Analiza, Wykład: Całka nieoznaczona

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Strózyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeśli

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeśli

$$\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Jeśli I jest przedziałem jednostronnie lub obustronnie domkniętym, to pochodną $F'(x)$ rozumiemy jako odpowiednią pochodną jednostronną.

1. $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 1$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeśli

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Jeśli I jest przedziałem jednostronnie lub obustronnie domkniętym, to pochodną $F'(x)$ rozumiemy jako odpowiednią pochodną jednostronną.

1. $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 1$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, bo $\left(x^2\right)' = \left(x^2 + 1\right)' = 2x$.

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeśli

$$\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Jeśli I jest przedziałem jednostronnie lub obustronnie domkniętym, to pochodną $F'(x)$ rozumiemy jako odpowiednią pochodną jednostronną.

1. $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 1$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, bo $\left(x^2\right)' = \left(x^2 + 1\right)' = 2x$.
2. $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$, $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{3}$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2^x$ na $\mathbb{R}$,

Fukcja pierwotna

Niech dana będzie funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeśli
$$\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Jeśli I jest przedziałem jednostronnie lub obustronnie domkniętym, to pochodną $F'(x)$ rozumiemy jako odpowiednią pochodną jednostronną.

1. $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 1$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, bo $\left(x^2\right)' = \left(x^2 + 1\right)' = 2x$.
2. $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$, $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{3}$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2^x$ na $\mathbb{R}$, bo $\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{3}\right)' = 2^x$.

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(2x + C)' = 2$
3. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(2x + C)' = 2$
3. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
   Odpowiedź: $F(x) = \operatorname{tg} x$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(2x + C)' = 2$
3. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
   Odpowiedź: $F(x) = \operatorname{tg} x$, $F(x) = \operatorname{tg} x + C$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(2x + C)' = 2$
3. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Odpowiedź: $F(x) = \operatorname{tg} x$, $F(x) = \operatorname{tg} x + C$, bo $(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
4. $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3}$ na $[0, +\infty)$,

Przykłady

1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź: $F(x) = 0$, $F(x) = 1$, $F(x) = \pi^3 e^{-1}$ czyli $F(x) = C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(C)' = 0$
2. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
   Odpowiedź:$F(x) = 2x$, $F(x) = 2x + \pi^2$ czyli $F(x) = 2x + C$, gdzie C dowolna stała rzeczywista, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, bo $(2x + C)' = 2$
3. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
   Odpowiedź: $F(x) = \operatorname{tg} x$, $F(x) = \operatorname{tg} x + C$, bo $(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
4. $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3}$ na $[0, +\infty)$, bo $F'(x) = f(x)$ dla $x > 0$ oraz $F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - 0}{x - 0} = 0 = f(0)$.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła na I to f ma na I funkcję pierwotną.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła na I to f ma na I funkcję pierwotną.

Uwaga:

Implikacja przeciwna nie jest prawdziwa, np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w $\mathbb{R}$, ale ma w $\mathbb{R}$ funkcję pierwotną

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

Dla $x \neq 0$:
$F'(x) = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\sin\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$

Dla $x = 0$:
$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x)$

Twierdzenie podstawowe o funkcjach pierwotnych

Twierdzenie

Jeśli F jest funkcją pierwotną f na przedziale I, to:

1. funkcja $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest stałą, też jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I,
2. każdą funkcję pierwotną G funkcji f na przedziale I można przedstawić w postaci $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą.

Dowód: (1) Różniczkując G otrzymujemy $G'(x) = F'(x) = f(x)$. Stąd G jest funkcją pierwotną f.

(2) Niech $H(x) = G(x) - F(x)$. Różniczkując H otrzymujemy $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ dla każdego $x \in I$. Niech $x_1, x_2 \in I$ będą różnymi punktami. Załóżmy, że $x_1 < x_2$. Wtedy z Twierdzenia Lagrange'a istnieje $x_3 \in (x_1, x_2)$ taki, że $\frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} = H'(x_3) = 0$ czyli $H(x_2) = H(x_1)$. Stąd H jest stała na I czyli istnieje $C \in \mathbb{R}$ taka, że $G(x) = F(x) + C$. $\square$

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych tej funkcji na I i oznaczamy $\int f(x)\,dx$.

Całka niezoznaczona

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych tej funkcji na I i oznaczamy $\int f(x)\,dx$.

Wniosek

Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, to:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Podstawowe wzory

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int 1\,dx = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Podstawowe wzory

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int 1\,dx = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0,\ \alpha \neq -1$$

Podstawowe wzory

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int 1\,dx = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0,\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x > 0 \text{ lub } x < 0$$

Podstawowe wzory

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int 1\,dx = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0,\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x > 0 \text{ lub } x < 0$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Wzory podstawowe

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Wzory podstawowe

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wzory podstawowe

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi,(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Wzory podstawowe

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \ \ x \in (-1, 1),$$

Wzory podstawowe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \ \ x \in (-1,1),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \ \ x \in \mathbb{R}$$

Wzory podstawowe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \ \ x \in (-1,1),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C, \ \ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \qquad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Wzory podstawowe

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \;\; x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

Wzory podstawowe

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \ \ x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C, \ \ x > 0 \text{ lub } x < 0,$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Własności całki nieoznaczonej

Twierdzenie

(1) Liniowość:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

(2) Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma pochodną w (a, b) i $\forall\, x \in (a, b) \;\; f(x) \neq 0$, to

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C$$

Przykłady:

1. $\int (2x^2 - 3)\sqrt{x}\, dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}\, dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx =$
$2 \cdot \frac{x^{7/2}}{7/2} - 3 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C$

Przykłady:

1. $\int (2x^2-3)\sqrt{x}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$
   $2\cdot\frac{x^{7/2}}{7/2} - 3\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C$
2. $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

Przykłady:

1. $\int (2x^2 - 3)\sqrt{x}\, dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}\, dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx =$
   $2 \cdot \frac{x^{7/2}}{7/2} - 3 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C$
2. $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C$
3. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

Przykłady:

1. $\int (2x^2-3)\sqrt{x}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$
   $2\cdot\frac{x^{7/2}}{7/2} - 3\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C$
2. $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$
3. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C$
4. $\int \frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+4}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C$

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $C^k(I)$ oznacza zbiór funkcji na I o ciągłych k-tych pochodnych na I czyli $f \in C^1(I)$ jeśli f jest rózniczkowalna w I i funkcja f' jest ciągła w I.

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $C^k(I)$ oznacza zbiór funkcji na I o ciągłych k-tych pochodnych na I czyli $f \in C^1(I)$ jeśli f jest rózniczkowalna w I i funkcja f' jest ciągła w I.

Tw. (o całkowaniu przez części)

Jeśli funkcje $f, g \in C^1(I)$, to

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $C^k(I)$ oznacza zbiór funkcji na I o ciągłych k-tych pochodnych na I czyli $f \in C^1(I)$ jeśli f jest rózniczkowalna w I i funkcja f' jest ciągła w I.

Tw. (o całkowaniu przez części)

Jeśli funkcje $f, g \in C^1(I)$, to

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Dowód: Z reguły Leibniza wynika, że $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Stąd $f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$ więc $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$. $\square$

Przykłady całkowania przez części:

(1) $\int \ln x \, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$
$x \ln x - x + C$

Przykłady całkowania przez części:

(1) $\int \ln x \, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$
$x \ln x - x + C$

(2) $\int x \sin x \, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \right\| =$
$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$

Przykłady całkowania przez części:

(1) $\int \ln x \, dx = \left\| \begin{array}{ll} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$
$x \ln x - x + C$

(2) $\int x \sin x \, dx = \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \right\| =$
$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$

(3) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\| \begin{array}{ll} f = \ln x & g' = \frac{1}{x^3} \\ f' = \frac{1}{x} & g = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\| = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} =$
$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

Przykłady całkowania przez części:

(1) $\int \ln x\, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx =$
$x \ln x - x + C$

(2) $\int x \sin x\, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \right\| =$
$= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C$

(3) $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \ln x & g' = \frac{1}{x^3} \\ f' = \frac{1}{x} & g = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\| = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} =$
$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

(4) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \operatorname{arctg} x & g' = x \\ f' = \frac{1}{1+x^2} & g = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$
$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx =$
$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left[\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

Przykłady całkowania przez części:

Całkowanie przez części można stosować kilka razy, np. przy obliczaniu całek $\int x^n e^x \, dx$, $\int x^n \sin x \, dx$, $\int x^n \cos x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$, całkujemy n razy.

Przykłady całkowania przez części:

Całkowanie przez części można stosować kilka razy, np. przy obliczaniu całek $\int x^n e^x \, dx$, $\int x^n \sin x \, dx$, $\int x^n \cos x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$, całkujemy n razy.

(5) $\int e^{-x} \cos x \, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = e^{-x} & g' = \cos x \\ f' = -e^{-x} & g = \sin x \end{array} \right\| =$

$= e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = e^{-x} & g' = \sin x \\ f' = -e^{-x} & g = -\cos x \end{array} \right\| =$

$= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$

Całkowanie przez części można stosować kilka razy, np. przy obliczaniu całek $\int x^n e^x\,dx$, $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, całkujemy n razy.

(5) $\int e^{-x}\cos x\,dx = \left\| \begin{array}{cc} f = e^{-x} & g' = \cos x \\ f' = -e^{-x} & g = \sin x \end{array} \right\| =$

$= e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx = \left\| \begin{array}{cc} f = e^{-x} & g' = \sin x \\ f' = -e^{-x} & g = -\cos x \end{array} \right\| =$

$= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx$

Stąd

$2\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie)

Niech $I, J \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami. Jeśli:

1. funkcja $h : I \to J$ jest różniczkowalna w I,
2. funkcja $g : J \to \mathbb{R}$ ma na przedziale J funkcję pierwotną G,

to

$$\int g(h(x)) \cdot h'(x)\, dx = G(h(x)) + C$$

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie)

Niech $I, J \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami. Jeśli:

1. funkcja $h : I \to J$ jest różniczkowalna w I,
2. funkcja $g : J \to \mathbb{R}$ ma na przedziale J funkcję pierwotną G,

to

$$\int g(h(x)) \cdot h'(x)\, dx = G(h(x)) + C$$

Dowód: Z twierdzenia z różniczkowaniu złożenia mamy $[G(h(x))]' = G'(h(x)) \cdot h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$. Więc $G(h(x)) + C = \int g(h(x)) \cdot h'(x) dx$. $\square$

Przykłady całkowania przez podstawianie

$$(1)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left\| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

$$(2)\ \int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \left\| \begin{array}{c} t = 1+2\cos x \\ dt = -2\sin x\,dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C =$$

$$= -\sqrt{1+2\cos x} + C$$

Przykłady całkowania przez podstawianie

(1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left\| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C =$
$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$

(2) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \left\| \begin{array}{c} t = 1 + 2\cos x \\ dt = -2\sin x\,dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C =$
$= -\sqrt{1 + 2\cos x} + C$

(3)

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Przykłady całkowania przez podstawianie

$$(1)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left\Vert \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\Vert = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

$$(2)\ \int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \left\Vert \begin{array}{c} t = 1+2\cos x \\ dt = -2\sin x\,dx \end{array} \right\Vert = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C =$$

$$= -\sqrt{1+2\cos x} + C$$

(3)

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left\Vert \begin{array}{c} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\Vert = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

$$(4)\ \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \left\Vert \begin{array}{c} t = 1+\ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\Vert = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$$

Przykłady całkowania przez podstawianie

$$(5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left\| \begin{array}{c} t = \sqrt{e^x+1} \\ e^x + 1 = t^2 \\ e^x\, dx = 2t\, dt \\ dx = \frac{2t}{t^2-1}\, dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\left[\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}\right] = \ln\left|\ \frac{t-1}{t+1}\ \right| + C =$$

$$= \ln\left|\ \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\ \right| + C$$

Przykłady całkowania przez podstawianie

$$(5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left\| \begin{array}{c} t = \sqrt{e^x+1} \\ e^x+1 = t^2 \\ e^x\,dx = 2t\,dt \\ dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\left[\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}\right] = \ln\left|\ \frac{t-1}{t+1}\ \right| + C =$$

$$= \ln\left|\ \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\ \right| + C$$

$$(6)\ \int \arccos x\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = \cos t,\ \ t \in [0,\pi] \\ t = \arccos x \\ dx = -\sin t\,dt \end{array} \right\| = -\int t\cdot \sin t\,dt =$$

$$= t\cos t - \sin t + C = x\arccos x - \sin(\arccos x) + C =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

bo: $\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

bo: $t \in [0,\pi] \Rightarrow \sin t > 0$

$$(7)\ \int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = 3\sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ t = \arcsin\frac{x}{3} \\ dx = 3\cos t\,dt \end{array} \right\| =$$

$$\int \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt = 9\int |\cos t|\cdot \cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= 9\int \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \tfrac{9}{2}\int dt + \tfrac{9}{2}\int \cos 2t\,dt = \tfrac{9}{2}t + \tfrac{9}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \tfrac{9}{2}t + \tfrac{9}{2}\sin t\cos t + C = \tfrac{9}{2}\arcsin\tfrac{x}{3} + \tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}} + C$$

Standardowe podstawienia

Podstawienie Eulera:

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \left\| \begin{array}{c} t = x + \sqrt{x^2+k} \\ dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right) dx \\ dt = \frac{x+\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}} dx \\ \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$$

Standardowe podstawienia

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a}dx \end{array} \right\| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$
$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Standardowe podstawienia

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a} dx \end{array} \right\| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$
$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} =$
$= \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a}\,,\ a > 0 \\ dt = \frac{1}{a}\, dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Standardowe podstawienia

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a} dx \end{array} \right\| = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} =$
$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} =$
$= \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a},\ a > 0 \\ dt = \frac{1}{a} dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- $\int R(e^x)\, dx = \left\| \begin{array}{c} t = e^x \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\| = \int \frac{R(t)}{t} dt$, gdzie R - funkcja wymierna

Standardowe podstawienia

$$\bullet \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a}dx \end{array} \right\| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} t = \frac{x}{a}\,,\ a > 0 \\ dt = \frac{1}{a}\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$\bullet \int R(e^x)\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = e^x \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\| = \int \frac{R(t)}{t}dt$, gdzie R - funkcja wymierna

• Jeśli funkcja podcałkowa jest iloczynem funkcji trygonometrycznych $\sin x, \cos x$ to stosujemy wzory trygonometryczne:

$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]$

$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x]$

$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x - \sin(\alpha+\beta)x]$

Przykłady:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{9}}} =$

$$= \left\| \begin{array}{c} t = x - \frac{1}{3} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{4}{9}}} = \left\| \; u = t + \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}} \; \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x - \frac{1}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} \right| + C$$

Przykłady:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{9}}} =$

$= \left\| \begin{array}{c} t = x - \frac{1}{3} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{4}{9}}} = \left\| \; u = t + \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}} \; \right\| =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |t + \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}}| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x - \frac{1}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}| + C$

(2) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \left\| \begin{array}{c} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$

$= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{2}{\sqrt{3}} t \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt \end{array} \right\| = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{1+u^2} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}) + C$

$$(3)\ \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+(\sin^2 x)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = \sin^2 x \\ dt = 2\sin x\cos x\,dx \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C$$

(3) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+(\sin^2 x)^2}\, dx = \left\| \begin{array}{c} t = \sin^2 x \\ dt = 2\sin x \cos x\, dx \end{array} \right\| =$

$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\, t + C = \mathrm{arctg}\, (\sin^2 x) + C$

(4) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x\, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(8x) + \sin(-2x)]\, dx =$

$= \frac{1}{2} \int \sin 8x\, dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

(3) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+(\sin^2 x)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t=\sin^2 x \\ dt = 2\sin x\cos x\,dx \end{array} \right\| =$

$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C$

(4) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(8x) + \sin(-2x)]\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} =$

$= \left\| \begin{array}{c} t = x - \frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}t\right)^2}} =$

$= \left\| \begin{array}{c} u = \frac{4}{5}t \\ du = \frac{4}{5}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin u + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin \frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{4}\right) + C$

$$(6)\ \int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x+3)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x+3 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{3t-11}{t^2}\,dt =$$

$$= 3\int \frac{dt}{t} - 11\int \frac{dt}{t^2} = 3\ln|t| + \frac{11}{t} + C = 3\ln|x+3| + \frac{11}{x+3} + C$$

(6) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x+3)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x+3 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{3t-11}{t^2}\,dt =$

$= 3\int \frac{dt}{t} - 11\int \frac{dt}{t^2} = 3\ln|t| + \frac{11}{t} + C = 3\ln|x+3| + \frac{11}{x+3} + C$

(7) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}\,dx = \int \frac{3x-5}{\sqrt{3[4-(x-1)^2]}}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\| =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$

$= \left\| \begin{array}{c} u = 4-t^2 \\ du = -2t\,dt \end{array} \right\| = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{2\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} =$

$= \left\| \begin{array}{c} w = \frac{t}{2} \\ dw = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} =$

$= -\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{4-(x-1)^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin\frac{x-1}{2} + C$

Uwaga:

Funkcje elementarne są to funkcje potęgowe, wykładnicze, trygonometryczne, odwrotne do nich, ich sumy, różnice, iloczyny, ilorazy i superpozycje.

Nie każda całka wyraża się przez funkcje elementarne, tzn. nie każdą całkę można obliczyć stosując powyższe twierdzenia.

Przykłady całek, które nie wyrażają się przez funkcje elementarne:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx\,,\ \int \frac{e^{\pm x}}{x}\,dx\,,\ \int e^{\pm x^2}\,dx\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,,$$
$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx\,,\ -1<k<1\,,$$
$$\int \frac{dx}{\ln x}\,,\ \int \sin(x^2)\,dx\,,\ \int \cos(x^2)\,dx\,,\ \int e^{\frac{1}{x}}\,dx\,,$$
$$\int x^\alpha e^{\pm x}\,dx\,,\ \int x^\alpha \sin x\,dx\,,\ \int x^\alpha \cos x\,dx\,,\ \alpha \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcja wymierna: $\frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie L, M - wielomiany,

Funkcja wymierna właściwa: $\deg L(x) < \deg M(x)$.

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcja wymierna: $\frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie L, M - wielomiany,

Funkcja wymierna właściwa: $\deg L(x) < \deg M(x)$.

Ułamki proste:

$\frac{A}{(x-a)^k}$ – I-go rodzaju, $A, a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ – II-go rodzaju, $A, B, p, q, r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p^2 - 4q < 0$

Twierdzenie

(1) Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki postaci $(x-a)^k$, $(x^2+px+q)^k$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$.

Twierdzenie

(1) Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki postaci $(x-a)^k$, $(x^2+px+q)^k$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$.

(2) Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Całkowanie funkcji wymiernych

Twierdzenie

(1) Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki postaci $(x-a)^k$, $(x^2+px+q)^k$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$.

(2) Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

(3) Każdą funkcję wymierną właściwą $\frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie

$$M(x) = (x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_m)^{k_m} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_m, p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$, $p_i^2 - 4q_i < 0$,
$i = 1, \ldots, s$, $k_1, \ldots k_m, l_1, \ldots l_s \in \mathbb{N}$
można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych:

Twierdzenie c.d.

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k_j}\frac{A_{ij}}{(x-a_j)^i}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{l_j}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i}\right)$$

gdzie A_{ij} , B_{ij} , $C_{ij} \in \mathbb{R}$ są wyznaczone jednoznacznie.

Twierdzenie c.d.

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-a_j)^i} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{l_j} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i} \right)$$

gdzie A_{ij} , B_{ij} , $C_{ij} \in \mathbb{R}$ są wyznaczone jednoznacznie.

Przykłady:

(1)
$$\frac{2x+3}{x^3(x-1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}$$

Twierdzenie c.d.

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k_j}\frac{A_{ij}}{(x-a_j)^i}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{l_j}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i}\right)$$

gdzie A_{ij} , B_{ij} , $C_{ij} \in \mathbb{R}$ są wyznaczone jednoznacznie.

Przykłady:

(1)
$$\frac{2x+3}{x^3(x-1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}$$

(2)
$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

bo:

$$2x^2 + 2x + 13 = (A+B)x^4 + (-2B+C)x^3 +$$
$$+ (2A+B-2C+D)x^2 + (-2B+C-2D+E)x + (A-2C-2E)$$

porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach x i rozwiązujemy odpowiedni układ równań liniowych.

Całkowanie ułamków prostych

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} A \cdot \ln|x-a| + C, & k = 1 \\ \frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1} + C, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

Całkowanie ułamków prostych

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} A\cdot\ln|x-a|+C, & k=1\\ \frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1}+C, & k\geqslant 2\end{cases}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \left\|\begin{array}{c} t=x^2+px+q\\ dt=(2x+p)\,dx\end{array}\right\| = \int \frac{dt}{t^k} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^k} = \left\|\begin{array}{c} t=\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\\ dx=\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}\,dt\end{array}\right\| =$$

$$= \left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

I stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\,,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$$

Powyższy wzór rekurencyjny otrzymujemy całkując przez części:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{x}{(1+x^2)^n} \\ f' = 1 & g = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \left[\frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Powyższy wzór rekurencyjny otrzymujemy całkując przez części:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{x}{(1+x^2)^n} \\ f' = 1 & g = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \left[\frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Przykłady:

(1) $$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \end{array} \right\| =$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 2\operatorname{arctg} x - \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = (\star)$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny lub obliczamy ją bezpośrednio:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ f' = 1 & g = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right\| =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \left[\frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny lub obliczamy ją bezpośrednio:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ f' = 1 & g = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right\| =$$
$$= \operatorname{arctg} x - \left[\frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

$$(\star) =$$
$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 2\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - 2\operatorname{arctg} x - \frac{2x}{1+x^2} + C =$$
$$= \ln\left|\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}\right| - 4\operatorname{arctg} x - \frac{4x+3}{2(x^2+1)} + C$$

$$(2)\ \int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = x^2+x+1 \\ dt = (2x+1)\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C =$$
$$= -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} = \left\| \begin{array}{c} t = x+\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} =$$
$$= \int \frac{dt}{\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)\right]^2} = \frac{16}{9}\int \frac{dt}{\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2\right]^2} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{2}{\sqrt{3}}t \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dt \end{array} \right\| =$$
$$= \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \|\ \text{wz. rek. } n=2\ \| =$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}\right] = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{u}{1+u^2} + \operatorname{arctg} u\right) + C =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Stąd

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Stąd

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(3) $\int \frac{(1+x)}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Stąd:

$$A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 = x+1$$

Najpierw podstawiamy $x = 1: \;\; 2B = 2 \Rightarrow B = 1$ i podstawiamy B do powyższego równania:

$$A(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2 = x+1-x^2-1 = -x(x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(x^2+1) + (Cx+D)(x-1) = -x$$

Ponownie podstawiamy $x = 1: \;\; 2A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

Stąd:

$$(Cx+D)(x-1) = -x + \tfrac{1}{2}(x^2+1) = \tfrac{1}{2}(x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Cx + D = \tfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow C = \tfrac{1}{2}\,, \quad D = -\tfrac{1}{2}$$

$$\int \tfrac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{x-1} + \int \tfrac{dx}{(x-1)^2} + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{x-1} + \tfrac{1}{4}\int \tfrac{2x}{x^2+1}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{1+x^2} =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{x-1} + \tfrac{1}{4}\ln|x^2+1| - \tfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C$$

Całkując funkcje trygonometryczne korzystamy z wzorów trygonometrycznych oraz z podstawień standardowych:

Całkując funkcje trygonometryczne korzystamy z wzorów trygonometrycznych oraz z podstawień standardowych:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkując funkcje trygonometryczne korzystamy z wzorów trygonometrycznych oraz z podstawień standardowych:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Niech R będzie funkcją wymierną. Wtedy

$$\int R(\mathrm{tg}\, x)\,dx = \left\|\begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\, x \\ x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\| = \int \frac{R(t)}{1+t^2}\,dt$$

Całkując funkcje trygonometryczne korzystamy z wzorów trygonometrycznych oraz z podstawień standardowych:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Niech R będzie funkcją wymierną. Wtedy

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{R(t)}{1+t^2}\,dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx =$$
$$\left\| \begin{array}{ccc} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x = 2\operatorname{arctg} t & dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & \end{array} \right\| = \int \frac{2R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})}{1+t^2}\,dt$$

Przykłady całkowania funkcji trygonometrycznych

$$(1)\ \int \frac{dx}{5+4\cos x} = \left\| \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ \right\| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$\frac{2}{9}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{3})^2} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{t}{3} \\ du = \frac{1}{3}\,dt \end{array} \right\| = \frac{2}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} u + C =$$

$$\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

Przykłady całkowania funkcji trygonometrycznych

(1) $\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \left\| \ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \ \right\| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$
$\frac{2}{9}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{3})^2} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{t}{3} \\ du = \frac{1}{3}\,dt \end{array} \right\| = \frac{2}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} u + C =$
$\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

(2) $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx =$
$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx =$
$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx =$
$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

(3) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 \, dx =$

$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx =$

$= \left\| \begin{array}{c} y = \sin 2x \\ dy = 2\cos 2x \, dx \end{array} \right\| = \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx - \frac{1}{16} \int y^2 \, dy =$

$= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, dx - \frac{1}{16} \int y^2 \, dy =$

$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$

Przykłady całkowania funkcji trygonometrycznych

$$
\begin{aligned}
(3)\ &\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 \, dx = \\
&= \int \tfrac{1-\cos 2x}{2} \cdot \tfrac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \tfrac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \tfrac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \\
&= \left\| \begin{array}{c} y = \sin 2x \\ dy = 2 \cos 2x \, dx \end{array} \right\| = \tfrac{1}{8} \int \tfrac{1-\cos 4x}{2} \, dx - \tfrac{1}{16} \int y^2 \, dy = \\
&= \tfrac{1}{16} \int dx - \tfrac{1}{16} \int \cos 4x \, dx - \tfrac{1}{16} \int y^2 \, dy = \\
&= \tfrac{1}{16} x - \tfrac{1}{64} \sin 4x - \tfrac{1}{48} \sin^3 2x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\ &\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x \, dx = \\
&= \left\| \begin{array}{c} y = \cos x \\ dy = -\sin x \, dx \end{array} \right\| = -\int (1 - y^2) y^5 \, dy = -\tfrac{y^6}{6} + \tfrac{y^8}{8} + C = \\
&= -\tfrac{1}{6} \cos^6 x + \tfrac{1}{8} \cos^8 x + C
\end{aligned}
$$

Przykłady całkowania funkcji trygonometrycznych

$$(5)\ \int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \left\| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$$

$$(7)\ \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \operatorname{arctg} t + C = e^x - \operatorname{arctg} e^x + C$$

$$(7)\ \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \operatorname{arctg} t + C = e^x - \operatorname{arctg} e^x + C$$

$$(8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = \left\| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} =$$

$$= \left\| \ u = t + \sqrt{t^2+2}\ \right\| = \ln\left|t + \sqrt{t^2+2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$$

$$(7)\ \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \operatorname{arctg} t + C = e^x - \operatorname{arctg} e^x + C$$

$$(8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = \left\| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} =$$

$$= \left\| \ u = t + \sqrt{t^2+2} \ \right\| = \ln\left|t + \sqrt{t^2+2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$$

$$(9)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \left\| \ t = x-1 \ \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C =$$

$$= \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

Wzór Ostrogradskiego

Stosujemy go do obliczania całek postaci:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

gdzie $W_n(x)$ - wielomian, $\deg W_n = n$:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = W_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

gdzie $\deg W_{n-1} = n-1$ i szukamy współczynników wielomianu $W_{n-1}(x)$ oraz stałej K.

Wzór Ostrogradskiego

Powyższy wzór Ostrogradskiego najpierw różniczkujemy obustronnie, następnie mnożymy przez pierwiastek z trójmianu kwadratowego i przyrównujemy dwa wielomiany otrzymując układ równań liniowych ze wzgędu na szukane współczynniki.

Wzór Ostrogradskiego

Powyższy wzór Ostrogradskiego najpierw różniczkujemy obustronnie, następnie mnożymy przez pierwiastek z trójmianu kwadratowego i przyrównujemy dwa wielomiany otrzymując układ równań liniowych ze wzgędu na szukane współczynniki.

Przykłady:

$$(1)\ \int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\,dx =$$
$$= (Ax+B)\cdot\sqrt{4x^2-4x+3} + K\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

$$\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}} = A\cdot\sqrt{4x^2-4x+3} + (Ax+B)\cdot\frac{4x-2}{\sqrt{4x^2-4x+3}} + \frac{K}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

$$4x^2-4x+3 = A(4x^2-4x+3)+(Ax+B)(4x-2)+K \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=\tfrac{1}{2},\ B=-\tfrac{1}{4},\ K=1$$

Pozostaje obliczyć całkę korzystając z podstawienia Eulera:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}} = \left\| \begin{array}{c} t = 2x-1 \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} =$$
$$= \left\| \ u = t + \sqrt{t^2+2} \ \right\| = \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right| + C$$

Stąd

$$\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx =$$
$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3} + \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right| + C$$

Wzór Ostrogradskiego

Pozostaje obliczyć całkę korzystając z podstawienia Eulera:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}} = \left\| \begin{array}{c} t = 2x-1 \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} =$$
$$= \left\| \; u = t + \sqrt{t^2+2} \; \right\| = \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right| + C$$

Stąd

$$\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx =$$
$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3} + \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right| + C$$

(2) $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+k} + C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$

$$\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} = A\sqrt{x^2+k} + (Ax+B)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+k}} + \frac{C}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$x^2+k = A(x^2+k) + (Ax+B)x + C \Rightarrow A = \frac{1}{2}\,,\ B = 0\,,\ C = \frac{k}{2}$$

Stąd:

- $\int \sqrt{x^2+k}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} =$
$\Big\|\ t = x + \sqrt{x^2+k}\ \Big\| = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$

(3)

$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = (Ax+B)\sqrt{a^2-x^2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = A\sqrt{a^2-x^2} + (Ax+B)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{K}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$a^2-x^2 = A(a^2-x^2)-(Ax+B)x+K \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B=0,\ K=\frac{1}{2}a^2$

Stąd:

- $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(1)

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = t^4 \\ dx = 4t^3\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} \cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 4\int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int dt + 2\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 4\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 4t + 2\ln|t^2+1| - 4\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| - 4\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{x} + C$$

Inne podstawienia

(1)

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = t^4 \\ dx = 4t^3\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int dt + 2\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 4\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 4t + 2\ln|t^2+1| - 4\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| - 4\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{x} + C$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t^2 = \frac{1+x}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{array} \right\| =$$

$$= \int (t^2-1)^2\cdot t\cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt = -2\int t^2\,dt = -\frac{2}{3}t^3 + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + C$$

Inne podstawienia

$$(3)\ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{array}{c} x-1=\frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}} =$$

$$= -\int \frac{|t|}{t\sqrt{-1-2t}}\,dt = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = \left\| \begin{array}{c} u=-2t-1 \\ du = -2\,dt \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\sqrt{u} + C = -\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} + C$$