-1,1]} f = f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.$$

Oba ekstrema są również lokalne właściwe.

Na końcach dziedziny porównujemy tylko wartości należące do dziedziny:

$$f(-1) = 0 > f(x) \quad (-1 < x < 0), \quad f(1) = 0 < f(x) \quad (0 < x < 1).$$

Zatem -1 jest miejscem maksimum lokalnego właściwego, a 1 – minimum lokalnego właściwego. Nie są to ekstrema globalne.

Kiedy ekstremum lokalne jest globalne?

Jeśli funkcja ciągła na przedziale I ma dokładnie jeden punkt ekstremum lokalnego wewnątrz I , to maksimum w tym punkcie jest maksimum globalnym na I , a minimum – minimum globalnym. Warunek dotyczy wszystkich ekstremów, nie tylko miejsc zerowych pochodnej.

Wyjaśnienie dla maksimum. Gdyby dalej pojawiła się wartość większa od lokalnego maksimum, funkcja musiałaby najpierw zejść niżej, a potem wzrosnąć. Minimum na odpowiednim zamkniętym odcinku leżałoby wewnątrz niego, co dawałoby drugie ekstremum lokalne. Dla minimum rozumiemy analogicznie.

W zadaniach często prościej sprawdzić monotoniczność: wzrost na całej części przedziału przed x_0 i spadek na całej części za x_0 zapewniają maksimum globalne w x_0 .

Wartość najmniejsza i największa na $[a, b]$

Niech $a < b$ będą skończone, a f będzie ciągła na $[a, b]$. Twierdzenie Weierstrassa zapewnia osiągnięcie minimum i maksimum.

Jeśli f jest również różniczkowalna na (a, b) , to:

- 1 znajdujemy wszystkie $x \in (a, b)$, dla których $f'(x) = 0$;
- 2 obliczamy wartości funkcji w tych punktach oraz $f(a)$ i $f(b)$;
- 3 porównujemy je i wybieramy najmniejszą oraz największą.

Wartość najmniejsza i największa na $[a, b]$

Niech $a < b$ będą skończone, a f będzie ciągła na $[a, b]$. Twierdzenie Weierstrassa zapewnia osiągnięcie minimum i maksimum.

Jeśli f jest również różniczkowalna na (a, b) , to:

- 1 znajdujemy wszystkie $x \in (a, b)$, dla których $f'(x) = 0$;
- 2 obliczamy wartości funkcji w tych punktach oraz $f(a)$ i $f(b)$;
- 3 porównujemy je i wybieramy najmniejszą oraz największą.

Jeśli różniczkowalność wewnątrz przedziału nie jest zapewniona, trzeba uwzględnić także punkty, w których pochodna nie istnieje. Takie punkty oraz miejsca zerowe pochodnej nazywamy punktami krytycznymi.

Punkt krytyczny jest kandydatem na ekstremum, ale nie musi nim być. Jeśli kandydatów jest nieskończenie wiele, trzeba przeanalizować cały ich zbiór.

Ekstrema globalne – przykład wielomianu

Wyznaczyć minimum i maksimum funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \quad \text{na } [0, 5/2].$$

Funkcja jest ciągła na tym przedziale i różniczkowalna w jego wnętrzu.

$$f'(x) = 6(x - 2)(x + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \text{ lub } x = -1.$$

Tylko 2 należy do $(0, 5/2)$. Porównujemy

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -19, \quad f(5/2) = -\frac{33}{2}.$$

Zatem

$$\max_{[0, 5/2]} f = 1 \quad \text{w } x = 0, \quad \min_{[0, 5/2]} f = -19 \quad \text{w } x = 2.$$

Ekstrema globalne – przykład trygonometryczny

Niech $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ dla $x \in [0, 3\pi/2]$.

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 4 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

Zatem $f'(x) = 0$, gdy

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W przedziale $(0, 3\pi/2)$ otrzymujemy tylko $x = \pi/3$ i $x = \pi$.

x	0	$\pi/3$	π	$3\pi/2$
$f(x)$	0	$3\sqrt{3}/2$	0	-2

Stąd maksimum wynosi $3\sqrt{3}/2$ i jest osiągnięte w $\pi/3$, a minimum wynosi -2 i jest osiągnięte w $3\pi/2$.

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

Twierdzenie

Niech $n \geq 0$ będzie całkowite, $x \neq x_0$, a I – przedziałem zamkniętym o końcach x_0 i x . Załóżmy, że $f, f', \dots, f^{(n)}$ są ciągłe na I , a $f^{(n+1)}$ istnieje wewnątrz I . Na końcach I pochodne rozumiemy jednostronnie. Wtedy istnieje c ściśle między x_0 a x takie, że

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Przyjmujemy $f^{(0)} = f$. Wielomian P_n ma stopień co najwyżej n . Indeks reszty $R_n = f - P_n$ odpowiada temu samemu indeksowi n .

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

Twierdzenie

Niech $n \geq 0$ będzie całkowite, $x \neq x_0$, a I – przedziałem zamkniętym o końcach x_0 i x . Załóżmy, że $f, f', \dots, f^{(n)}$ są ciągłe na I , a $f^{(n+1)}$ istnieje wewnątrz I . Na końcach I pochodne rozumiemy jednostronnie. Wtedy istnieje c ściśle między x_0 a x takie, że

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Przyjmujemy $f^{(0)} = f$. Wielomian P_n ma stopień co najwyżej n . Indeks reszty $R_n = f - P_n$ odpowiada temu samemu indeksowi n .

Punkt c zależy od x i n ; nie wybieramy go dowolnie. Dla $x = x_0$ równość jest oczywista, a reszta wynosi 0.

Dowód wzoru Taylora

Ustalmy $x \neq x_0$ i wybierzmy

$$A = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}, \quad g(t) = f(t) - P_n(t) - A(t - x_0)^{n+1}.$$

Wówczas $g(x) = 0$ oraz

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Twierdzenie Rolle'a daje punkt c_1 między x_0 a x z $g'(c_1) = 0$. Jeśli $n \geq 1$, stosujemy je ponownie do g' między x_0 a c_1 . Kontynuujemy tak długo, aż po $n + 1$ zastosowaniach otrzymamy

$$g^{(n+1)}(c) = 0$$

dla pewnego c między x_0 a x . Ponieważ $P_n^{(n+1)} = 0$,

$$0 = f^{(n+1)}(c) - (n+1)!A, \quad A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Podstawienie tej wartości A daje żądany wzór.



Wzór Maclaurina

Jest to wzór Taylora z $x_0 = 0$. Przy założeniach poprzedniego twierdzenia dla $x \neq 0$ istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Punkt $c = \theta x$ leży między 0 a x , również gdy $x < 0$.

W przyjętym zapisie przypadek $n = 0$ wzoru Taylora jest twierdzeniem Lagrange'a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

Wzór Maclaurina

Jest to wzór Taylora z $x_0 = 0$. Przy założeniach poprzedniego twierdzenia dla $x \neq 0$ istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Punkt $c = \theta x$ leży między 0 a x , również gdy $x < 0$.

W przyjętym zapisie przypadek $n = 0$ wzoru Taylora jest twierdzeniem Lagrange'a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

Przykład. Wyznaczyć wielomian stopnia co najwyżej 2 dla $f(x) = 2^x$ wokół $x_0 = 1$:

$$2^x = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2}(x - 1)^2 + R_2(x).$$

Ponieważ $f^{(k)}(x) = 2^x (\ln 2)^k$, otrzymujemy

$$2^x = 2 + 2 \ln 2 (x - 1) + (\ln 2)^2 (x - 1)^2 + R_2(x),$$

$$R_2(x) = \frac{2^c (\ln 2)^3}{3!} (x - 1)^3,$$

gdzie c leży między 1 a x .

Ponieważ $f^{(k)}(x) = 2^x (\ln 2)^k$, otrzymujemy

$$2^x = 2 + 2 \ln 2 (x - 1) + (\ln 2)^2 (x - 1)^2 + R_2(x),$$
$$R_2(x) = \frac{2^c (\ln 2)^3}{3!} (x - 1)^3,$$

gdzie c leży między 1 a x .

Wielomian i błąd przybliżenia

Wielomianem Taylora jest P_n , a resztą – dokładna różnica

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Jeśli $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ na odcinku między x_0 a x , to

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Zapis $f(x) \approx P_n(x)$ ma sens jako przybliżenie z kontrolowanym błędem. Wymaga odpowiednich założeń o pochodnych i oszacowania reszty.

Wielomiany Maclaurina funkcji wykładniczej

Dla $f(x) = e^x$ każda pochodna w 0 wynosi 1, zatem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad e^x = P_n(x) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Dla dowolnego rzeczywistego x :

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{\max(0,x)} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wielomiany Maclaurina funkcji wykładniczej

Dla $f(x) = e^x$ każda pochodna w 0 wynosi 1, zatem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad e^x = P_n(x) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Dla dowolnego rzeczywistego x :

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{\max(0,x)} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

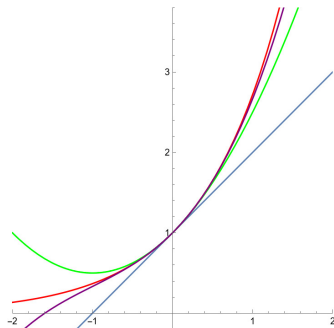
Na przykład dla $x = 1$, korzystając z $e < 3$, mamy

$$0 < R_3(1) < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}, \quad 0 < R_5(1) < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}.$$

Dla ustalonego x oszacowanie dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$.

Przybliżenia funkcji e^x wokół zera

$$P_1 = 1 + x, \quad P_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad P_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$



Czerwony: e^x ; niebieski: P_1 ; zielony: P_2 ; fioletowy: P_3 .

Wielomiany Maclaurina sinusa

Kąty mierzymy w radianach. Dla $f(x) = \sin x$:

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Wartości kolejnych pochodnych w 0 tworzą cykl $0, 1, 0, -1$. Znikają więc współczynniki przy parzystych potęgach x . Dla całkowitego $m \geq 1$:

$$P_{2m-1}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Na przykład

$$P_1 = x, \quad P_3 = x - \frac{x^3}{3!}, \quad P_5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Ponieważ współczynnik przy x^{2m} jest zerowy, $P_{2m} = P_{2m-1}$. To pozwala uzyskać dokładniejsze oszacowanie błędu.

Zastosujmy wzór Taylora do $P_{2m} = P_{2m-1}$. Wtedy

$$\sin x - P_{2m-1}(x) = R_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right),$$

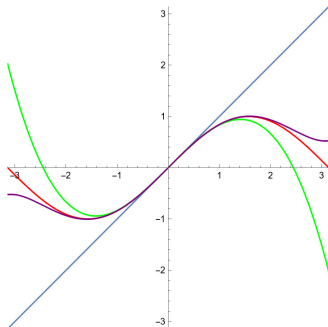
gdzie $0 < \theta < 1$ dla $x \neq 0$. Ponieważ wartość bezwzględna sinusa nie przekracza 1,

$$|\sin x - P_{2m-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Na przykład $|\sin x - x| \leq |x|^3/6$. Oszacowanie obowiązuje dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przybliżenia sinusa wokół zera

$$P_1 = x, \quad P_3 = x - \frac{x^3}{6}, \quad P_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$



Czerwony: $\sin x$; niebieski: P_1 ; zielony: P_3 ; fioletowy: P_5 .

Wielomiany Maclaurina cosinusa

Dla $f(x) = \cos x$:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \cos \frac{k\pi}{2}.$$

Wartości kolejnych pochodnych w 0 tworzą cykl $1, 0, -1, 0$.

Współczynniki przy nieparzystych potęgach znikają. Dla $m \geq 0$:

$$P_{2m}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \quad P_{2m+1} = P_{2m}.$$

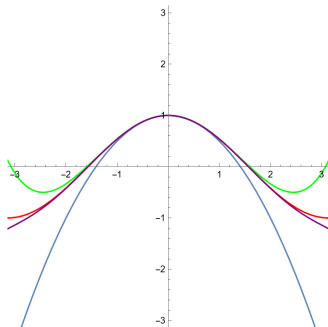
Stosując wzór Taylora do P_{2m+1} i ograniczając cosinus przez 1, dostajemy

$$|\cos x - P_{2m}(x)| = |R_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

W szczególności $P_2 = 1 - x^2/2$, a błąd nie przekracza $|x|^4/24$.

Przybliżenia cosinusa wokół zera

$$P_2 = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad P_4 = P_2 + \frac{x^4}{24}, \quad P_6 = P_4 - \frac{x^6}{720}.$$



Czerwony: $\cos x$; niebieski: P_2 ; zielony: P_4 ; fioletowy: P_6 .

Wielomiany Taylora logarytmu wokół 1

Dla $f(x) = \ln x$, $x > 0$, mamy $f(1) = 0$ oraz

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Ogólnie, dla całkowitego $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Stąd wielomian stopnia $n \geq 1$ ma postać

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Rozwinięcie $\ln(1+x)$ i zakres zbieżności

Zastępując argument logarytmu przez $1+x$, dla $x > -1$ otrzymujemy

$$\ln(1+x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}_{P_n(x)} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}.$$

Dla $x \neq 0$ istnieje odpowiednie $\theta \in (0, 1)$, zależne od x i n . Dla $x = 0$ reszta wynosi 0.

Rozwinięcie $\ln(1+x)$ i zakres zbieżności

Zastępując argument logarytmu przez $1+x$, dla $x > -1$ otrzymujemy

$$\ln(1+x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}_{P_n(x)} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}.$$

Dla $x \neq 0$ istnieje odpowiednie $\theta \in (0, 1)$, zależne od x i n . Dla $x = 0$ reszta wynosi 0.

Dla $|x| < 1$, po zróżniczkowaniu różnicy $\ln(1+x) - P_n(x)$, mamy

$$R'_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Twierdzenie Lagrange'a na odcinku od 0 do x daje

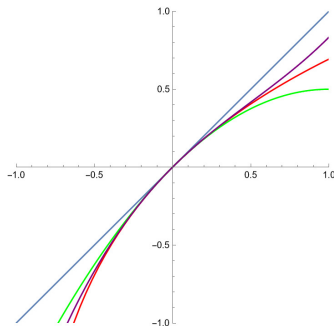
$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}/(1-|x|) \rightarrow 0$. Dla $x = 1$ bezpośrednio z reszty Taylora:

$|R_n(1)| \leq 1/(n+1) \rightarrow 0$.

Zatem $R_n(x) \rightarrow 0$ dokładnie dla $-1 < x \leq 1$. Dla $x > 1$ wyrazy x^k/k nie dążą do zera. Skończony wzór Taylora nadal obowiązuje, ale nie daje zbieżnego szeregu.

Przybliżenia $\ln(1+x)$ wokół zera

$$P_1 = x, \quad P_2 = x - \frac{x^2}{2}, \quad P_3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad x > -1.$$



Czerwony: $\ln(1+x)$; niebieski: P_1 ; zielony: P_2 ; fioletowy: P_3 .

Przybliżenie $\cos 5^\circ$ z błędem mniejszym niż 10^{-6}

Najpierw przeliczamy kąt na radiany: $t = 5\pi/180 = \pi/36$. Ponieważ dla cosinusa $P_5 = P_4$, mamy

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + R_5(t), \quad |R_5(t)| \leq \frac{t^6}{720} < 6,14 \cdot 10^{-10}.$$

Zatem

$$P_4(\pi/36) = 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 36^4} \approx 0,9961946987.$$

Po zaokrągleniu do sześciu miejsc po przecinku:

$$\cos 5^\circ \approx 0,996195.$$

Błąd zaokrąglenia nie przekracza $5 \cdot 10^{-7}$. Łączny błąd jest więc mniejszy niż 10^{-6} .

Przybliżenie $\sin 49^\circ$ – wybór środka rozwinięcia

Chcemy uzyskać błąd mniejszy niż 10^{-6} . Wybieramy środek $a = 45^\circ = \pi/4$, ponieważ znamy dokładne wartości sinusa i cosinusa tego kąta.

$$x = \frac{49\pi}{180}, \quad h = x - a = \frac{\pi}{45}.$$

Pochodne sinusa w a mają kolejno wartości $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \dots$. Wzór Taylora daje zatem

$$\sin(a + h) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right) + R_4,$$

$$|R_4| \leq \frac{|h|^5}{5!}.$$

Mały przyrost $h = \pi/45$ pozwala uzyskać dokładne przybliżenie przy użyciu niewielu wyrazów.

Przybliżenie $\sin 49^\circ$ – rachunek i kontrola błędu

Dla $h = \pi/45$:

$$|R_4| \leq \frac{\pi^5}{120 \cdot 45^5} < 1,39 \cdot 10^{-8}.$$

Obliczamy

$$P_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{45} - \frac{\pi^2}{2 \cdot 45^2} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 45^3} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 45^4} \right) \\ \approx 0,7547095706.$$

Po zaokrągleniu otrzymujemy

$$\sin 49^\circ \approx 0,754710.$$

Łącznie błąd reszty i zaokrąglenia jest mniejszy niż $1,39 \cdot 10^{-8} + 5 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$. Wyraz sześcienny ma znak ujemny, zgodnie z $f^{(3)}(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.

Test pierwszej niezerowej pochodnej

Niech $n \geq 1$ będzie całkowite, a f niech ma pochodne do rzędu n w otoczeniu x_0 . Załóżmy, że $f^{(n)}$ jest ciągła w x_0 oraz

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dla $n = 1$ lista zerujących się pochodnych jest pusta.

- Jeśli n jest nieparzyste, w x_0 nie ma ekstremum.
- Jeśli n jest parzyste i $f^{(n)}(x_0) > 0$, w x_0 jest minimum lokalne właściwe.
- Jeśli n jest parzyste i $f^{(n)}(x_0) < 0$, w x_0 jest maksimum lokalne właściwe.

Test pierwszej niezerowej pochodnej

Niech $n \geq 1$ będzie całkowite, a f niech ma pochodne do rzędu n w otoczeniu x_0 . Załóżmy, że $f^{(n)}$ jest ciągła w x_0 oraz

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dla $n = 1$ lista zerujących się pochodnych jest pusta.

- Jeśli n jest nieparzyste, w x_0 nie ma ekstremum.
- Jeśli n jest parzyste i $f^{(n)}(x_0) > 0$, w x_0 jest minimum lokalne właściwe.
- Jeśli n jest parzyste i $f^{(n)}(x_0) < 0$, w x_0 jest maksimum lokalne właściwe.

Dowód. Ze wzoru Taylora dla P_{n-1} :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

gdzie c leży między x_0 a x . Dalsze rozumowanie dotyczy znaku tego iloczynu.

Dokończenie dowodu. Dla x dostatecznie bliskiego x_0 ciągłość zapewnia, że $f^{(n)}(c)$ ma ten sam znak co $f^{(n)}(x_0)$. Przy parzystym n czynnik $(x - x_0)^n$ jest dodatni po obu stronach x_0 ; przy nieparzystym n zmienia znak. To daje wszystkie wnioski. □

Dokończenie dowodu. Dla x dostatecznie bliskiego x_0 ciągłość zapewnia, że $f^{(n)}(c)$ ma ten sam znak co $f^{(n)}(x_0)$. Przy parzystym n czynnik $(x - x_0)^n$ jest dodatni po obu stronach x_0 ; przy nieparzystym n zmienia znak. To daje wszystkie wnioski. □

Przykład 1. Dla $f(x) = x^2(x - 1)^2$:

$$f'(x) = 2x(x - 1)(2x - 1), \quad f''(x) = 12x^2 - 12x + 2.$$

Punkty stacjonarne to 0, 1/2 i 1. Ponieważ

$$f''(0) = f''(1) = 2 > 0, \quad f''(1/2) = -1 < 0,$$

funkcja ma minima lokalne właściwe w 0 i 1, o wartości 0, oraz maksimum lokalne właściwe w 1/2, o wartości 1/16.

Minima są również globalne, bo $x^2(x - 1)^2 \geq 0$ dla każdego x .

Przykład: pierwsza niezerowa pochodna rzędu czwartego

Niech $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$. Badamy punkt $x_0 = 0$.

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f^{(3)}(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4.$$

Pierwsza niezerowa pochodna ma parzysty rząd i dodatnią wartość.
Zatem $f(0) = 4$ jest minimum lokalnym właściwym.

Sama równość $f''(0) = 0$ nie rozstrzyga o ekstremum. W tym przykładzie potrzebne są dalsze pochodne.

Wypukłość i wklęsłość na przedziale

Definicja dla funkcji różniczkowalnej

Niech f będzie różniczkowalna na otwartym przedziale I . Funkcja jest *wypukła* na I , jeśli dla wszystkich $x_0, x \in I$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Jej wykres leży więc nad każdą styczną lub na niej. Funkcja jest *wklęsła*, jeśli dla wszystkich $x_0, x \in I$

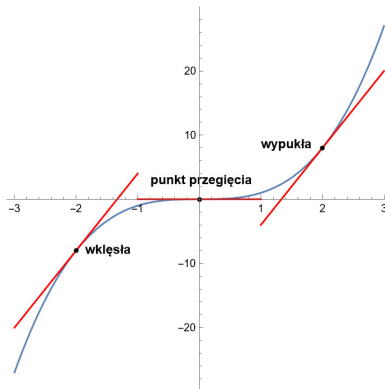
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Wtedy wykres leży pod każdą styczną lub na niej.

Jeśli nierówności są ścisłe dla $x \neq x_0$, mówimy odpowiednio o *ściślej wypukłości* i *ściślej wklęsłości*.

Funkcja liniowa jest jednocześnie wypukła i wklęsła, lecz nie jest ściśle wypukła ani ściśle wklęsła.

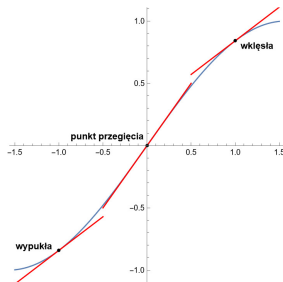
Wykres względem stycznych



Dla x^3 : po lewej stronie zera wykres jest wklęsły, po prawej – wypukły.

Punkt przegięcia – przyjęta konwencja

Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia, jeśli f jest ciągła w x_0 i w jednostronnych sąsiedztwach tego punktu zmienia ścisłą wypukłość na ścisłą wklęsłość lub odwrotnie. W samym punkcie nie wymagamy istnienia pochodnej ani stycznej.



Spotyka się też definicję wymagającą stycznej. W tym węższym ujęciu naroża wykresu nie są punktami przegięcia.

Znak drugiej pochodnej a kształt wykresu

Niech f ma drugą pochodną na otwartym przedziale I .

- Jeśli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in I$, to f jest ściśle wypukła na I .
- Jeśli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in I$, to f jest ściśle wklęsła na I .

Znak drugiej pochodnej a kształt wykresu

Niech f ma drugą pochodną na otwartym przedziale I .

- Jeśli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in I$, to f jest ściśle wypukła na I .
- Jeśli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in I$, to f jest ściśle wklęsła na I .

Dowód. Dla dowolnych różnych $x_0, x \in I$ wzór Taylora daje

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

gdzie c leży między x_0 a x . Ponieważ $(x - x_0)^2 > 0$, różnica ma znak $f''(c)$. □

Warunki $f'' \geq 0$ i $f'' \leq 0$ dają odpowiednio wypukłość i wklęsłość bez gwarancji ich ścisłości.

Przykłady wypukłości i wklęsłości

1. Dla $f(x) = x^3$ mamy $f''(x) = 6x$. Funkcja jest ściśle wklęsła na $(-\infty, 0)$ i ściśle wypukła na $(0, +\infty)$. Punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia.

2. Dla $f(x) = 2^x$:

$$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Funkcja jest ściśle wypukła na całej prostej.

3. Dla $f(x) = \ln x$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (x > 0).$$

Funkcja jest ściśle wklęsła na $(0, +\infty)$.

Warunek wystarczający punktu przegięcia

Niech f będzie określona w otoczeniu x_0 i ciągła w x_0 , a f'' niech istnieje w $S(x_0, r)$. Jeśli dla pewnego $0 < \delta \leq r$:

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla każdego } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla każdego } x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

lub zachodzą nierówności przeciwne, to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia w przyjętej definicji.

Warunek wystarczający punktu przegięcia

Niech f będzie określona w otoczeniu x_0 i ciągła w x_0 , a f'' niech istnieje w $S(x_0, r)$. Jeśli dla pewnego $0 < \delta \leq r$:

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla każdego } x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla każdego } x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

lub zachodzą nierówności przeciwne, to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia w przyjętej definicji.

Przykład. Dla $f(x) = \sin x$ mamy $f''(x) = -\sin x$. Na $(-\pi, 0)$ druga pochodna jest dodatnia, a na $(0, \pi)$ ujemna. Ponieważ sinus jest ciągły w 0, punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia. Twierdzenie dotyczy znaku w sąsiedztwie punktu, nie na całej półprostej.

Zmiana wypukłości w narożu: $f(x) = |\ln x|$

Dziedziną jest $(0, +\infty)$. Dla $x \neq 1$:

	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$	$-\ln x$	$\ln x$
$f'(x)$	$-1/x$	$1/x$
$f''(x)$	$1/x^2$	$-1/x^2$

Funkcja jest ciągła w 1, ściśle wypukła na $(0, 1)$ i ściśle wklęsła na $(1, +\infty)$. Zatem $(1, 0)$ jest punktem zmiany wypukłości.

Jednocześnie $f'_-(1) = -1$ i $f'_+(1) = 1$, więc wykres ma naroże i nie ma tam jednej stycznej. Punkt ten jest punktem przegięcia według przyjętego kryterium zmiany wypukłości, lecz nie według definicji wymagającej stycznej. Jest także miejscem minimum globalnego.

Warunek konieczny punktu przegięcia

Jeśli f'' istnieje w otoczeniu x_0 , jest ciągła w x_0 , a $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.

Dowód. Gdyby $f''(x_0) > 0$, to z ciągłości wynikałoby $f''(x) > 0$ w pewnym całym otoczeniu x_0 . Funkcja byłaby tam ściśle wypukła, więc nie zmieniałaby wypukłości w x_0 . Dla $f''(x_0) < 0$ rozumiemy analogicznie. $\square$

Warunek konieczny punktu przegięcia

Jeśli f'' istnieje w otoczeniu x_0 , jest ciągła w x_0 , a $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.

Dowód. Gdyby $f''(x_0) > 0$, to z ciągłości wynikałoby $f''(x) > 0$ w pewnym całym otoczeniu x_0 . Funkcja byłaby tam ściśle wypukła, więc nie zmieniałaby wypukłości w x_0 . Dla $f''(x_0) < 0$ rozumujemy analogicznie. $\square$

Warunek $f''(x_0) = 0$ nie wystarcza: dla $f(x) = x^4$ mamy $f''(0) = 0$, ale po obu stronach zera funkcja jest wypukła, więc $(0, 0)$ nie jest punktem przegięcia.

Punkty, w których f'' nie istnieje, trzeba zbadać osobno; twierdzenie nie obejmuje tych przypadków.

Przykład bez punktów przegięcia

Dla funkcji

$$f(x) = \cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

mamy

$$f''(x) = 2(e^{2x} + e^{-2x}) = 4 \cosh 2x > 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcja jest zatem ściśle wypukła na całej prostej i nie ma punktów przegięcia.

Plan badania funkcji

- 1 Wyznaczyć dziedzinę i jej składowe przedziały.
- 2 Sprawdzić symetrię, okresowość, miejsca zerowe i znaki funkcji.
- 3 Obliczyć granice na brzegach dziedziny, także jednostronne i w nieskończoności.
- 4 Wyznaczyć asymptoty, określając kierunek ich występowania.
- 5 Zbadać znak f' na przedziałach; sprawdzić ekstrema, punkty nieróżniczkowalności i należące do dziedziny końce przedziałów.
- 6 Zbadać znak f'' , wypukłość, wklęsłość i rzeczywistą zmianę wypukłości.
- 7 Naszkicować wykres zgodny ze wszystkimi ustaleniami i wskazać zbiór wartości.

Zmiana znaku pochodnej po przeciwnych stronach luki w dziedzinie nie daje ekstremum ani punktu przegięcia w tej luce.

Badanie funkcji $f(x) = xe^{1/x}$: granice i asymptoty

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcja ma znak x i nie ma miejsc zerowych.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Przy $x \rightarrow 0^+$ podstawiamy $t = 1/x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0.$$

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową tylko prawostronną.

Badanie funkcji $f(x) = xe^{1/x}$: granice i asymptoty

Dziedziną jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcja ma znak x i nie ma miejsc zerowych.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Przy $x \rightarrow 0^+$ podstawiamy $t = 1/x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0.$$

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową tylko prawostronną. W obu kierunkach nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{u \rightarrow 0^\pm} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Zatem $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną obustronną.

Badanie funkcji $f(x) = xe^{1/x}$: pochodne

$$f'(x) = e^{1/x} \frac{x-1}{x}, \quad f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

Ponieważ $e^{1/x} > 0$:

- $f' > 0$ na $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$ – funkcja rośnie;
- $f' < 0$ na $(0, 1)$ – funkcja maleje;
- $f'(1) = 0$, a $f(1) = e$ jest minimum lokalnym właściwym i minimum globalnym na $(0, +\infty)$;
- $f'' < 0$ na $(-\infty, 0)$ – funkcja jest ściśle wklęsła;
- $f'' > 0$ na $(0, +\infty)$ – funkcja jest ściśle wypukła.

Nie ma punktów przegięcia: 0 nie należy do dziedziny. Zbiór wartości to $(-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$. Na całej dziedzinie nie ma minimum ani maksimum globalnego.

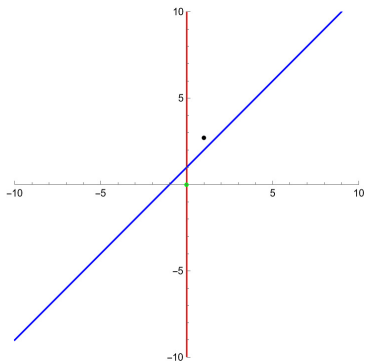
Tabela przebiegu zmienności $xe^{1/x}$

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$	e	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	$\times$	$+\infty \searrow e$	e	$\nearrow +\infty$

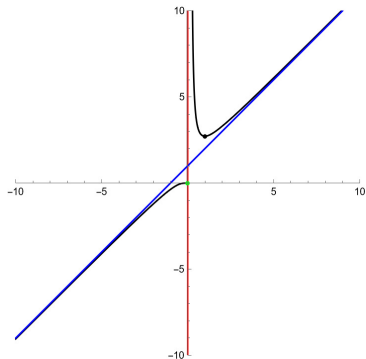
Znak $\times$ oznacza punkt spoza dziedziny. Wartość 0 przy $x \rightarrow 0^-$ jest granicą, a nie wartością funkcji w zerze.

Asymptoty i minimum funkcji $xe^{1/x}$



Asymptoty: $x = 0$ prawostronna, $y = x + 1$ obustronna; minimum: $(1, e)$. Znacznik w $(0, 0)$ wskazuje tylko granicę lewostronną; $0 \notin D$.

Wykres funkcji $f(x) = xe^{1/x}$



Wykres składa się z dwóch rozłącznych gałęzi. Punkt $(0,0)$ nie należy do wykresu; oznacza granicę lewej gałęzi.

Badanie funkcji $f(x) = xe^x$

Dziedziną jest $\mathbb{R}$, a jedynym miejscem zerowym – 0. Funkcja jest ciągła, więc nie ma asymptot pionowych.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty.$$

Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą lewostronną. Przy $x \rightarrow +\infty$ nie ma asymptoty ukośnej ani poziomej, ponieważ $f(x)/x = e^x \rightarrow +\infty$.

Badanie funkcji $f(x) = xe^x$

Dziedziną jest $\mathbb{R}$, a jedynym miejscem zerowym – 0. Funkcja jest ciągła, więc nie ma asymptot pionowych.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty.$$

Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą lewostronną. Przy $x \rightarrow +\infty$ nie ma asymptoty ukośnej ani poziomej, ponieważ $f(x)/x = e^x \rightarrow +\infty$.

$$f'(x) = e^x(x + 1).$$

Funkcja maleje na $(-\infty, -1)$ i rośnie na $(-1, +\infty)$. W punkcie -1 ma minimum globalne właściwe:

$$f(-1) = -e^{-1}.$$

Zbiór wartości to $[-e^{-1}, +\infty)$; maksimum nie istnieje.

Wypukłość i punkt przegięcia funkcji xe^x

$$f''(x) = e^x(x + 2).$$

Ponieważ czynnik e^x jest dodatni:

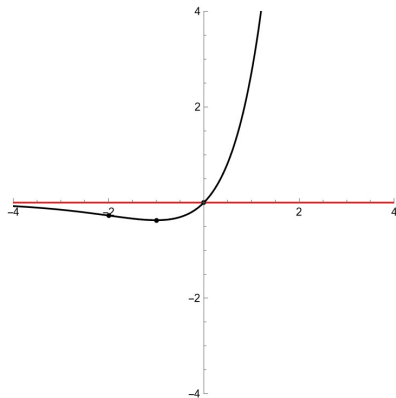
- dla $x < -2$ mamy $f''(x) < 0$, więc funkcja jest ściśle wklęsła;
- dla $x > -2$ mamy $f''(x) > 0$, więc funkcja jest ściśle wypukła.

W punkcie -2 druga pochodna zmienia znak, a funkcja jest ciągła.
Zatem punktem przegięcia jest

$$(-2, f(-2)) = (-2, -2e^{-2}).$$

Punkt przegięcia i punkt minimum $(-1, -e^{-1})$ są różne: o monotoniczności decyduje f' , a o wypukłości – f'' .

Wykres funkcji $f(x) = xe^x$



Badanie funkcji $f(x) = xe^{-|x|}$

Funkcja jest nieparzysta, ciągła na $\mathbb{R}$ i ma jedyne miejsce zerowe 0.

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0, \\ xe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Obie granice w $\pm\infty$ wynoszą 0, więc $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną. Asymptot pionowych nie ma.

$$f'(x) = e^{-|x|}(1 - |x|) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f'(0) = 1.$$

Wartość w 0 wynika z $f(h)/h = e^{-|h|} \rightarrow 1$. Funkcja maleje na $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, a rośnie na $(-1, 1)$.

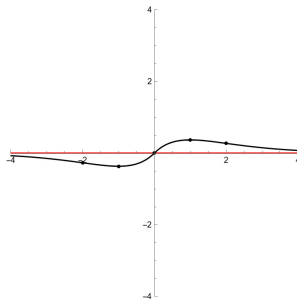
$$\min f = f(-1) = -e^{-1}, \quad \max f = f(1) = e^{-1}.$$

Zbiór wartości to $[-e^{-1}, e^{-1}]$.

Wypukłość i wykres funkcji $xe^{-|x|}$

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2), & x < 0, \\ e^{-x}(x-2), & x > 0. \end{cases}$$

Funkcja jest wypukła na $(-2, 0)$ i $(2, +\infty)$, a wklęsła na $(-\infty, -2)$ i $(0, 2)$.
Punkty przegięcia: $(-2, -2e^{-2})$, $(0, 0)$, $(2, 2e^{-2})$. W zerze f' istnieje, ale f'' nie istnieje.



Badanie funkcji $\sin^4 x + \cos^4 x$

Funkcja jest parzysta, ciągła na $\mathbb{R}$ i

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

Jej okres podstawowy wynosi $T = \pi/2$, a zbiór wartości to $[1/2, 1]$. Nie ma miejsc zerowych ani asymptot: jest ograniczona, nie stała i okresowa.

$$f'(x) = -\sin 4x.$$

Na jednym okresie $[0, \pi/2]$ funkcja maleje na $(0, \pi/4)$ i rośnie na $(\pi/4, \pi/2)$. W całej dziedzinie, dla $k \in \mathbb{Z}$:

$$f(k\pi/2) = 1 \quad - \text{maksima globalne,}$$

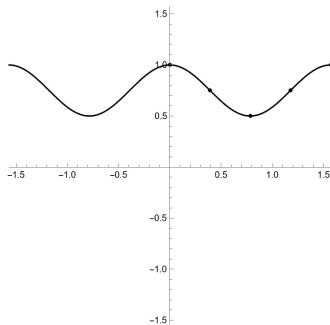
$$f(\pi/4 + k\pi/2) = \frac{1}{2} \quad - \text{minima globalne.}$$

Końce wybranego okresu nie są końcami dziedziny funkcji.

Wypukłość i wykres funkcji $\sin^4 x + \cos^4 x$

$$f''(x) = -4 \cos 4x.$$

W okresie $(0, \pi/2)$ funkcja jest wypukła na $(\pi/8, 3\pi/8)$, a wklęsła na $(0, \pi/8)$ i $(3\pi/8, \pi/2)$. Punkty przegięcia w całej dziedzinie to $(\pi/8 + k\pi/4, 3/4)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Badanie funkcji $f(x) = \ln(e^2 x^2)/|x|$

Dziedziną jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a funkcja jest parzysta. Dla $t = |x| > 0$ możemy zapisać

$$f(x) = g(t), \quad g(t) = \frac{2 + 2 \ln t}{t}.$$

Miejsca zerowe to $x = \pm e^{-1}$. Funkcja jest ujemna dla $0 < |x| < e^{-1}$ i dodatnia dla $|x| > e^{-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Zatem $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną, a $y = 0$ – poziomą obustronną.

$$g'(t) = -\frac{2 \ln t}{t^2}, \quad g''(t) = \frac{2(2 \ln t - 1)}{t^3}, \quad t > 0.$$

Te wzory dotyczą dodatniego argumentu t ; na ujemnej półosi używamy symetrii.

Ekstrema i wypukłość funkcji $\ln(e^2 x^2)/|x|$

Znak $g'(t) = -2 \ln t / t^2$ daje wzrost g na $(0, 1)$ i spadek na $(1, +\infty)$. Dla pełnej funkcji parzystej f otrzymujemy:

- wzrost na $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$;
- spadek na $(-1, 0)$ i $(1, +\infty)$;
- maksima globalne $f(-1) = f(1) = 2$; minimum nie istnieje.

Zbiór wartości to $(-\infty, 2]$.

Ekstrema i wypukłość funkcji $\ln(e^2 x^2)/|x|$

Znak $g'(t) = -2 \ln t / t^2$ daje wzrost g na $(0, 1)$ i spadek na $(1, +\infty)$. Dla pełnej funkcji parzystej f otrzymujemy:

- wzrost na $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$;
- spadek na $(-1, 0)$ i $(1, +\infty)$;
- maksima globalne $f(-1) = f(1) = 2$; minimum nie istnieje.

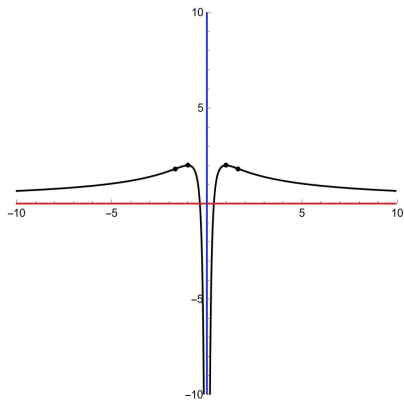
Zbiór wartości to $(-\infty, 2]$.

Ponieważ $g''(t) = 2(2 \ln t - 1)/t^3$, funkcja f jest:

- wklęsła na $(-\sqrt{e}, 0)$ i $(0, \sqrt{e})$;
- wypukła na $(-\infty, -\sqrt{e})$ i $(\sqrt{e}, +\infty)$.

Punkty przegięcia to $(-\sqrt{e}, 3/\sqrt{e})$ oraz $(\sqrt{e}, 3/\sqrt{e})$. Punkt 0 nie należy do dziedziny.

Wykres funkcji $f(x) = \ln(e^2 x^2)/|x|$



Funkcja $f(x) = \arcsin(2x/(1+x^2))$

Ponieważ $2|x| \leq 1+x^2$, argument funkcji $\arcsin$ należy do $[-1, 1]$. Dziedziną jest więc $\mathbb{R}$. Funkcja jest ciągła i nieparzysta, a jej jedyne miejsce zerowe to 0. Obie granice w $\pm\infty$ wynoszą 0: prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną. Asymptot pionowych nie ma.

Funkcja $f(x) = \arcsin(2x/(1+x^2))$

Ponieważ $2|x| \leq 1+x^2$, argument funkcji $\arcsin$ należy do $[-1, 1]$. Dziedziną jest więc $\mathbb{R}$. Funkcja jest ciągła i nieparzysta, a jej jedyne miejsce zerowe to 0. Obie granice w $\pm\infty$ wynoszą 0: prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną. Asymptot pionowych nie ma.

Tożsamość $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = 2x/(1+x^2)$ i zakres wartości $\arcsin$, równy $[-\pi/2, \pi/2]$, dają

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x < -1, \\ 2 \operatorname{arctg} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x > 1. \end{cases}$$

Ta postać pozwala poprawnie rozpatrzyć naroża w $x = \pm 1$.

Pochodne i ekstrema funkcji z arcus sinusem

Pochodna argumentu wynosi

$$\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Dla $x \neq \pm 1$, po uwzględnieniu $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2/(1+x^2), & |x| < 1, \\ -2/(1+x^2), & |x| > 1. \end{cases}$$

Funkcja maleje na $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, a rośnie na $(-1, 1)$. Jej ekstrema globalne to

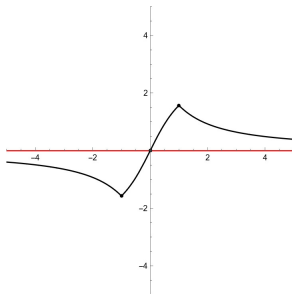
$$f(-1) = -\pi/2, \quad f(1) = \pi/2.$$

Pochodne jednostronne w -1 wynoszą odpowiednio -1 i 1 , a w 1 -1 i 1 . Pochodne dwustronne w tych punktach nie istnieją. Zbiór wartości to $[-\pi/2, \pi/2]$.

Wykres i zmiany wypukłości funkcji z arcus sinusem

$$f''(x) = \begin{cases} -4x/(1+x^2)^2, & |x| < 1, \\ 4x/(1+x^2)^2, & |x| > 1. \end{cases}$$

Wypukłość: $(-1, 0)$ i $(1, +\infty)$; wklęsłość: $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$. Punkty zmiany wypukłości: $(-1, -\pi/2)$, $(0, 0)$, $(1, \pi/2)$. Punkty przy $x = \pm 1$ są narożami; $(0, 0)$ ma styczną.



$$f(x) = \sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R}.$$

Funkcja jest nieparzysta, ma miejsce zerowe 0 i

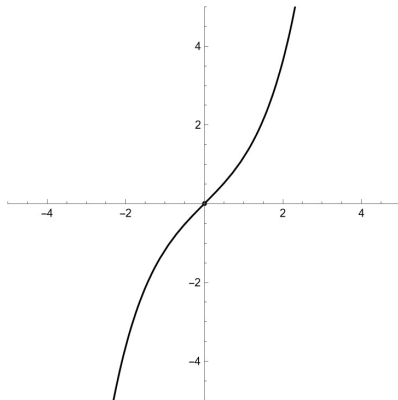
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Nie ma asymptot pionowych ani poziomych. Nie ma też ukośnych, gdyż $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = +\infty$.

$$f'(x) = \cosh x > 0, \quad f''(x) = \sinh x.$$

Jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$ i nie ma ekstremów. Jest wklęsła na $(-\infty, 0)$, wypukła na $(0, +\infty)$ i ma punkt przegięcia $(0, 0)$. Jej zbiorem wartości jest $\mathbb{R}$.

Wykres funkcji $f(x) = \sinh x$



$$f(x) = \cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R}.$$

Funkcja jest parzysta i dodatnia. W obu kierunkach nieskończoności dąży do $+\infty$, a

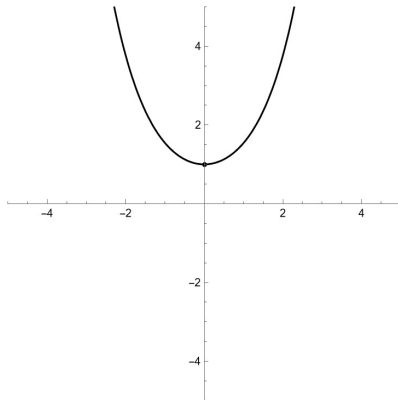
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Nie ma asymptot pionowych, poziomych ani ukośnych.

$$f'(x) = \sinh x, \quad f''(x) = \cosh x > 0.$$

Funkcja maleje na $(-\infty, 0)$ i rośnie na $(0, +\infty)$, więc $f(0) = 1$ jest minimum globalnym właściwym. Jest ściśle wypukła na całej prostej, bez punktów przegięcia. Jej zbiorem wartości jest $[1, +\infty)$.

Wykres funkcji $f(x) = \cosh x$



Tangens hiperboliczny

$$f(x) = \operatorname{tgh} x = \operatorname{tgh} x = \operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D = \mathbb{R}.$$

Funkcja jest nieparzysta i ma jedyne miejsce zerowe 0.

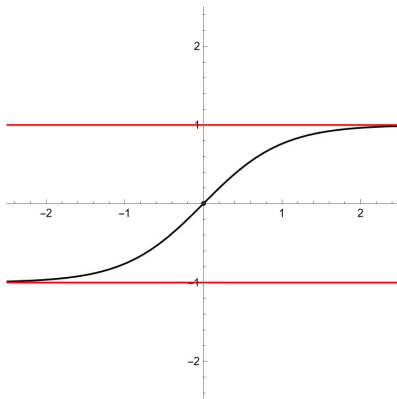
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Asymptoty poziome to $y = -1$ z lewej strony i $y = 1$ z prawej.

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0, \quad f''(x) = -\frac{2 \sinh x}{\cosh^3 x}.$$

Funkcja jest ściśle rosnąca, bez ekstremów; jej zbiór wartości to $(-1, 1)$. Jest wypukła na $(-\infty, 0)$, wklęsła na $(0, +\infty)$ i ma punkt przegięcia $(0, 0)$.

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tgh} x$



Cotangens hiperboliczny

$$f(x) = \operatorname{ctgh} x = \operatorname{ctgh} x = \operatorname{cth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funkcja jest nieparzysta. Granice wynoszą

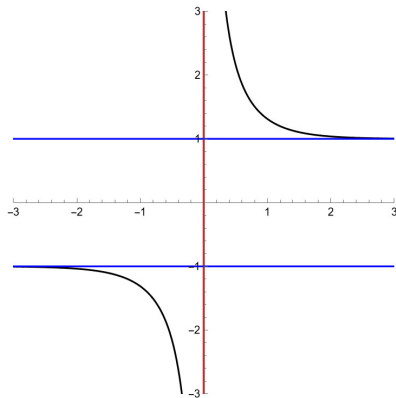
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1. \end{aligned}$$

Asymptoty: $x = 0$ obustronna pionowa, $y = -1$ pozioma lewostronna i $y = 1$ pozioma prawostronna.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} < 0, \quad f''(x) = \frac{2 \cosh x}{\sinh^3 x}.$$

Funkcja maleje na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, ale nie jest malejąca na całej rozłącznej dziedzinie. Jest wklęsła dla $x < 0$ i wypukła dla $x > 0$. Nie ma ekstremów ani punktów przegięcia, ponieważ $0 \notin D$. Zbiór wartości: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctgh} x$

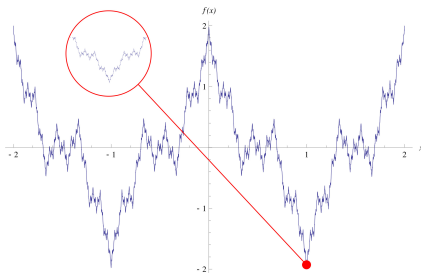


Funkcja ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna

Klasyczny przykład Weierstrassa:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Zakładamy $0 < a < 1$, $b \in \{1, 3, 5, \dots\}$ oraz $ab > 1 + 3\pi/2$. Szereg jest zbieżny jednostajnie, gdyż $|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$. Stąd wynika ciągłość. Brak pochodnej w każdym punkcie jest treścią odrębnego twierdzenia Weierstrassa, a nie wnioskiem z samego rysunku.



Ilustracja funkcji z rodziny Weierstrassa: Eeyore22, praca własna, domena publiczna, Wikimedia Commons.