

Analiza

Całka nieoznaczona

Wojciech Domitrz

(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

2026

Funkcja pierwotna: definicja

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zawierającym więcej niż jeden punkt, a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja

Funkcję $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f na I , jeżeli jest różniczkowalna i

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

Jeżeli przedział zawiera swój lewy lub prawy koniec, w tym punkcie przyjmujemy odpowiednio pochodną prawostronną lub lewostronną.

Znalezienie funkcji pierwotnej jest zatem zadaniem odwrotnym do różniczkowania: szukamy funkcji, której pochodną jest podana funkcja f .

Funkcja pierwotna: pierwsze przykłady

1. Funkcja $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R}$. Mamy

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^2 + 1)' = 2x.$$

Obie funkcje, $F_1(x) = x^2$ i $F_2(x) = x^2 + 1$, są więc funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji.

2. Funkcja $f(x) = 2^x$ na $\mathbb{R}$. Ponieważ

$$(2^x)' = 2^x \ln 2,$$

trzeba podzielić 2^x przez $\ln 2$:

$$\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' = 2^x, \quad \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{3}\right)' = 2^x.$$

Dodanie stałej nie zmienia pochodnej. Później wykazemy, że na przedziale jest to jedyna możliwa różnica między funkcjami pierwotnymi.

Przykłady: funkcje stałe i tangens

1. $f(x) = 0$ na $\mathbb{R}$. Przykładowe funkcje pierwotne to 0, 1 i $\pi^3 e^{-1}$.

Ogólnie

$$F(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = 0.$$

2. $f(x) = 2$ na $\mathbb{R}$. Funkcje $2x$ oraz $2x + \pi^2$ mają pochodną równą 2.

Wszystkie funkcje pierwotne mają postać

$$F(x) = 2x + C, \quad (2x + C)' = 2.$$

3. $f(x) = 1/\cos^2 x$ na $(-\pi/2, \pi/2)$. Korzystamy z pochodnej tangensa:

$$F(x) = \operatorname{tg} x + C, \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analogiczny wzór obowiązuje na każdym przedziale między kolejnymi miejscami zerowymi cosinusa.

Funkcja pierwotna na końcu przedziału

Rozważmy $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ na $[0, +\infty)$. Kandydatem na funkcję pierwotną jest

$$F(x) = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} = \frac{2}{5} x^{5/2}.$$

Dla $x > 0$ stosujemy zwykły wzór na pochodną potęgi:

$$F'(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} x^{3/2} = f(x).$$

W punkcie 0 obliczamy pochodną prawostronną z definicji:

$$F'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2}{5} h^{3/2} = 0 = f(0).$$

Zatem F jest funkcją pierwotną f na całym $[0, +\infty)$, również w przyjętym sensie na końcu przedziału.

Kiedy istnieje funkcja pierwotna?

Twierdzenie

Jeżeli $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale I , to ma na nim funkcję pierwotną.

Ciągłość jest warunkiem wystarczającym, ale nie jest konieczna.
Rozważmy

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wykażemy, że $F' = f$ na $\mathbb{R}$, mimo że f nie jest ciągła w 0.

Samo istnienie funkcji pierwotnej nie pozwala więc wnioskować o ciągłości funkcji podcałkowej.

Pochodna może być nieciągła

Dla $x \neq 0$ reguły iloczynu i łańcuchowa dają

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \cos(1/x) + x^2[-\sin(1/x)] \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \cos(1/x) + \sin(1/x) = f(x). \end{aligned}$$

W punkcie 0:

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos(1/h) = 0,$$

ponieważ $|h \cos(1/h)| \leq |h|$. Zatem $F' = f$ na całej osi.

Nieciągłość f w 0 widać, wybierając

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2\pi n}.$$

Oba ciągi dążą do 0, lecz $f(x_n) = 1$ i $f(y_n) = -1$. Granica $f(x)$ w 0 nie istnieje.

Twierdzenie o wszystkich funkcjach pierwotnych

Twierdzenie

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I , to:

- 1 każda funkcja $F + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną f ;
- 2 każda funkcja pierwotna G funkcji f na I ma postać $G = F + C$ dla pewnej stałej C .

Dowód pierwszej części. Różniczkując, otrzymujemy

$$(F + C)' = F' = f.$$

Idea drugiej części. Różnica dwóch funkcji pierwotnych ma pochodną równą zero. Na przedziale funkcja o zerowej pochodnej musi być stała; uzasadnia to twierdzenie Lagrange'a.

Dlaczego różnica jest stała?

Niech $H = G - F$. Dla każdego punktu wewnętrznego przedziału I :

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Funkcja H jest ciągła na $[x_1, x_2]$ i różniczkowalna na (x_1, x_2) , więc dla pewnego $c \in (x_1, x_2)$

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0.$$

Zatem $H(x_2) = H(x_1)$, czyli $H = C$ na I i $G = F + C$.

Dlaczego zakładamy, że I jest przedziałem?

Na rozłącznych przedziałach stałe mogą być różne. Dla $f(x) = 1/x$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pełna rodzina ma postać

$$F(x) = \begin{cases} \ln |x| + C_-, & x < 0, \\ \ln x + C_+, & x > 0, \end{cases}$$

gdzie C_- i C_+ wybieramy niezależnie.

Definicja

Całka nieoznaczona funkcji f na przedziale I to zbiór wszystkich jej funkcji pierwotnych na I . Oznaczamy ją symbolem $\int f(x) \, dx$.

Jeżeli znamy jedną funkcję pierwotną F , zapisujemy zwyczajowo

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Jest to skrót oznaczający całą rodzinę $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$, a nie pojedynczą funkcję o ustalonej wartości C .

W obliczeniach wszystkie stałe pośrednie łączymy na końcu w jedną dowolną stałą. Wynik sprawdzamy przez różniczkowanie na rozpatrywanym przedziale.

Wzory podstawowe: potęgi i wykładniki

$$\int 0 \, dx = C, \quad \int 1 \, dx = x + C.$$

Dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i $x > 0$:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Ograniczenie $x > 0$ zapewnia rzeczywisty sens dowolnej potęgi. Dla szczególnych wykładników wzór działa również na innych przedziałach swojej dziedziny.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad \text{na } (-\infty, 0) \text{ lub } (0, +\infty).$$

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, na całej osi rzeczywistej:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Przypadek $a = 1$ jest już objęty wzorem na całkę z 1.

Wzory podstawowe: funkcje trygonometryczne

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Dwa ostatnie wzory obowiązują dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi).$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Tutaj $k \in \mathbb{Z}$. Na każdym z tych przedziałów stała całkowania jest niezależna od stałych na pozostałych przedziałach.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcje hiperboliczne definiujemy wzorami

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ponieważ $(\sinh x)' = \cosh x$ i $(\cosh x)' = \sinh x$, otrzymujemy na $\mathbb{R}$:

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$$

Tangens i cotangens hiperboliczny

Tangens hiperboliczny jest określony na całej osi:

$$\operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Stąd

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cotangens hiperboliczny wymaga $x \neq 0$:

$$\operatorname{cth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$.

Założmy, że $F' = f$ oraz $G' = g$ na tym samym przedziale I . Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(aF + bG)' = af + bg,$$

a więc

Liniowość

$$\int [af(x) + bg(x)] dx = aF(x) + bG(x) + C.$$

W szczególności całkujemy sumę składnik po składniku i możemy wyłączać stały współczynnik przed całkę.

Zapis $a \int f(x) dx$ interpretujemy z uwzględnieniem dowolnej stałej na końcu wyniku. Gdy $a = 0$, nadal otrzymujemy rodzinę funkcji stałych C , a nie tylko funkcję zerową.

Całka z ilorazu pochodnej i funkcji

Niech f będzie różniczkowalna na przedziale otwartym I i niech $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in I$. Wtedy

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wzór

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Wartość bezwzględna pozwala stosować ten sam zapis, gdy f jest dodatnia albo ujemna. Różniczkowalność zapewnia ciągłość; niezerowa funkcja ciągła na przedziale nie zmienia znaku.

Jeżeli f ma miejsca zerowe, wzór stosujemy osobno na przedziałach, na których f nie znika.

1. Dla $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int (2x^2 - 3)\sqrt{x} \, dx &= 2 \int x^{5/2} \, dx - 3 \int x^{1/2} \, dx \\ &= 2 \frac{x^{7/2}}{7/2} - 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{4}{7} x^3 \sqrt{x} - 2x \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

Na końcu $x = 0$ otrzymana funkcja ma pochodną prawostronną równą 0.

2. Na przedziale niezawierającym $-4/5$:

$$\int \frac{dx}{5x + 4} = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5x + 4} \, dx = \frac{1}{5} \ln |5x + 4| + C.$$

Czynnik $1/5$ kompensuje pochodną mianownika, równą 5.

Całki z tangensa i cotangensa

Dla tangensa wykorzystujemy $(\cos x)' = -\sin x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

Wzór obowiązuje na każdym przedziale, na którym $\cos x \neq 0$.

Dla cotangensa korzystamy z $(\sin x)' = \cos x$:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

Tutaj wybieramy przedział, na którym $\sin x \neq 0$.

Całkowanie przez części

Dla $k \geq 1$ zapis $C^k(I)$ oznacza funkcje mające na I ciągłe pochodne do rzędu k włącznie. W szczególności $f \in C^1(I)$ oznacza, że f jest różniczkowalna i f' jest ciągła.

Twierdzenie

Jeśli $f, g \in C^1(I)$, to

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx.$$

Dowód. Wybierzmy funkcję pierwotną H ciągłej funkcji $f'g$. Reguła Leibniza daje

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg'.$$

Stąd pełna rodzina funkcji pierwotnych to $fg - H + C$, co uzasadnia podany wzór.

W praktyce dobieramy f tak, aby jej pochodna upraszczała rachunek, a g' tak, aby łatwo znaleźć g .

Przez części: logarytm i iloczyn z sinusem

1. $\int \ln x \, dx$, $x > 0$. Wybieramy

$$f = \ln x, \quad f' = \frac{1}{x}, \quad g' = 1, \quad g = x.$$

Wówczas

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

2. $\int x \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$. Przyjmujemy

$$f = x, \quad f' = 1, \quad g' = \sin x, \quad g = -\cos x.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Przez części: logarytm podzielony przez potęgę

Obliczamy $\int (\ln x)/x^3 \, dx$ dla $x > 0$. Wybór

$$f = \ln x, \quad g' = x^{-3}$$

daje

$$f' = \frac{1}{x}, \quad g = -\frac{1}{2x^2}.$$

Po zastosowaniu wzoru przez części:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} \, dx \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \end{aligned}$$

Logarytm zniknął z pozostałej całki, ponieważ różniczkowaliśmy właśnie czynnik $\ln x$.

Przez części: iloczyn z arcus tangensem

Dla $x \in \mathbb{R}$ wybieramy

$$f = \operatorname{arctg} x, \quad f' = \frac{1}{1+x^2}, \quad g' = x, \quad g = \frac{x^2}{2}.$$

Korzystamy też z rozkładu $x^2/(1+x^2) = 1 - 1/(1+x^2)$:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \\ &= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Wielokrotne całkowanie przez części

Dla $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ całki

$$\int x^n e^x dx, \quad \int x^n \sin x dx, \quad \int x^n \cos x dx$$

obliczamy, różniczkując czynnik wielomianowy. Po n zastosowaniach wzoru przez części pozostaje całka podstawowa. Dla $n = 0$ od razu korzystamy z tabeli wzorów.

Inny mechanizm występuje w całce $I = \int e^{-x} \cos x dx$. Najpierw wybieramy $f = e^{-x}$, $g' = \cos x$:

$$I = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx.$$

W drugiej całce ponownie różniczkujemy e^{-x} , a całkujemy sinus:

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx.$$

Gdy po dwóch krokach wraca ta sama całka

Po połączeniu poprzednich zależności otrzymujemy, z dokładnością do stałej,

$$I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I.$$

Przenosimy drugie I na lewą stronę i uwzględniamy stałą:

$$2I = e^{-x}(\sin x - \cos x) + C_1.$$

Po podzieleniu przez 2 stała $C_1/2$ nadal jest dowolna:

Wynik

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Sprawdzenie:

$$\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) \right]' = \frac{e^{-x}}{2}[-\sin x + \cos x + \cos x + \sin x] = e^{-x} \cos x.$$

Twierdzenie

Niech I, J będą przedziałami otwartymi, $h : I \rightarrow J$ funkcją różniczkowalną, a G funkcją pierwotną g na J . Wtedy

$$\int g(h(x))h'(x) \, dx = G(h(x)) + C.$$

Dowód. Z reguły różniczkowania złożenia:

$$[G(h(x))]' = G'(h(x))h'(x) = g(h(x))h'(x).$$

W rachunku zapisujemy $t = h(x)$ i $dt = h'(x) \, dx$. Jest to wygodny zapis reguły łańcuchowej. W tej wersji twierdzenia h nie musi być różnowartościowa.

Gdy zamiast tego wprowadzamy $x = \varphi(t)$ i później odwracamy podstawienie, wybieramy przedział, na którym φ ma odpowiednią funkcję odwrotną. Końce przedziałów sprawdzamy osobno.

1. Dla $-1 < x < 1$ przyjmujemy $t = x^2$, $dt = 2x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin t + C = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C.\end{aligned}$$

Podstawienie działa również w $x = 0$ przez regułę łańcuchową; nie dzielimy przez x .

2. Jeśli $1 + 2 \cos x > 0$, kładziemy $t = 1 + 2 \cos x$:

$$dt = -2 \sin x \, dx,$$

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2} \int t^{-1/2} \, dt = -\sqrt{1+2\cos x} + C.$$

Dziedzinę tworzą przedziały $(-2\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Dla $x \in \mathbb{R}$ podstawiamy $t = x^2 + 1$, $dt = 2x \, dx$:

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int t^{-2} \, dt = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$$

4. Dla $x > e^{-1}$ przyjmujemy $t = 1 + \ln x$, $dt = dx/x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \, dx &= \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Funkcja podcałkowa jest określona także w $x = e^{-1}$. Wynik przedłuża się na $[e^{-1}, +\infty)$, a jego pochodna prawostronna w e^{-1} wynosi 0.

Podstawienie usuwające pierwiastek z wykładnika

Obliczamy $\int dx/\sqrt{e^x + 1}$ na $\mathbb{R}$. Przyjmujemy

$$t = \sqrt{e^x + 1} > 1, \quad e^x = t^2 - 1, \quad e^x dx = 2t dt, \quad dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} &= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= \ln(t - 1) - \ln(t + 1) + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C. \end{aligned}$$

Ponieważ $t > 1$, oba argumenty logarytmów są dodatnie; wartości bezwzględne nie są tutaj potrzebne.

Całka z arcus cosinusa

Dla $-1 < x < 1$ przyjmujemy $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$, więc $t = \arccos x$ i $dx = -\sin t \, dt$. Następnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int \arccos x \, dx &= - \int t \sin t \, dt \\ &= t \cos t - \int \cos t \, dt \\ &= t \cos t - \sin t + C \\ &= x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C.\end{aligned}$$

Wybieramy dodatni pierwiastek, bo $\sin t > 0$ dla $t \in (0, \pi)$. Na domkniętym $[0, \pi]$ zachodzi $\sin t \geq 0$.

Wynik przedłuża się na $[-1, 1]$. Jego pochodne jednostronne na końcach wynoszą odpowiednio π i 0 , zgodnie z wartościami $\arccos(-1)$ i $\arccos 1$.

Pierwiastek z różnicy kwadratów

Obliczamy $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$. Dla $-3 < x < 3$ wybieramy

$$x = 3 \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \quad t = \arcsin \frac{x}{3}, \quad dx = 3 \cos t \, dt.$$

Na tym przedziale $\cos t > 0$, toteż

$$\sqrt{9 - 9 \sin^2 t} = 3|\cos t| = 3 \cos t.$$

Korzystając ze wzoru $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$, dostajemy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} \, dx &= 9 \int \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin 2t + C = \frac{9}{2} t + \frac{9}{2} \sin t \cos t + C. \end{aligned}$$

Powrót do zmiennej w całce z pierwiastka

Z zależności $x = 3 \sin t$ oraz z wybranej gałęzi cosinusa mamy

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} \, dx &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

Wynik jest ciągły na $[-3, 3]$ i ma na końcach pochodne jednostronne równe 0, więc jest funkcją pierwotną również na tym domkniętym przedziale.

Dobór zakresu t był istotny: bez niego należałoby zachować $|\cos t|$ i osobno ustalać znak.

Podstawienie Eulera w całce podstawowej

Niech $k \neq 0$. Pracujemy na przedziale, na którym $x^2 + k > 0$, i przyjmujemy

$$t = x + \sqrt{x^2 + k}.$$

Wtedy $t \neq 0$: równość $\sqrt{x^2 + k} = -x$ po podniesieniu do kwadratu wymuszałyby $k = 0$. Ponadto

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}\right) dx = \frac{x + \sqrt{x^2 + k}}{\sqrt{x^2 + k}} dx,$$

a więc $dt/t = dx/\sqrt{x^2 + k}$. Otrzymujemy

Wynik dla $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$$

Dla $k > 0$ dziedziną jest $\mathbb{R}$; dla $k < 0$ rozpatrujemy osobno $x < -\sqrt{-k}$ oraz $x > \sqrt{-k}$.

Zerowy parametr: osobny przypadek

Jeżeli $k = 0$, to $\sqrt{x^2} = |x|$ i całka przyjmuje postać

$$\int \frac{dx}{|x|}.$$

Dla $x > 0$ mamy $1/|x| = 1/x$, zatem

$$\int \frac{dx}{|x|} = \ln x + C_+.$$

Dla $x < 0$ zachodzi $1/|x| = -1/x$, więc

$$\int \frac{dx}{|x|} = -\ln(-x) + C_-.$$

Na ujemnej półosi wyrażenie $x + \sqrt{x^2}$ jest zerem. Nie wolno więc wstawiać $k = 0$ do poprzedniego wzoru logarytmicznego bez osobnego sprawdzenia dziedziny.

Skalowanie: arcus tangens i arcus sinus

Przyjmijmy $a > 0$. W pierwszej całce stosujemy $t = x/a$, $dx = a dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (x/a)^2} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

W drugiej całce dodatkowo zakładamy $|x| < a$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

Warunek $a > 0$ uzasadnia użycie $\sqrt{a^2} = a$.

Funkcja wymierna zmiennej wykładniczej

Jeśli R jest funkcją wymierną, to podstawienie

$$t = e^x > 0, \quad dt = e^x dx = t dx, \quad dx = \frac{dt}{t}$$

prowadzi do wzoru

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt.$$

Nowa funkcja podcałkowa jest wymierna względem t . Można zatem użyć dzielenia wielomianów i rozkładu na ułamki proste.

Pracujemy na przedziale, na którym mianownik $R(e^x)$ nie znika. Po obliczeniu całki wracamy do $t = e^x$. Warunek $t > 0$ pomaga również ustalić znaki argumentów logarytmów.

Dla dowolnych $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos((\alpha - \beta)x) - \cos((\alpha + \beta)x)],$$

$$\cos(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos((\alpha - \beta)x) + \cos((\alpha + \beta)x)],$$

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin((\alpha + \beta)x) + \sin((\alpha - \beta)x)].$$

Wzory wynikają z tożsamości dla sinusa i cosinusa sumy oraz różnicy. Pozwalają zastąpić iloczyn sumą funkcji łatwych do scałkowania.

Jeśli $\alpha = \beta$ lub $\alpha = -\beta$, jeden z argumentów jest zerowy. Wtedy korzystamy bezpośrednio z $\sin 0 = 0$ lub $\cos 0 = 1$, bez dzielenia przez zerową częstość.

Dopełnienie kwadratu pod pierwiastkiem

Rozważmy $\int dx/\sqrt{3x^2 - 2x - 1}$. Ponieważ

$$3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1),$$

pracujemy osobno na $(-\infty, -1/3)$ i $(1, +\infty)$. Dopełniamy kwadrat:

$$3x^2 - 2x - 1 = 3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right].$$

Podstawienie $t = x - 1/3$, $dt = dx$, daje

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4/9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 4/9} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x - \frac{1}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

W drugim kroku użyliśmy podstawienia Eulera $u = t + \sqrt{t^2 - 4/9}$.

Trójmian bez rzeczywistych miejsc zerowych

Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Najpierw przesuwamy zmienną, $t = x + 1/2$, a następnie ją skalujemy:

$$u = \frac{2t}{\sqrt{3}}, \quad dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dt}{t^2 + 3/4} = \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1 + (2t/\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Przesunięcie usuwa wyraz liniowy, a skalowanie sprowadza mianownik do $1 + u^2$.

Dwa przykłady trygonometryczne

1. Dla $t = \sin^2 x$ mamy $dt = 2 \sin x \cos x \, dx = \sin 2x \, dx$. Stąd na $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} \, dx = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C.$$

2. Iloczyn zamieniamy na sumę:

$$\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}[\sin 8x + \sin(-2x)] = \frac{1}{2}[\sin 8x - \sin 2x].$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Ujemny współczynnik przy kwadracie zmiennej

Dziedziną $1/\sqrt{2+3x-2x^2}$ jest $(-1/2, 2)$. Mamy

$$2+3x-2x^2 = 2 \left[\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 \right].$$

Podstawiamy kolejno $t = x - 3/4$ oraz $u = 4t/5$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(5/4)^2 - t^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - (4t/5)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C. \end{aligned}$$

Warunek $-1 < u < 1$ jest dokładnie równoważny $-1/2 < x < 2$.

Przesunięcie w całce wymiernej

Obliczamy całkę na przedziale po jednej stronie punktu $x = -3$:

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{3x - 2}{(x + 3)^2} dx.$$

Przyjmujemy $t = x + 3$, więc $x = t - 3$ i $3x - 2 = 3t - 11$. Zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 2}{(x + 3)^2} dx &= \int \frac{3t - 11}{t^2} dt \\ &= 3 \int \frac{dt}{t} - 11 \int t^{-2} dt \\ &= 3 \ln |t| + \frac{11}{t} + C \\ &= 3 \ln |x + 3| + \frac{11}{x + 3} + C. \end{aligned}$$

Po podstawieniu trzeba przekształcić również licznik, nie tylko mianownik.

Liniowy licznik i pierwiastek z trójkątnika

Dla $-1 < x < 3$ mamy

$$9 + 6x - 3x^2 = 3[4 - (x - 1)^2] > 0.$$

Wprowadzamy $t = x - 1$, $dt = dx$. Wówczas $3x - 5 = 3t - 2$ i

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 5}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3t - 2}{\sqrt{4 - t^2}} dt \\ &= \sqrt{3} \int \frac{t dt}{\sqrt{4 - t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}. \end{aligned}$$

Pierwsza całka wymaga podstawienia $u = 4 - t^2$, $du = -2t dt$:

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{4 - t^2}} = -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = -\sqrt{4 - t^2} + C.$$

Liniowy licznik: połączenie wyników

W drugiej całce przyjmujemy $w = t/2$, $dt = 2 dw$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-(t/2)^2}} = \int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arcsin \frac{t}{2} + C.$$

Wracamy do $t = x - 1$ i łączymy stałe:

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}} dx = -\sqrt{3}\sqrt{4-(x-1)^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

Wynik obowiązuje na $(-1, 3)$. Rozdzielenie licznika na część proporcjonalną do pochodnej trójmianu i resztę jest użyteczne w wielu podobnych całkach.

Funkcja pierwotna a funkcja elementarna

Funkcje elementarne otrzymujemy za pomocą skończonej liczby działań algebraicznych i złożień z funkcji potęgowych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych oraz odpowiednich funkcji odwrotnych, na ustalonych gałęziach ich dziedzin.

Istnienie funkcji pierwotnej nie oznacza, że można ją wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Na przykład ciągła na całej osi funkcja e^{-x^2} ma funkcję pierwotną, lecz żadna z jej funkcji pierwotnych nie jest elementarna.

Niepowodzenie jednego podstawienia ani nawet wielu prób nie jest dowodem nieelementarności. Takie rozstrzygnięcia wymagają odrębnych twierdzeń, m.in. twierdzenia Liouville'a, wykraczających poza przedstawione techniki rachunkowe.

Wyniki można wtedy opisywać za pomocą funkcji specjalnych lub całek oznaczonych. Brak wzoru elementarnego nie oznacza braku rozwiązania.

Przykłady całek nieelementarnych

Na przedziałach, na których funkcje podcałkowe są rzeczywiste i ciągłe, do klasycznych przykładów należą

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^{\pm x}}{x} dx, \quad \int e^{\pm x^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \cos(x^2) dx, \quad \int e^{1/x} dx.$$

Dla $1/\ln x$ przyjmujemy $x > 0$, $x \neq 1$; dla $1/\sqrt{x^3 + 1}$ mamy $x > -1$. W pozostałych przykładach wykluczamy zera mianowników. Funkcję $\sin x/x$ można w 0 przedłużyć przez wartość 1.

Także rodziny $\int x^\alpha e^{\pm x} dx$, $\int x^\alpha \sin x dx$ i $\int x^\alpha \cos x dx$, rozpatrywane dla $x > 0$, są nieelementarne przy $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$. Dla nieujemnych wykładników całkowitych działa wielokrotne całkowanie przez części.

Całki eliptyczne: znaczenie parametru

Dla $0 < |k| < 1$ kolejne przykłady nieelementarne to

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx.$$

Są to całki eliptyczne odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Przy wskazanym zakresie parametru wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Warunek $k \neq 0$ jest istotny: gdy $k = 0$, obie funkcje podcałkowe są równe 1, więc obie całki mają postać $x + C$.

Również przy $|k| = 1$ następuje przypadek szczególny:

$\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$. Całkowanie wymaga wówczas ustalenia znaku cosinusa na poszczególnych przedziałach i prowadzi do funkcji elementarnych.

Funkcje wymierne i ułamki proste

Funkcja wymierna ma postać $L(x)/M(x)$, gdzie L, M są wielomianami rzeczywistymi, a M nie jest wielomianem zerowym. Jej dziedzinę wyznacza warunek $M(x) \neq 0$.

Jest **właściwa**, jeśli $\deg L < \deg M$; funkcję zerową traktujemy jako trywialny przypadek.

Ułamki proste

Pierwszego rodzaju:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1.$$

Drugiego rodzaju:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1,$$

przy czym k jest całkowite, a $p^2 - 4q < 0$.

Ostatni warunek oznacza, że czynnik kwadratowy nie ma rzeczywistych pierwiastków i jest dodatni na całej osi.

Rozkład mianownika i dzielenie wielomianów

Każdy niezerowy wielomian rzeczywisty można zapisać w postaci

$$M(x) = c \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{k_j} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}, \quad c \neq 0.$$

Tutaj k_j, l_j są dodatnimi liczbami całkowitymi, $p_j^2 - 4q_j < 0$, a różne czynniki liniowe i różne unormowane czynniki kwadratowe grupujemy osobno. Dla wielomianu stałego oba iloczyny mogą być puste.

Z dzielenia z resztą:

$$L = QM + S, \quad \deg S < \deg M \quad \text{lub} \quad S = 0,$$

wynika

$$\frac{L}{M} = Q + \frac{S}{M}.$$

Najpierw całkujemy wielomian Q , a pozostały ułamek właściwy rozkładamy na ułamki proste. Stały czynnik c można przenieść do licznika.

Twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste

Dla ułamka właściwego i mianownika rozłożonego jak poprzednio istnieją jednoznacznie wyznaczone współczynniki rzeczywiste, dla których

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x - a_j)^i} + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{l_j} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_jx + q_j)^i}.$$

Przy każdym czynniku uwzględniamy **wszystkie potęgi od 1 do jego krotności**. Licznik przy czynniku liniowym jest stały, a przy nierozkładalnym kwadratowym ma stopień najwyżej 1.

Współczynniki wyznaczamy po pomnożeniu przez wspólny mianownik. Otrzymujemy tożsamość wielomianową, którą można badać przez porównanie współczynników lub podstawianie dogodnych wartości x .

Jak zapisać postać rozkładu?

Dla przykładu

$$\begin{aligned} & \frac{2x + 3}{x^3(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x - 1} + \frac{B_2}{(x - 1)^2} \\ & \quad + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + x + 1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Czynnik x^3 daje trzy składniki, $(x - 1)^2$ dwa, a $(x^2 + x + 1)^2$ dwa składniki z licznikami liniowymi.

Nie pomijamy niższych potęg mianownika nawet wtedy, gdy w początkowym ułamku występuje tylko jego najwyższa potęga. Część współczynników może okazać się zerowa dopiero po rozwiązaniu układu.

Wyznaczanie współczynników rozkładu

Szukamy rozkładu dla $x \neq 2$:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Po pomnożeniu przez wspólny mianownik:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 2)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 2).$$

Rozwijamy prawą stronę i porównujemy współczynniki:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2B + C = 0, \\ 2A + B - 2C + D = 2, \\ -2B + C - 2D + E = 2, \\ A - 2C - 2E = 13. \end{cases}$$

Rozwiązanie układu dla ułamków prostych

Z pierwszych równań mamy $B = -A$ oraz $C = -2A$. Trzecie równanie daje $D = 2 - 5A$, a czwarte $E = 2 + 2D = 6 - 10A$.

Ostatnie równanie przyjmuje postać

$$A + 4A - 2(6 - 10A) = 13, \quad 25A = 25.$$

Zatem

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4.$$

Ostatecznie

Rozkład

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Po znalezieniu współczynników warto sprowadzić prawą stronę do wspólnego mianownika i odtworzyć początkowy licznik.

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

Dla $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} A \ln |x-a| + C, & k = 1, \\ \frac{A}{1-k} (x-a)^{1-k} + C, & k \geq 2. \end{cases}$$

Oba wzory otrzymujemy przez podstawienie $t = x - a$, $dt = dx$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int t^{-k} dt.$$

Przy $k = 1$ wykładnik wynosi -1 , dlatego pojawia się logarytm. Dla $k \geq 2$ stosujemy regułę potęgową.

Całkujemy osobno na $(-\infty, a)$ i $(a, +\infty)$. Punktu a nie wolno włączać do przedziału całkowania.

Ułamki drugiego rodzaju: rozdzielenie licznika

Niech $Q(x) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$. Wówczas $Q(x) > 0$ i

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right).$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{Q(x)^k} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{Q(x)^k} dx \\ &\quad + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{Q(x)^k}. \end{aligned}$$

W pierwszej całce $t = Q(x)$, $dt = (2x + p) dx$, więc

$$\int \frac{2x + p}{Q(x)^k} dx = \begin{cases} \ln Q(x) + C, & k = 1, \\ \frac{Q(x)^{1-k}}{1-k} + C, & k \geq 2. \end{cases}$$

Pozostała całka ma stały licznik i wymaga dopełnienia kwadratu.

Srowadzenie do całek rekurencyjnych

Oznaczmy $d = q - p^2/4 = (4q - p^2)/4 > 0$. Wówczas

$$Q(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + d.$$

Podstawiamy

$$t = \frac{x + p/2}{\sqrt{d}}, \quad dx = \sqrt{d} \, dt.$$

Dostajemy

$$\int \frac{dx}{Q(x)^k} = d^{1/2-k} \int \frac{dt}{(1+t^2)^k}.$$

Pozostaje obliczyć rodzinę $I_n(t) = \int (1+t^2)^{-n} dt$:

$$I_1(t) = \operatorname{arctg} t + C,$$

$$I_n(t) = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}(t), \quad n \geq 2.$$

Stałe pośrednie w tym zapisie łączymy w jedną stałą całkowania.

Wyrowadzenie wzoru rekurencyjnego

Dla całkowitego $n \geq 2$, z dokładnością do stałej:

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = I_{n-1} - J_n, \quad J_n = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

W J_n całkujemy przez części, wybierając

$$f = x, \quad g' = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad f' = 1, \quad g = -\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}.$$

Stąd

$$J_n = -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Po podstawieniu do $I_n = I_{n-1} - J_n$:

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Każdy krok zmniejsza wykładnik mianownika o 1, aż do I_1 .

Przypadek rekurencji dla kwadratu mianownika

Dla $n = 2$ wzór rekurencyjny daje

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Można też wykonać rachunek bezpośredni:

$$I_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

W drugiej całce wybieramy $f = x$, $g' = x/(1+x^2)^2$, zatem $g = -1/[2(1+x^2)]$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_2 &= \operatorname{arctg} x - \left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \right] \\ &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Ten szczególny przypadek wykorzystamy w kolejnych przykładach.

Całkowanie wyznaczonego rozkładu

Dla $x \neq 2$ korzystamy z wcześniej obliczonych współczynników:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &\quad - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx - 4I_2. \end{aligned}$$

W całkach z licznikiem $2x$ przyjmujemy $t = x^2 + 1$:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C, \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+1} + C.$$

Zebrańie składników całki wymiernej

Po podstawieniu wzoru na I_2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg}x \\ &\quad + \frac{3}{2(x^2+1)} - 4 \left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}x \right] + C \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 4\operatorname{arctg}x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Możemy połączyć logarytmy:

$$I = \ln \left| \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} \right| - 4\operatorname{arctg}x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C.$$

Stałą wybieramy osobno dla $x < 2$ i $x > 2$. W liczniku ostatniego składnika dodatnie 3 pochodzi z iloczynu $(-3/2) \cdot (-1)$.

Drugi przykład: kwadrat trójkianu

Niech $Q = x^2 + x + 1 > 0$. Licznik rozdzielamy względem $Q' = 2x + 1$:

$$3x + 2 = \frac{3}{2}(2x + 1) + \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\int \frac{3x + 2}{Q^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 1}{Q^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{Q^2}.$$

Pierwsza całka jest bezpośrednia: $t = Q$, $dt = (2x + 1) dx$ daje

$$\int \frac{2x + 1}{Q^2} dx = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{Q} + C.$$

Do drugiej stosujemy $t = x + 1/2$, a następnie $u = 2t/\sqrt{3}$. Wówczas

$$Q = t^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1 + u^2), \quad dx = dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du.$$

Drugi przykład: rekurencja i wynik

Mamy

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{Q^2} = \frac{16}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \left(\frac{u}{1+u^2} + \operatorname{arctg} u \right) + C \\ &= \frac{2x+1}{3Q} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Po połączeniu z pierwszą częścią:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{Q^2} dx &= -\frac{3}{2Q} + \frac{2x+1}{6Q} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{x-4}{3(x^2+x+1)} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Wynik obowiązuje dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Trzeci przykład: dobór dogodnych wartości

Dla $x \neq 1$ zapisujemy

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C_1x + D_1}{x^2+1}.$$

Po usunięciu mianowników otrzymujemy tożsamość wielomianową

$$A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (C_1x + D_1)(x-1)^2 = x+1.$$

Możemy teraz podstawić także $x = 1$: obie strony są wielomianami. Dostajemy $2B = 2$, czyli $B = 1$. Po jego wstawieniu:

$$A(x-1)(x^2+1) + (C_1x + D_1)(x-1)^2 = -x(x-1).$$

Skrócenie wspólnego czynnika daje nową tożsamość wielomianową:

$$A(x^2+1) + (C_1x + D_1)(x-1) = -x.$$

Ponownie podstawiamy $x = 1$: $2A = -1$, zatem $A = -1/2$.

Trzeci przykład: pozostałe współczynniki i całka

Po wstawieniu $A = -1/2$:

$$(C_1x + D_1)(x - 1) = -x + \frac{1}{2}(x^2 + 1) = \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Zatem $C_1x + D_1 = (x - 1)/2$, czyli $C_1 = 1/2$, $D_1 = -1/2$. Całkujemy:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Stała jest dowolna na każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$.

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Przy potęgach sinusa i cosinusa wykorzystujemy

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Jeśli jeden z wykładników w iloczynie $\sin^m x \cos^n x$ jest nieparzysty, często można odłączyć jeden czynnik $\sin x$ albo $\cos x$ i podstawić odpowiednio $t = \cos x$ albo $t = \sin x$.

Dla całki zależnej wymiennie od tangensa przyjmujemy

$$t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t + k\pi, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Na przedziale $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int \frac{R(t)}{1 + t^2} dt,$$

o ile dodatkowo nie zerują się mianowniki występujące w R .

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne

Przyjmujemy $t = \operatorname{tg}(x/2)$ na przedziale $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Wtedy

$$x = 2\operatorname{arctg}t + 2k\pi, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Ze wzorów na podwojony kąt:

$$\sin x = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Dla funkcji wymiernej R dwóch zmiennych otrzymujemy całkę wymierną:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Wykluczone przez podstawienie punkty $x = (2k+1)\pi$ nie muszą być osobliwościami początkowej funkcji.

Podstawienie połowy kąta: przykład

Obliczamy $\int dx/(5 + 4 \cos x)$. Mianownik jest zawsze dodatni, bo $5 + 4 \cos x \geq 1$. Na przedziale $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ podstawiamy $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} &= \int \frac{2/(1 + t^2)}{5 + 4(1 - t^2)/(1 + t^2)} dt \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{2}{9} \int \frac{dt}{1 + (t/3)^2}.\end{aligned}$$

Dla $u = t/3$ mamy $dt = 3 du$, zatem

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} u + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

Ten zapis jest lokalny: na granicach wybranego przedziału tangens połowy kąta nie jest określony.

Jak otrzymać funkcję pierwotną na całej osi?

Początkowa funkcja $1/(5 + 4 \cos x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$, więc ma globalną funkcję pierwotną. Lokalne wzory trzeba połączyć z odpowiednimi stałymi:

$$F(x) = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{2k\pi}{3} + C,$$
$$(2k - 1)\pi < x < (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W brakujących punktach przyjmujemy

$$F((2k + 1)\pi) = \frac{(2k + 1)\pi}{3} + C.$$

Istotnie, gdy x dochodzi do $(2k + 1)\pi$ z lewej, część z arcus tangensem dąży do $\pi/3$; z prawej dąży do $-\pi/3$, ale numer przedziału rośnie o 1.

Dodanie $2k\pi/3$ wyrównuje obie granice. Tak połączona funkcja ma również w tych punktach pochodną równą $1/(5 + 4 \cos x) = 1$.

Dwukrotnie stosujemy wzór redukujący kwadrat cosinusa:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx \\&= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\&= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Współczynniki $1/2$ oraz $1/4$ przy całkowaniu cosinusów wynikają z pochodnych ich argumentów. Wynik obowiązuje na całej osi rzeczywistej.

Iloczyn parzystych potęg

Najpierw wykorzystujemy $\sin x \cos x = \sin 2x/2$:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx.\end{aligned}$$

W pierwszej całce $\sin^2 2x = (1 - \cos 4x)/2$, a w drugiej przyjmujemy $y = \sin 2x$, $dy = 2 \cos 2x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx - \frac{1}{16} \int y^2 \, dy \\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

Iloczyn nieparzystych potęg

W całce $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$ odłączamy jeden czynnik $\sin x$, a pozostałe $\sin^2 x$ zastępujemy przez $1 - \cos^2 x$:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x \, dx.$$

Przyjmujemy $y = \cos x$, $dy = -\sin x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^5 x \, dx &= - \int (1 - y^2) y^5 \, dy \\ &= - \int y^5 \, dy + \int y^7 \, dy \\ &= -\frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + C \\ &= -\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{8} \cos^8 x + C. \end{aligned}$$

Rezultat jest poprawny na całej osi; nie wymaga globalnej odwracalności funkcji $\cos x$.

Czwarta potęga tangensa

Na przedziale $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ podstawiamy $t = \operatorname{tg} x$,
 $dx = dt/(1 + t^2)$. Dzielenie wielomianów daje

$$\frac{t^4}{1 + t^2} = t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \frac{t^4}{1 + t^2} \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.\end{aligned}$$

Na wybranym przedziale $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - k\pi$. Różnica $-k\pi$ jest stała, dlatego można ją włączyć do C . Nie używamy równości $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ poza podstawową gałęzią bez takiego uzasadnienia.

Dalszy przykład: funkcja wykładnicza

Dla $x \in \mathbb{R}$ przyjmujemy $t = e^x > 0$ i $dt = e^x dx$. Wtedy

$$e^{3x} dx = e^{2x}(e^x dx) = t^2 dt.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \\ &= t - \operatorname{arctg} t + C \\ &= e^x - \operatorname{arctg}(e^x) + C.\end{aligned}$$

Rozkład $t^2/(t^2 + 1) = 1 - 1/(t^2 + 1)$ sprowadza wynik do dwóch wzorów podstawowych.

Dwa trójkąty pod pierwiastkiem

1. Dla $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2.$$

Podstawiamy $t = x + 2$, a następnie używamy $u = t + \sqrt{t^2 + 2}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2}} \\ &= \ln \left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 6} \right) + C.\end{aligned}$$

Argument logarytmu jest dodatni, gdyż $\sqrt{t^2 + 2} > |t|$.

2. Dla $-1 < x < 3$: $-x^2 + 2x + 3 = 4 - (x - 1)^2$. Dla $t = x - 1$, a potem $u = t/2$, dostajemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin \frac{x - 1}{2} + C.$$

Wzór Ostrogradskiego: założenia i postać

Niech $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a W_n będzie wielomianem stopnia $n \geq 1$. Na przedziale, na którym $Q(x) > 0$, szukamy postaci

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{Q(x)}} dx = P_{n-1}(x)\sqrt{Q(x)} + K \int \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}.$$

Niewiadomymi są współczynniki wielomianu P_{n-1} stopnia $n - 1$ oraz stała K . Stałą całkowania dopisujemy po obliczeniu całki podstawowej.

Różniczkujemy i mnożymy przez $\sqrt{Q}$:

$$W_n = QP'_{n-1} + \frac{Q'}{2}P_{n-1} + K.$$

Jest to tożsamość wielomianowa. Dla $n = 0$ całka jest po prostu stałą wielokrotnością całki podstawowej; gdy $a = 0$, stosujemy metody dla wielomianu liniowego lub stałego.

Dlaczego metoda Ostrogradskiego działa?

Porównujemy współczynniki w tożsamości

$$W_n = QP' + \frac{Q'}{2}P + K.$$

Jeśli najwyższy wyraz P to $p_{n-1}x^{n-1}$, to współczynnik przy x^n po prawej stronie wynosi

$$a(n-1)p_{n-1} + ap_{n-1} = anp_{n-1}.$$

Ponieważ $a \neq 0$ i $n \geq 1$, można jednoznacznie wyznaczyć p_{n-1} .

Następnie porównujemy kolejne potęgi, od najwyższej do najniższej, wyznaczając pozostałe współczynniki P .

Po ich ustaleniu równanie dla wyrazu stałego wyznacza K . Otrzymujemy więc układ, który można rozwiązać kolejno. Następnie wystarczy obliczyć $\int dx/\sqrt{Q}$, korzystając z dopełnienia kwadratu i wcześniej poznanych podstawień.

Ostrogradski: dodatni trójkąt

Dla $Q = 4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2 > 0$ zapisujemy

$$\int \sqrt{Q} \, dx = \int \frac{Q}{\sqrt{Q}} \, dx = (Ax + B)\sqrt{Q} + K \int \frac{dx}{\sqrt{Q}}.$$

Po różniczkowaniu:

$$Q = AQ + (Ax + B)(4x - 2) + K.$$

Prawa strona jest równa

$$8Ax^2 + (-6A + 4B)x + (3A - 2B + K).$$

Porównujemy współczynniki z $4x^2 - 4x + 3$:

$$8A = 4, \quad -6A + 4B = -4, \quad 3A - 2B + K = 3.$$

Stąd $A = 1/2$, $B = -1/4$ oraz $K = 1$. Pozostaje całka podstawowa z $1/\sqrt{Q}$.

Ostrogradski: obliczenie pozostałej całki

Dla $t = 2x - 1$, $dx = dt/2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \right) + C.\end{aligned}$$

W drugim kroku użyliśmy podstawienia Eulera; argument logarytmu jest dodatni. Ostatecznie na całej osi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \, dx &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \right) + C.\end{aligned}$$

Całka z pierwiastka sumy kwadratów

Niech $k \neq 0$ i $x^2 + k > 0$. Przyjmujemy

$$\int \sqrt{x^2 + k} \, dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + k} + K \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}.$$

Różniczkowanie i pomnożenie przez pierwiastek daje

$$x^2 + k = A(x^2 + k) + (Ax + B)x + K = 2Ax^2 + Bx + Ak + K.$$

Zatem $A = 1/2$, $B = 0$, $K = k/2$. Stąd

$$\int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

Dla $k = 0$ całkujemy osobno $|x|$ i otrzymujemy na całej osi

$$\int |x| \, dx = \frac{1}{2} x|x| + C.$$

Nie pozostawiamy nieokreślonego wyrażenia $0 \cdot \ln 0$.

Całka z pierwiastka różnicy kwadratów

Zakładamy $a > 0$ i $|x| < a$. Szukamy postaci

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = (Ax + B)\sqrt{a^2 - x^2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Po różniczkowaniu i pomnożeniu przez pierwiastek:

$$a^2 - x^2 = A(a^2 - x^2) - (Ax + B)x + K = -2Ax^2 - Bx + Aa^2 + K.$$

Wynika stąd $A = 1/2$, $B = 0$, $K = a^2/2$, więc

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.}$$

Wzór przedłuża się na $[-a, a]$ z pochodnymi jednostronnymi równymi 0 na obu końcach. Dla $a = 3$ otrzymujemy wcześniejszy wynik uzyskany podstawieniem trygonometrycznym.

Pierwiastki różnych stopni

Dla $x > 0$ w całce

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$$

przyjmujemy $t = \sqrt[4]{x} > 0$, czyli $x = t^4$, $\sqrt{x} = t^2$, $dx = 4t^3 dt$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx &= 4 \int \frac{t^2 + t}{t^2 + 1} dt \\ &= 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt \\ &= 4t + 2\ln(t^2 + 1) - 4\operatorname{arctg} t + C \\ &= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C. \end{aligned}$$

Punkt $x = 0$ wyklucza mianownik początkowej funkcji. Wybranie $t \geq 0$ zapewnia, że $\sqrt[4]{t^4} = t$.

Podstawienie z pierwiastkiem ilorazu

Dziedziną $x^{-2}\sqrt{(1+x)/x}$ jest $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. We wnętrzach tych przedziałów przyjmujemy

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{x}} > 0, \quad t^2 = 1 + \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

Dla $x < -1$ mamy $0 < t < 1$, a dla $x > 0$ mamy $t > 1$. Zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2 - 1)^2 t \left(-\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} \right) dt \\ &= -2 \int t^2 dt = -\frac{2}{3} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Na $(-\infty, -1]$ wynik obejmuje także koniec -1 z pochodną lewostronną równą 0. Stałe na obu składowych dziedziny są niezależne.

Podstawienie odwrotności przesuniętej zmiennej

Rozważmy $\int dx/[(x-1)\sqrt{1-x^2}]$ na $(-1,1)$. Przyjmujemy

$$t = \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}, \quad x = 1 + \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Ponieważ

$$1-x^2 = -\frac{1+2t}{t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{-1-2t}}{|t|},$$

całka przyjmuje postać

$$-\int \frac{|t|}{t\sqrt{-1-2t}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}.$$

Ostatnia równość wynika z $t < 0$, czyli $|t|/t = -1$. Kontrola znaku jest konieczna; nie wolno zamieniać $\sqrt{t^2}$ na t dla ujemnych t .

Odwrótność zmiennej: wynik i sprawdzenie

Dla $u = -1 - 2t > 0$ mamy $du = -2 dt$, więc

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} &= -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = -\sqrt{u} + C \\ &= -\sqrt{-1 - \frac{2}{x-1}} + C = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.\end{aligned}$$

Na $(-1, 1)$ stosunek pod pierwiastkiem jest dodatni. Sprawdzamy wynik, oznaczając $v = (1+x)/(1-x)$:

$$v' = \frac{2}{(1-x)^2}, \quad (-\sqrt{v})' = -\frac{1}{(1-x)^2\sqrt{v}} = -\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Jest to dokładnie $1/[(x-1)\sqrt{1-x^2}]$.

Podstawienia Eulera: cel i pierwszy wariant

Rozważamy całki $\int R(x, \sqrt{Q(x)}) dx$, gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Pracujemy na przedziale, na którym $Q > 0$ i wszystkie mianowniki są niezerowe.

Jeśli $a > 0$, wybieramy znak $s \in \{-1, 1\}$ i podstawiamy

$$\sqrt{Q} = t + s\sqrt{a}x.$$

Po podniesieniu do kwadratu wyrazy ax^2 skracają się:

$$bx + c = t^2 + 2s\sqrt{a}tx, \quad x = \frac{t^2 - c}{b - 2s\sqrt{a}t}.$$

Wtedy zarówno x , jak i $\sqrt{Q} = t + s\sqrt{a}x$ oraz dx/dt są funkcjami wymiernymi zmiennej t . Całka staje się wymierna.

Dobieramy znak i zakres t tak, aby zachować wyjściową równość z nieujemnym pierwiastkiem i nie dzielić przez zero.

Podstawienia Eulera: drugi i trzeci wariant

Jeśli $c > 0$, przyjmujemy $\sqrt{Q} = tx + s\sqrt{c}$, $s = \pm 1$. Po podniesieniu do kwadratu:

$$(a - t^2)x^2 + (b - 2s\sqrt{c}t)x = 0.$$

Na części przedziału z $x \neq 0$ otrzymujemy

$$x = \frac{2s\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Jeśli $Q = a(x - x_1)(x - x_2)$ **ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste**, kładziemy $\sqrt{Q} = t(x - x_1)$. Po skróceniu $x - x_1$:

$$a(x - x_2) = t^2(x - x_1), \quad x = \frac{t^2x_1 - ax_2}{t^2 - a}.$$

W obu wariantach otrzymujemy funkcje wymierne zmiennej t , na odpowiednio wybranych przedziałach.

Przy podwójnym pierwiastku rozpatrujemy bezpośrednio

$\sqrt{a(x - x_0)^2} = \sqrt{a}|x - x_0|$ (gdy $a > 0$). Znak ustalamy na każdej stronie x_0 .

Standardowe podstawienia trygonometryczne

Zakładamy $a > 0$ i wybieramy gałąź podstawienia zgodną z dziedziną:

Pierwiastek	Podstawienie	Wartość pierwiastka
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$a \cos t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} t$	$a / \cos t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a / \cos t$	$a \operatorname{tg} t $

W pierwszym i drugim wierszu wybieramy $-\pi/2 < t < \pi/2$, więc $\cos t > 0$. Różniczki wynoszą odpowiednio

$$dx = a \cos t \, dt, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} \, dt.$$

W trzecim wierszu $dx = a \sin t / \cos^2 t \, dt$. Dla $x > a$ wybieramy $0 < t < \pi/2$, a dla $x < -a$ wybieramy $\pi/2 < t < \pi$. Wartość bezwzględną rozpisujemy według znaku $\operatorname{tg} t$.

Te podstawienia usuwają pierwiastek; dalszy rachunek wykorzystuje wzory i metody całkowania funkcji trygonometrycznych.

Potęgi wymierne: wspólne podstawienie

Niech R będzie funkcją wymierną, $p_j \in \mathbb{Z}$, $q_j \in \{1, 2, \dots\}$, a ułamki p_j/q_j będą skrócone. Oznaczmy

$$k = \text{NWW}(q_1, \dots, q_m).$$

Dla $x > 0$ w całce

$$\int R(x, x^{p_1/q_1}, \dots, x^{p_m/q_m}) dx$$

stosujemy $x = t^k$, $t > 0$, $dx = kt^{k-1} dt$. Wtedy

$$x^{p_j/q_j} = t^{kp_j/q_j},$$

a wszystkie wykładniki kp_j/q_j są całkowite, więc otrzymujemy funkcję wymierną zmiennej t .

Analogicznie dla $ax + b > 0$ i $a \neq 0$ przyjmujemy

$$ax + b = t^k, \quad x = \frac{t^k - b}{a}, \quad dx = \frac{k}{a} t^{k-1} dt.$$

Dla ujemnej podstawy dopuszczamy takie rzeczywiste gałęzie tylko wtedy, gdy odpowiednie mianowniki wykładników są nieparzyste.

Potęgi wymierne funkcji homograficznej

Niech $ad - bc \neq 0$ i $cx + d \neq 0$. Dla dodatniej wartości $(ax + b)/(cx + d)$ podstawiamy

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^k, \quad t > 0, \quad k = \text{NWW}(q_1, \dots, q_m).$$

Rozwiązując równanie względem x , dostajemy

$$x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}, \quad dx = \frac{k(ad - bc)t^{k-1}}{(a - ct^k)^2} dt.$$

Każda potęga $[(ax + b)/(cx + d)]^{p_j/q_j}$ przechodzi w całkowitą potęgę t^{kp_j/q_j} . Całka z funkcji wymiernej tych wyrażeń staje się więc całką wymierną zmiennej t .

Zakładamy $a - ct^k \neq 0$. Gdy $ad - bc = 0$, iloraz jest stały na swojej dziedzinie i nie służy jako nowa zmienna; wtedy upraszczamy funkcję podcałkową bez tego podstawienia.

Odwrotność przesunięcia: czynnik liniowy

W całkach postaci

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

przydatne bywa podstawienie

$$x - \alpha = \frac{1}{t}, \quad x = \alpha + \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Wtedy

$$ax^2 + bx + c = \frac{Q_*(t)}{t^2},$$

$$Q_*(t) = (a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a,$$

i koniecznie

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{Q_*(t)}}{|t|}.$$

Po obu stronach $x = \alpha$ znak t ustalamy osobno. Zachowujemy dodatniość pierwiastka i niezerowość mianowników. Przykład z $\alpha = 1$ pokazuje, jak kontrola znaku upraszcza całkowanie.