Analiza, Wykład: Całka oznaczona (Riemanna)

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Sumy całkowe

Dana jest funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ przez Δ_n oznaczmy podział przedziału $[a, b]$ taki, że
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \dots, n$.

Sumy całkowe

Dana jest funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ przez Δ_n oznaczmy podział przedziału $[a, b]$ taki, że
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ k = 1, \ldots, n.$

Średnica podziału: $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$

Mówimy, że ciąg podziałów jest *normalny* $\iff \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

Sumy całkowe

Dana jest funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ przez Δ_n oznaczmy podział przedziału $[a, b]$ taki, że $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \ldots, n$.

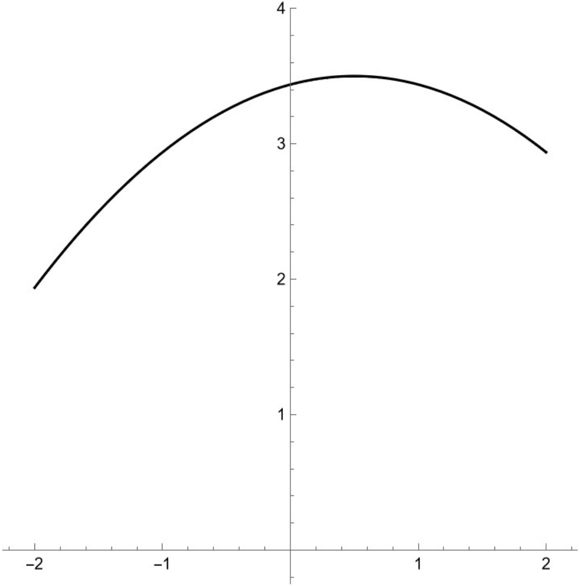
Średnica podziału: $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$

Mówimy, że ciąg podziałów jest *normalny* $\iff \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

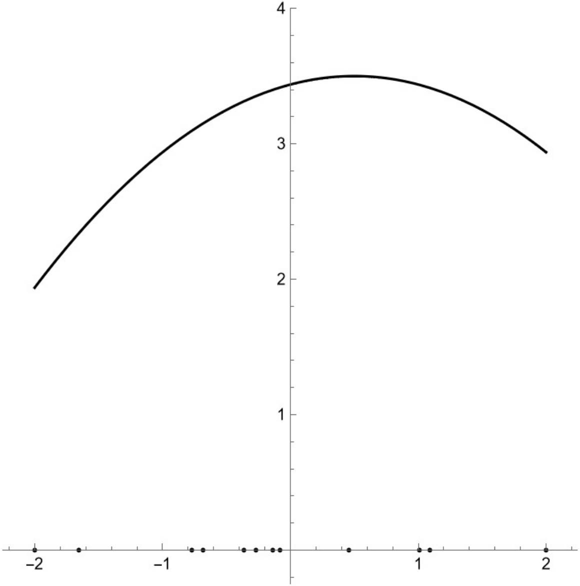
Tworzymy *sumę całkową* wybierając dowolny punkt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

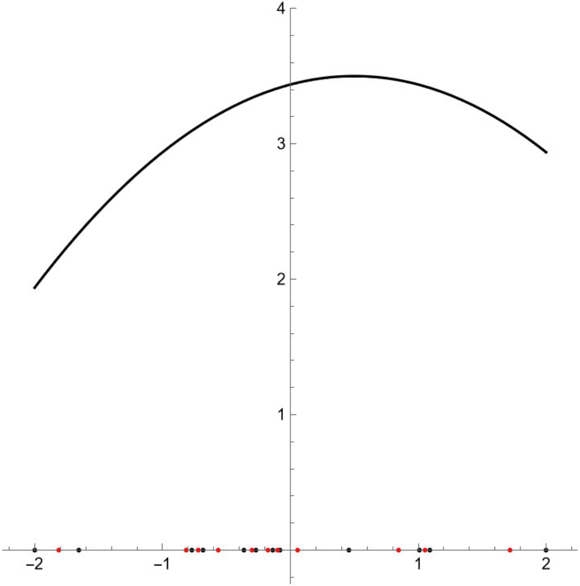
Sumy całkowe



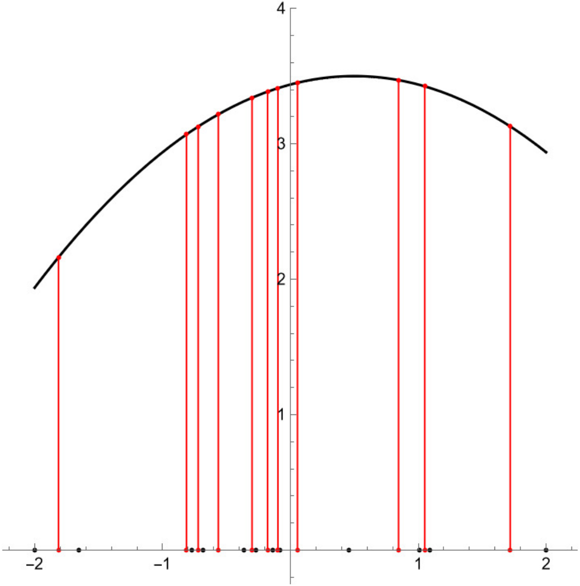
Sumy całkowe



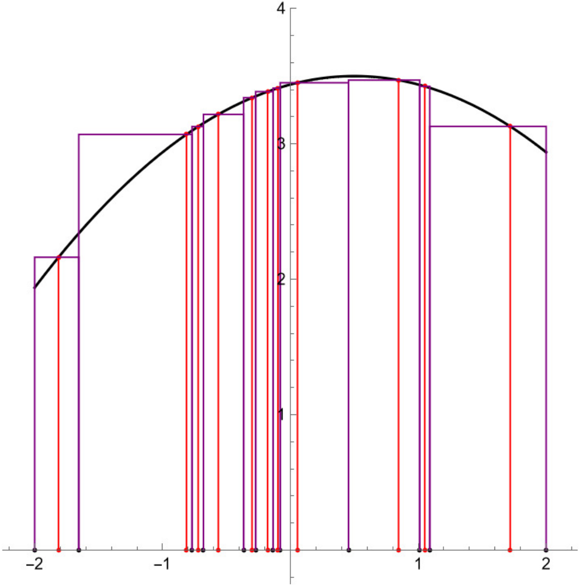
Sumy całkowe



Sumy całkowe



Sumy całkowe



Całka oznaczona (Riemanna)

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych (S_n), niezależna od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką oznaczoną (Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Całka oznaczona (Riemanna)

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych (S_n), niezależna od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką oznaczoną (Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Całka oznaczona (Riemanna)

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych (S_n), niezależna od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką oznaczoną (Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Jezeli całka $\int_a^b f(x)\, dx$ istnieje to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ (lub R–całkowalna na $[a, b]$).

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych (S_n), niezależna od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką oznaczoną (Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Jezeli całka $\int_a^b f(x)\,dx$ istnieje to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ (lub R–całkowalna na $[a, b]$). Zbiór wszytkich fukcji R-całkowalnych na $[a, b]$ oznaczamy przez $R[a, b]$.

Całka oznaczona (Riemanna)

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych (S_n), niezależna od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką oznaczoną (Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy:

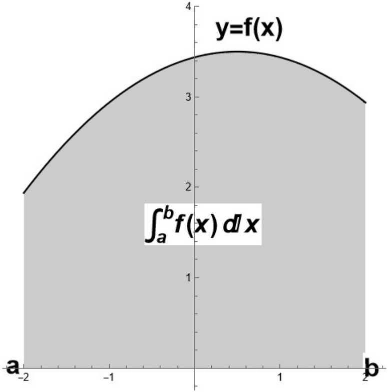
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

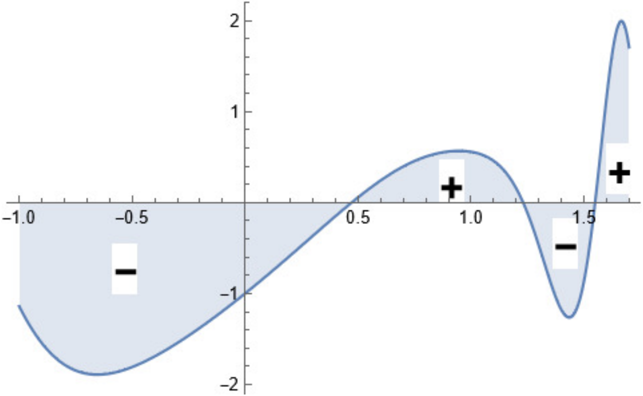
Jezeli całka $\int_a^b f(x)\,dx$ istnieje to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ (lub R–całkowalna na $[a, b]$). Zbiór wszytkich fukcji R-całkowalnych na $[a, b]$ oznaczamy przez $R[a, b]$. a nazywamy dolną, a b to górną granicą całkowania.

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Jeśli f – ciągła, nieujemna w $[a, b]$, to: $\int_a^b f(x)\,dx = |D|$, gdzie $|D|$ – pole figury ograniczonej wykresem funkcji $y = f(x)$ i prostymi $y = 0$, $x = a$, $x = b$.



Interpretacja geometryczna całki oznaczonej



Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Niech $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funcją prędkości w zależności od czasu.

Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Niech $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funcją prędkości w zależności od czasu. Podzielmy odcinek czasu $[a, b]$ punktami
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Niech $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funcją prędkości w zależności od czasu. Podzielmy odcinek czasu $[a, b]$ punktami
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.
Niech $v_i = v(\tau_i)$, gdzie $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ oraz $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ dla $i = 1, \cdots, n$.

Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Niech $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funcją prędkości w zależności od czasu.
Podzielmy odcinek czasu $[a, b]$ punktami
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.
Niech $v_i = v(\tau_i)$, gdzie $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ oraz $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ dla $i = 1, \cdots, n$.
Wtedy droga s przebyta od chwili a do b jest w przybliżeniu równa $s_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$.

Interpretacja fizyczna całki oznaczonej

Niech $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funcją prędkości w zależności od czasu. Podzielmy odcinek czasu $[a, b]$ punktami
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.
Niech $v_i = v(\tau_i)$, gdzie $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ oraz $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ dla $i = 1, \cdots, n$.
Wtedy droga s przebyta od chwili a do b jest w przybliżeniu równa $s_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$.
Jeśli ciąg średnic podziałów $\delta_n = max_{k=1,\cdots,n} \Delta t_k$ dąży do zera to $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b v(t)dt$ jest drogą przebytą w czasie od chwili a do chwili b.

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dowód:

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dowód: Z założenia wynika, że dla każdego podziału Δ_n istnieje przedział $[x_{r-1}, x_r]$, w którym funkcja jest nieograniczona.

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dowód: Z założenia wynika, że dla każdego podziału Δ_n istnieje przedział $[x_{r-1}, x_r]$, w którym funkcja jest nieograniczona. Wybieramy punkty pośrednie z pozostałych przedziałów $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, jako ostatni wybieramy $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ tak, aby $|S_n| > n$.

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dowód: Z założenia wynika, że dla każdego podziału Δ_n istnieje przedział $[x_{r-1}, x_r]$, w którym funkcja jest nieograniczona.
Wybieramy punkty pośrednie z pozostałych przedziałów $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, jako ostatni wybieramy $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ tak, aby $|S_n| > n$.
Jest to sprzeczne z istnieniem granicy właściwej $\lim_{\delta_n \to 0} S_n$ niezależnej od wyboru ξ_k. $\square$

Tw. (warunek konieczny)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w przedziale to f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dowód: Z założenia wynika, że dla każdego podziału Δ_n istnieje przedział $[x_{r-1}, x_r]$, w którym funkcja jest nieograniczona.
Wybieramy punkty pośrednie z pozostałych przedziałów $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, jako ostatni wybieramy $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ tak, aby $|S_n| > n$.
Jest to sprzeczne z istnieniem granicy właściwej $\lim_{\delta_n \to 0} S_n$ niezależnej od wyboru ξ_k. □

Wniosek

Jezeli funkcja f jest R-całkowalna na $[a, b]$ to f jest ograniczona w $[a, b]$.

Przykład funkcji ograniczonej i niecałkowalnej w sensie Riemanna

Niech f będzie funkcją Dirichleta czyli $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Rozważmy dowolny ciąg normalny podziałów $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Z każdego przedziału $[x_{i-1}, x_i]$ wybieżmy $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Wtedy $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$ czyli $\lim_{n\to\infty} S_n = b - a$. Jeśli zaś z każdego przedziału wybieżemy $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to $S_n = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$ i $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. Stąd wynika, ze f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Przykład funkcji ograniczonej i niecałkowalnej w sensie Riemanna

Niech f będzie funkcją Dirichleta czyli $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Rozważmy dowolny ciąg normalny podziałów $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Z każdego przedziału $[x_{i-1}, x_i]$ wybieżmy $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Wtedy $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$ czyli $\lim_{n\to\infty} S_n = b - a$. Jeśli zaś z każdego przedziału wybieżemy $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to $S_n = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$ i $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. Stąd wynika, ze f nie jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Tw. (warunek wystarczający)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona w $[a, b]$ i ciągła w $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów to f jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Własności całek oznaczonych

(1) $f, g \in R[a,b]$ i funkcje f i g różnią się w skończonej liczbie punktów, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Własności całek oznaczonych

(1) $f, g \in R[a, b]$ i funkcje f i g różnią się w skończonej liczbie punktów, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) $f, g \in R[a, b]$ i $f \leqslant g$ w $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Własności całek oznaczonych

(1) $f, g \in R[a, b]$ i funkcje f i g różnią się w skończonej liczbie punktów, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) $f, g \in R[a, b]$ i $f \leqslant g$ w $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

(3) $f \in R[a, b]$ i $c \in (a, b)$, to $f \in R[a, c]$, $f \in R[c, b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Definicja

Dla $a > b$ definiujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Definicja

Dla $a > b$ definiujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Własności całek oznaczonych c.d.

(4) $f, g \in R[a,b]$, $k \in \mathbb{R}$ to $f \pm g, f \cdot g, k \cdot f \in R[a,b]$ i

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

Nierówność Schwarza - Buniakowskiego

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

Własności całek oznaczonych c.d.

(5) Jeśli istnieje $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, gdzie $\alpha = \min(a,b,c)$, $\beta = \max(a,b,c)$, to niezależnie od położenia a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Własności całek oznaczonych c.d.

(5) Jeśli istnieje $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, gdzie $\alpha = \min(a,b,c)$, $\beta = \max(a,b,c)$, to niezależnie od położenia a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(7) $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ i

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant M \cdot |b-a|$$

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Przykład:

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$:
$[a,b]=[0,2]$

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1\,, & 1< x\leqslant 2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1\,, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0\,, & 1< x\leqslant 2 \end{cases}$$

$\int_0^2 f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$ ale

$\int_0^2 f(x)\,dx \cdot \int_0^2 g(x)\,dx = 1$, bo

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_1^2\,dx = 1\,, \qquad \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1\,dx = 1$

Funkcja górnej granicy całkowania

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest R - całkowalna w $[a, b]$ i $\alpha \in [a, b]$, to funkcja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$$

jest ciągła na $[a, b]$.
Ponadto jeśli $x_0 \in [a, b]$ jest punktem ciągłości funkcji f, to funkcja F jest różniczkowalna w x_0 oraz

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód ciągłości

Funkcja f jest R-całkowalna więc jest ograniczona w $[a, b]$, czyli istnieje $M > 0$ takie, że $|f(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Dowód ciągłości

Funkcja f jest R-całkowalna więc jest ograniczona w $[a, b]$, czyli istnieje $M > 0$ takie, że $|f(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Niech x_0 , $x_0 + \Delta x \in [a, b]$.

Dowód ciągłości

Funkcja f jest R-całkowalna więc jest ograniczona w $[a, b]$, czyli istnieje $M > 0$ takie, że $|f(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Niech x_0 , $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Wtedy
$0 \leq |F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = |\int_{\alpha}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt - \int_{\alpha}^{x_0} f(t)\, dt| =$
$|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt| \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\, dt \leq M|\Delta x| \to 0$ dla $\Delta \to 0$

Dowód ciągłości

Funkcja f jest R-całkowalna więc jest ograniczona w $[a, b]$, czyli istnieje $M > 0$ takie, że $|f(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Niech x_0 , $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Wtedy
$0 \leq |F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = |\int_\alpha^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt| =$
$|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt| \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \leq M|\Delta x| \to 0$ dla $\Delta \to 0$

Dlatego $\lim_{\Delta x \to 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0)$. □

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$.

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in [a, b]$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in [a, b]$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zauważmy, że $\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t) - f(x_0)]\,dt$.

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in [a, b]$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zauważmy, że
$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t) - f(x_0)]\,dt.$

Punkt t należy do przedziału o końcach x_0 i $x_0 + \Delta x$. Stąd jeśli $|\Delta x| < \delta$ to $|t - x_0| < \delta$, co implikuje, że $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in [a, b]$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zauważmy, że
$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t) - f(x_0)]\,dt$.
Punkt t należy do przedziału o końcach x_0 i $x_0 + \Delta x$. Stąd jeśli $|\Delta x| < \delta$ to $|t - x_0| < \delta$, co implikuje, że $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Stąd dla $|\Delta x| < \delta$ mamy
$|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| \le \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt = \frac{1}{\Delta x}\varepsilon\Delta x = \varepsilon$.

Dowód różniczkowalności

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in [a, b]$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zauważmy, że
$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t) - f(x_0)]\,dt.$

Punkt t należy do przedziału o końcach x_0 i $x_0 + \Delta x$. Stąd jeśli $|\Delta x| < \delta$ to $|t - x_0| < \delta$, co implikuje, że $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Stąd dla $|\Delta x| < \delta$ mamy
$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt = \frac{1}{\Delta x}\varepsilon\Delta x = \varepsilon.$

Z czego wynika, że $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$.$\square$

Przykłady:

(1) $F(x) = \int_{-1}^{x} e^{t^2}\, dt,\ f(t) = e^{t^2}$ – ciągła $\forall\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$

Przykłady:

(1) $F(x) = \int_{-1}^{x} e^{t^2}\,dt, \; f(t) = e^{t^2}$ – ciągła $\forall\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$

(2) $F(x) = \int_{-1}^{\sin x} e^{t^2}\,dt, \; f(t) = e^{t^2}$ – ciągła $\forall\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow F'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x$

Przykłady:

(1) $F(x)=\int_{-1}^{x} e^{t^2}\,dt,\ f(t)=e^{t^2}$ – ciągła $\forall\, t\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\Rightarrow F'(x)=e^{x^2}$

(2) $F(x)=\int_{-1}^{\sin x} e^{t^2}\,dt,\ f(t)=e^{t^2}$ – ciągła $\forall\, t\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\Rightarrow F'(x)=e^{\sin^2 x}\cdot\cos x$

(3) Znaleźć ekstrema funkcji $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ w przedziale $(0,+\infty)$.

$f(t)=\frac{\sin t}{t}$ – ciągła w $(0,+\infty)$

$F'(x)=\frac{\sin x}{x}=0 \iff x=n\pi,\ n\in\mathbb{N}$

$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Rightarrow F''(n\pi)=\frac{1}{n\pi}\cdot(-1)^n\neq 0\Rightarrow$

funkcja ma maksima dla n nieparzystych i minima dla n parzystych.

Tw. (Newtona – Leibniza)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$ i $\alpha \in [a, b]$, to:

(1) funkcja $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Tw. (Newtona – Leibniza)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$ i $\alpha \in [a, b]$, to:

(1) funkcja $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$.

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = \ F(x)\ \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Tw. (Newtona – Leibniza)

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$ i $\alpha \in [a, b]$, to:

(1) funkcja $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$.

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = \quad F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

(3) Jeśli Φ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$. Z tw. Lagrange'a dla każdego i istnieje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taki, że $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$.
Z tw. Lagrange'a dla każdego i istnieje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taki, że $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$.
Stąd $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = S_n$.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$.
Z tw. Lagrange'a dla każdego i istnieje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taki, że $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$.
Stąd $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = S_n$.
Dlatego dla dowolnego normalnego ciągu podziałów mamy $F(b) - F(a) = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$.
Z tw. Lagrange'a dla każdego i istnieje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taki, że $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$.
Stąd $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = S_n$.
Dlatego dla dowolnego normalnego ciągu podziałów mamy $F(b) - F(a) = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

(3) Jeśli Φ jest funkcją pierwotną f na $[a, b]$ to $\Phi(x) = F(x) + C$ dla pewnej stałej C.

Dowód

(1) Na postawie poprzedniego twierdzenia z ciągłosci f na $[a, b]$ otrzymujemy różniczkowalność F na $[a, b]$ oraz równość $F'(x) = f(x)$ co kończy dowód (1).

(2) Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$.
Z tw. Lagrange'a dla każdego i istnieje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taki, że $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$.
Stąd $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = S_n$.
Dlatego dla dowolnego normalnego ciągu podziałów mamy $F(b) - F(a) = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

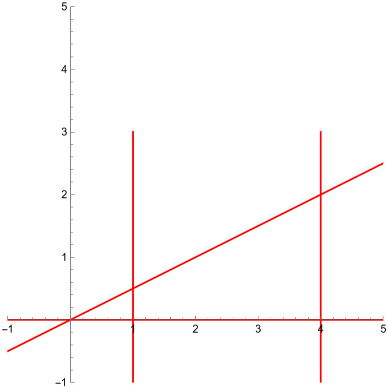
(3) Jeśli Φ jest funkcją pierwotną f na $[a, b]$ to $\Phi(x) = F(x) + C$ dla pewnej stałej C.
Stąd mamy $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.\square$

Przykłady

(1) Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostymi $y = \frac{1}{2}x, \; y = 0, \; x = 1, \; x = 4.$

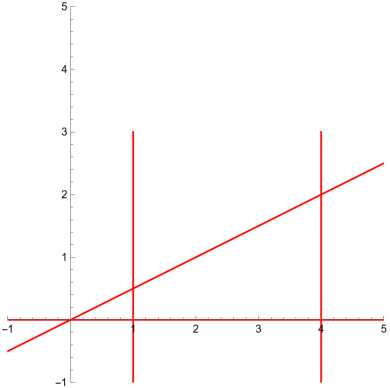
Przykłady

(1) Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostymi
$y = \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4.$



Przykłady

(1) Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostymi $y = \frac{1}{2}x, \; y = 0, \; x = 1, \; x = 4.$



$$|D| = \int_1^4 \frac{1}{2}x \, dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^4 = \frac{15}{4}$$

Przykłady

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \; -\ln|\cos x| \; \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykłady

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \quad -\ln|\cos x| \,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykłady

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \; -\ln|\cos x| \; \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\int_0^1 e^x \, dx = \; e^x\Big|_0^1 = e - 1$

Przykłady

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \; -\ln|\cos x| \; \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\int_0^1 e^x \, dx = \; e^x\big|_0^1 = e - 1$

(4) $\int_0^\pi \sin x \, dx = \; -\cos x\big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$

Wartość średnia funkcji

Niech f będzie R-całkowalna na przedziale $[a, b]$. Podzielmy przedział na n-równych przedziałów, każdy o długości $\frac{b-a}{n}$. Z każdego przedziału wybierzmy po jednym punkcie $\xi_1, \cdots, \xi_n$. Wtedy wartość średnia funkcji w tych punktach jest równa

$$\mu_n(f) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \frac{b-a}{n}.$$

Przechodząc $n \to \infty$ otrzmujemy, że $\delta_n = \frac{b-a}{n} \to 0$. Stąd

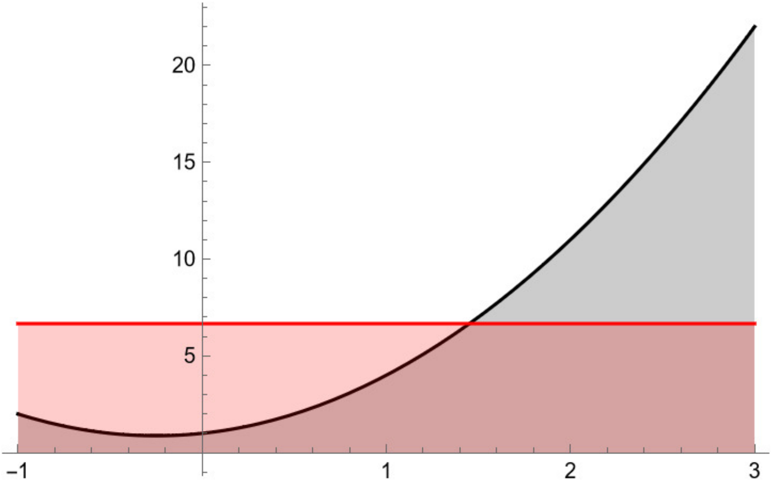
Definicja (wartość średnia funkcji)

Wartością średnią funkcji f całkowalnej na $[a, b]$ nazywamy

$$\mu(f) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Wartość średnia funkcji

$$\mu(f)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$



Twierdzenie Newtona-Leibniza a wartość średnia.

Niech funkcja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $[a, b]$. Wtedy przyrost funkcji w tym przedziale jest równy iloczynowi średniej wartosci jej pochonej na tym przedziale i długości tego przedziału.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \frac{\int_a^b F'(x)dx}{b-a}(b-a) = \mu(F')(b-a).$$

Interpretacja fizyczna twierdzenia Newtona-Leibniza.

Droga to iloczyn średniej prędkości przez czas.

Tw. (całkowanie przez części dla całek oznaczonych)

Jeśli $f, g \in C^1[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \; f(x) \cdot g(x) \;\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Tw. (całkowanie przez części dla całek oznaczonych)

Jeśli $f, g \in C^1[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \; f(x) \cdot g(x) \;\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Przykład:

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx = \left\| \begin{array}{ll} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \right\| =$$

$$= \; -x \cos x \;\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi + \; \sin x \;\Big|_0^\pi = \pi$$

Tw. (o zamianie zmiennej w całce oznaczonej)

Jeśli

(1) $\varphi \in C^1(T)$, T – przedział domknięty o końcach α, β, $\varphi(T) = X$,

(2) $f(x)$ jest ciągła w X,

(3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\, dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{array} \right\| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Dowód:

Jeśli F jest funkcją pierwotną f, to:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \quad F[\varphi(t)] \;\Big|_\alpha^\beta =$
$= F(b) - F(a)$

Dowód:

Jeśli F jest funkcją pierwotną f, to:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \quad F[\varphi(t)] \ \Big|_\alpha^\beta =$
$= F(b) - F(a)$

Przykłady:

$$(1)\ \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\| =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t\,dt =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \quad 2(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t) \ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$(2)\ \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \left\| \begin{array}{ccc} t=\sqrt{1+3x}, & x=0 \iff & t=1 \\ x=\frac{t^2-1}{3}, & x=5 \iff & t=4 \\ dx=\frac{2}{3}t\,dt & & \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt = \frac{2}{9}\ \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 = 4$$

$$(2)\ \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \left\| \begin{array}{ccc} t=\sqrt{1+3x}\,, & x=0 \iff & t=1 \\ x=\frac{t^2-1}{3}\,, & x=5 \iff & t=4 \\ dx=\frac{2}{3}t\,dt & & \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 = 4$$

$$(3)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \left\| \begin{array}{ccc} t=e^x\,, & x=\ln 2 \iff & t=2 \\ x=\ln t\,, & x=\ln 3 \iff & t=3 \\ dx=\frac{dt}{t} & & \end{array} \right\| =$$

$$= \int_2^3 \frac{dt}{t(t-t^{-1})} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

$$(3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left\| \begin{array}{ccc} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,, & x=0 \iff t=0 \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,, & x=\frac{\pi}{2} \iff t=1 \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & \end{array} \right\| =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Zastosowania geometryczne całki Riemanna - obliczanie pola

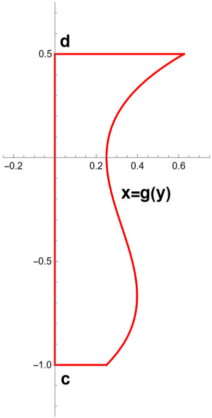
Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w $[a, b]$ i
$\forall\, x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant g(x)$.
Pole figury ograniczonej krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$ i prostymi $x = a$, $x = b$:

$$|D| = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Jeśli nie zakładamy, że $\forall\, x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant g(x)$, to:

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d],\ x \in [0, g(y)]\}$

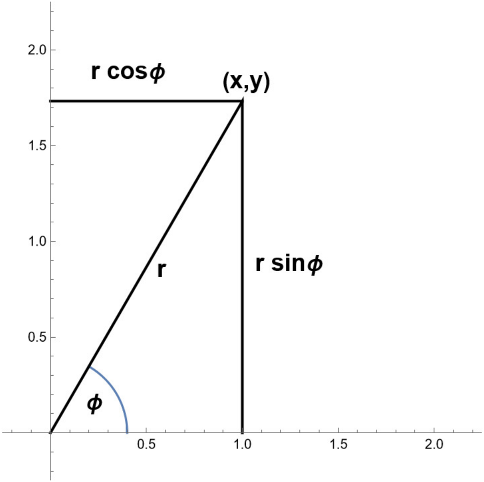


Wtedy pole D obliczmy ze wzoru $|D| = \int_c^d g(y)\,dy$.

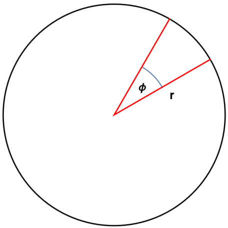
Współrzędne biegunowe

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$



Pole wycinka kołowego



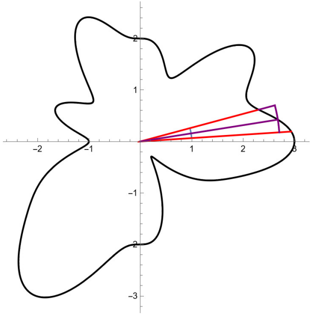
$S(\phi)$ to wycinek kołowy dla kąta ϕ.

$$\frac{|S(\phi)|}{\pi r^2} = \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow |S(\phi)| = \frac{1}{2}\phi r^2$$

Twierdzenie

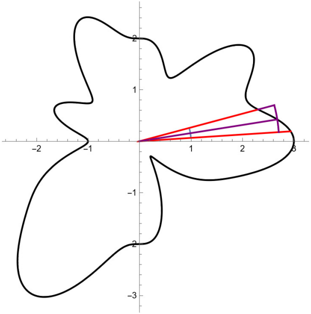
Pole wycinka kołowego o kącie ϕ i promieniu r to $|S(\phi)| = \frac{1}{2}\phi r^2$.

Pole figury we współrzędnych biegunowych



Pole figury ograniczonej krzywą we współrzędnych biegunowych $r = R(\phi)$, $\phi \in [\alpha, \beta]$ można podzielić na pola wycinków krzywoliniowych $\{(r(\phi), \phi) | \phi \in [\phi_{k-1}, \phi_k],\ r(\phi) \in [0, R(\phi)]\}$, gdzie $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \cdots < \phi_n = \beta$, $\Delta\phi_k = \phi_k - \phi_{k-1}$, $\xi_k \in (\phi_{k-1}, \phi_k)$.
Pole wycinka krzywoliniowego przybliżamy polem wycinka kołowego o promieniu $R(\xi_k)$ i kącie $\Delta\phi_k$ czyli $\frac{1}{2}(R(\xi_k))^2\Delta\phi_k$.
Wtedy $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(R(\xi_k))^2\Delta\phi_k$ jest sumą całkową.

Pole figury we współrzędnych biegunowych



$\lim_{\delta_n \to 0} S_n = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(R(\xi_k))^2 \Delta\phi_k = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (R(\phi))^2\, d\phi.$

Twierdzenie

Pole figury ograniczonej krzywą $r = R(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]$ we współrzędnych biegunowych jest równe

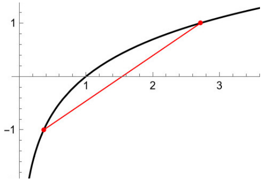
$$|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (R(\phi))^2\, d\phi$$

Przykłady:

(1) Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $y = \ln x$ i sieczną tego wykresu przechodzącą przez punkty o rzędnych -1 i 1.

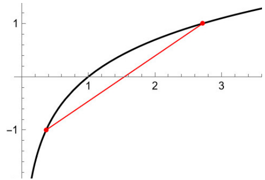
Przykłady:

(1) Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $y = \ln x$ i sieczną tego wykresu przechodzącą przez punkty o rzędnych -1 i 1.



Przykłady:

(1) Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $y = \ln x$ i sieczną tego wykresu przechodzącą przez punkty o rzędnych -1 i 1.



Sieczna przechodząca przez punkty $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ i $(e, 1)$ ma równanie $y = 1 + \frac{2}{e-\frac{1}{e}}(x-e)$, więc

$$|D| = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left[\ln x - \left(1 + \frac{2}{e-\frac{1}{e}}(x-e) \right) \right] dx =$$

$$= \left. (x \ln x - x) \right|_{\frac{1}{e}}^{e} - \left. \left[x + \frac{(x-e)^2}{e-\frac{1}{e}} \right] \right|_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{2}{e}$$

(2) Obliczyć pole obszaru zawartego między parabolą $y^2 = 4x$ i prostą $y = 2x - 4$.

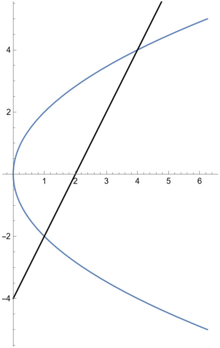
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow A = (1, -2),\ B = (4, 4)$$

Równanie paraboli $x = \frac{1}{4}y^2$ oraz prostej $x = \frac{1}{2}y + 2$

(2) Obliczyć pole obszaru zawartego między parabolą $y^2 = 4x$ i prostą $y = 2x - 4$.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow A = (1, -2),\ B = (4, 4)$$

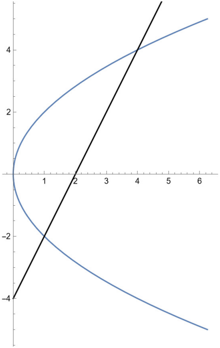
Równanie paraboli $x = \frac{1}{4}y^2$ oraz prostej $x = \frac{1}{2}y + 2$



(2) Obliczyć pole obszaru zawartego między parabolą $y^2 = 4x$ i prostą $y = 2x - 4$.

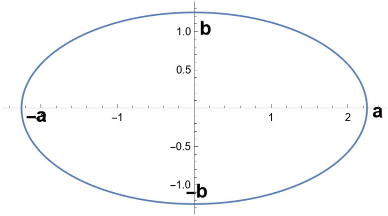
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow A = (1, -2),\ B = (4, 4)$$

Równanie paraboli $x = \frac{1}{4}y^2$ oraz prostej $x = \frac{1}{2}y + 2$



$$D = \int_{-2}^{4} \frac{1}{2}y + 2 - \frac{1}{4}y^2 dy = \frac{1}{4}y^2 + 2y - \frac{1}{12}y^3|_{-2}^{4} = 9$$

(3) Obliczyć pole obszaru ograniczonego elipsą:
$x(t) = a\cos t\,,\ y(t) = b\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi]$.

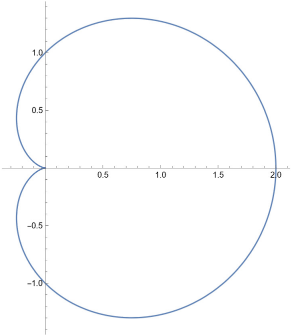


$$|D| = 4\int_0^a y\,dx = \left\| \begin{array}{c} x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\,dt \\ x = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \\ x = a \iff t = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a\sin t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = 2ab\ \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

(4) Obliczyć pole obszaru ograniczonego kardioidą zadaną równaniem $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

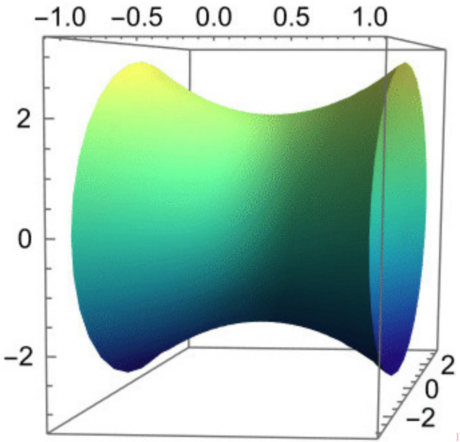


Jest to krzywa symetryczna, więc

$$|D| = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,d\varphi = a^2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$
$$= a^2\int_0^\pi d\varphi + 2a^2\int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= a^2 \left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Objętość bryły obrotowej

Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna w $[a,b]$.
Niech V będzie bryłą ograniczoną powierzchnią powstałą przez obrót wykresu funkcji f wokół osi OX oraz płaszczyznami P_a i P_b prostopadłymi do osi OX i takimi, że $(a,0) \in P_a$, $(b,0) \in P_b$.



Objętość bryły obrotowej

Niech $\Delta_n: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Objętość bryły obrotowej

Niech $\Delta_n: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
Tworzymy sumę całkową, która jest równa sumie objętości walców o promieniach $f(\xi_k)$ i wysokościach Δx_k, $k = 1, \ldots, n$

Objętość bryły obrotowej

Niech $\Delta_n: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
Tworzymy sumę całkową, która jest równa sumie objętości walców o promieniach $f(\xi_k)$ i wysokościach Δx_k, $k = 1, \ldots, n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f^2(\xi_k)\Delta x_k$$

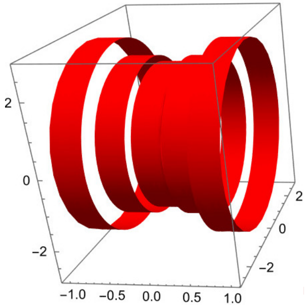
Objętość bryły obrotowej

Niech $\Delta_n: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Tworzymy sumę całkową, która jest równa sumie objętości walców o promieniach $f(\xi_k)$ i wysokościach Δx_k, $k = 1, \ldots, n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f^2(\xi_k)\Delta x_k$$



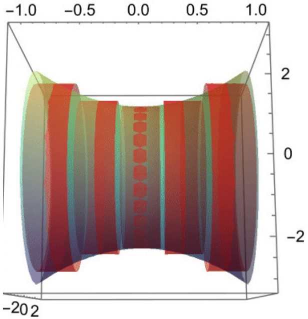
Następnie w sumie całkowej $n \to \infty$

$$\lim_{\delta_n \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Objętość bryły obrotowej

Następnie w sumie całkowej $n \to \infty$

$$\lim_{\delta_n \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$



Objętość bryły obrotowej

Twierdzenie

Objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji $y = f(x)$ wokół osi OX wyraża się wzorem:

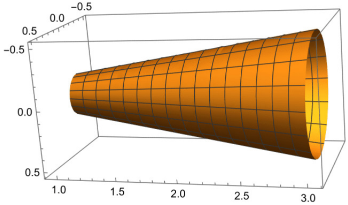
$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Gdy bryła obrotowa powstaje przez obrót krzywej $x = f(y)$ wokół osi OY, $y \in [c, d]$, to

$$|V| = \pi \int_c^d f^2(y)\, dy$$

Objętość bryły obrotowej - Przykłady

(1) Obliczyć objętość stożka ściętego o promieniach podstaw a i b $(0 < a < b)$ i wysokości h.

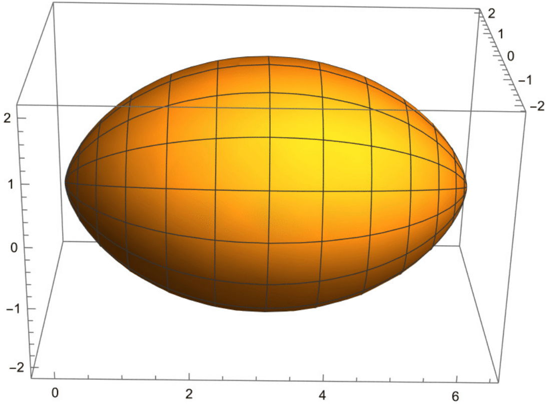


$$f(x) = \frac{b-a}{h}x + a, \;\; x \in [0, h]$$

$$|V| = \pi \int_0^h [\tfrac{b-a}{h}x + a]^2 \, dx = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{b-a}{h}x + a \\ dx = \frac{h}{b-a}\, dt \\ x = 0 \Rightarrow t = a \\ x = h \Rightarrow t = b \end{array} \right\| = \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 \, dt =$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \;\; \frac{t^3}{3} \;\Big|_a^b = \frac{1}{3}\pi \frac{h}{b-a}(b^3 - a^3) = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$$

(2) Obliczyć objętość bryły obrotowej powastałej przez obrót wokół osi OX łuku cykloidy
$x(t) = a(t - \sin t)\,,\ y(t) = a(1 - \cos t)\,,\quad t \in [0, 2\pi]\,,\ a > 0.$



Objętość bryły obrotowej - Przykłady

$$x(t) = a(t - \sin t)\,,\ y(t) = a(1 - \cos t)\,,\quad t \in [0, 2\pi]\,,\ a > 0.$$

$$|V| = \pi \int_0^{2\pi a} f^2(x)\,dx =$$

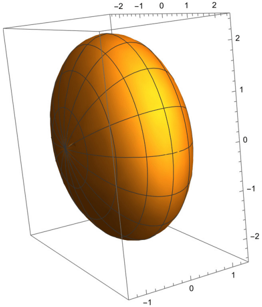
$$= \left\| \begin{array}{cc} x = a(t - \sin t)\,, & x = 0 \iff t = 0 \\ dx = a(1 - \cos t)\,dt\,, & x = 2\pi a \iff t = 2\pi \\ f(x(t)) = y(t) & \end{array} \right\| =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \tfrac{t}{2}\right)^3\,dt =$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \tfrac{t}{2}\,dt = \left\| \ u = \tfrac{t}{2} \ \right\| = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 u\,du =$$

$$= \left\| \ \text{wz. rekurencyjny} \ \right\| = 5\pi^2 a^3$$

(3) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wokół osi OY.



$$|V| = \pi \int_{-b}^{b} x^2\, dy = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\, dy =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\, dy = 2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right] \Big|_0^b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Krzywą (łukiem) gładką nazywamy przekształcenie $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, gdzie $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ oraz $x_i(t)$ są funkcjami klasy C^1 na $[a, b]$ dla $i = 1, \cdots, n$.
Jeżeli $\forall\, t_1, t_2 \in (a, b) \qquad t_1 \neq t_2 \Rightarrow x(t_1) \neq x(t_2)$ to krzywą nazywamy zwykłą.

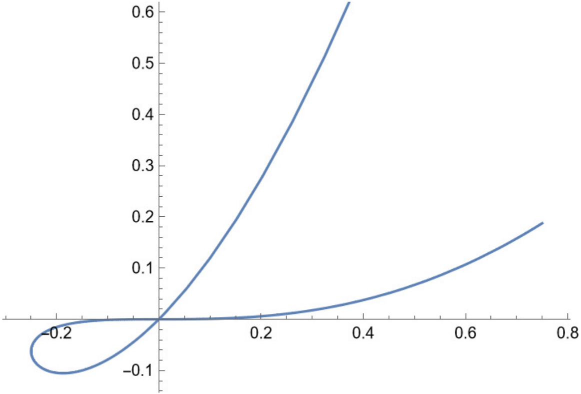
Jeżeli dla krzywej zwykłej zachodzi $x(a) \neq x(b)$ to nazywamy ją otwartą, w przeciwnym przypaku nazywamy zamkniętą.
Gładką krzywą nazywamy *regularną*, jeśli

$$\forall\, t \in [a, b] \qquad \sum_{i}^{n} [x_i'(t)]^2 > 0.$$

Krzywa gładka$x$ jest płaska, jeżeli $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (czyli $n = 2$).

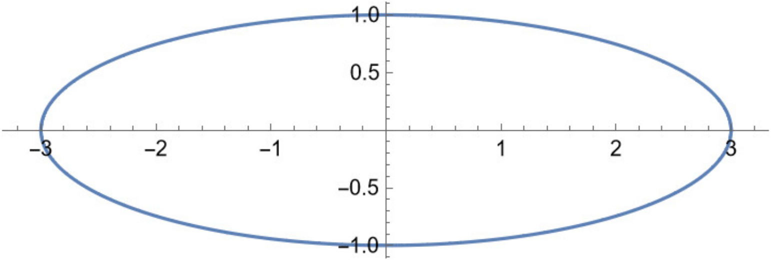
Krzywe (łuki) - przykłady

$x(t) = (t + t^2, t^3 + t^4)$, $t \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ to płaska krzywa regularna, ale nie jest zwykła.



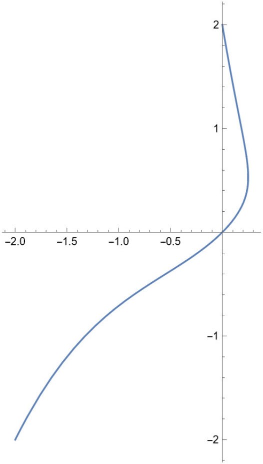
Krzywe (łuki) - przykłady

$x(t) = (3\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ to płaska krzywa regularna, zwykła, zamknięta.



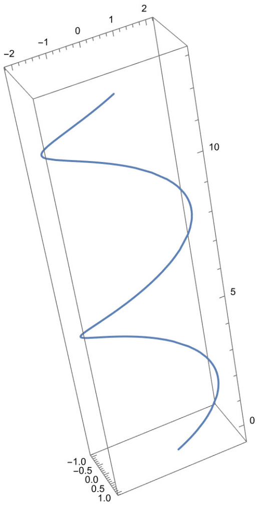
Krzywe (łuki) - przykłady

$x(t) = (t - t^2, t + t^5)$, $t \in [-1, 1]$ to płaska krzywa regularna otwarta.



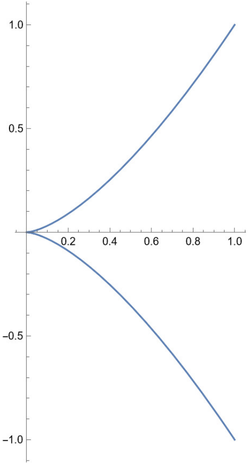
Krzywe (łuki) - przykłady

$x(t) = (\cos t, 2\sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$ to krzywa regularna, otwarta, ale nie jest płaska.



Krzywe (łuki) - przykłady

$x(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ to płaska krzywa gładka otwarta, ale nie jest regularna, bo $x'(0) = (0, 0)$.



Długość krzywej (łuku)

$x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ to płaska krzywa regularna
Δ_n : $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ - podział przedziału $[a, b]$

średnica podziału: $\delta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta t_k$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

(Δ_n) - podział *normalny* $\iff$ $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

$P_k = (x_1(t_k), x_2(t_k))$, $k = 0, \ldots, n$ - punkty na krzywej x

Długość krzywej (łuku)

$x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ to płaska krzywa regularna
$\Delta_n : \; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ - podział przedziału $[a, b]$

średnica podziału: $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k \,, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

(Δ_n) - podział *normalny* $\iff \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$

$P_k = (x_1(t_k), x_2(t_k)) \,, \; k = 0, \ldots, n$ - punkty na krzywej x

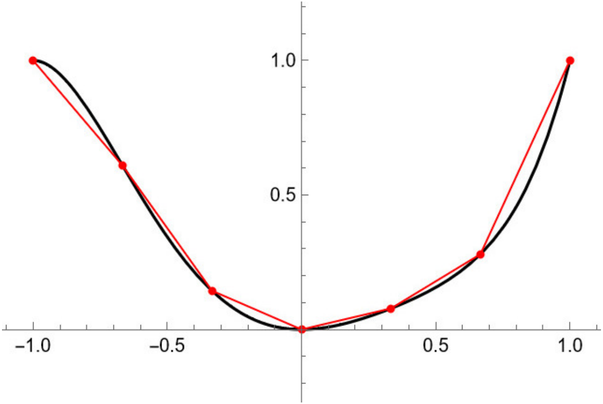
Łącząc punkty P_k na łuku otrzymujemy łamaną l_n o długości

$$|l_n| = \sum_{k=1}^{n} \left| \overrightarrow{P_{k-1}P_k} \right|$$

gdzie

Długość krzywej (łuku)

$$\left|\overrightarrow{P_{k-1}P_k}\right| = \sqrt{[x_1(t_k) - x_1(t_{k-1})]^2 + [x_2(t_k) - x_2(t_{k-1})]^2} =$$
$$= \sqrt{[x_1'(c_k) \cdot (t_k - t_{k-1})]^2 + [x_2'(d_k) \cdot (t_k - t_{k-1})]^2} =$$
$$= \sqrt{[x_1'(c_k)]^2 + [x_2'(d_k)]^2} \cdot \Delta t_k\,, \quad c_k, d_k \in (t_{k-1}, t_k)$$



Długość krzywej (łuku)

Długość krzywej płaskiej

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje granica właściwa ciągu (l_n) niezależna od wyboru punktów pośrednich, to krzywą nazywamy *prostowalną* a granicę $L = \lim_{n\to\infty} l_n$ nazywamy długością krzywej.

Twierdzenie

Długość płaskiej krzywej regularnej $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jest równa

$$L = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2}\, dt.$$

Długość krzywej w $\mathbb{R}^n$

Niech $v = (v_1, \cdots, v_n)$ będzie wektorem w $\mathbb{R}^n$. Wtedy jego długość (norma) to liczba $|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

Długość krzywej w $\mathbb{R}^n$

Jeśli $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą regularną to jej długość jest równa

$$L = \int_a^b |x'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i'(t)]^2} \, dt.$$

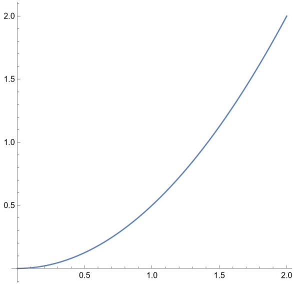
Uwaga:

Jeśli $f \in C^1([a,b])$, to wykres $y = f(x)$ jest krzywą zwykłą otwartą regularną o parametryzacji $x(t) = (t, f(t))$ dla $t \in [a,b]$, więc $\int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$

Stąd wzór na długość krzwej zadanej funkcyjnie $L:\ y = f(x),\ x \in [a,b]$:

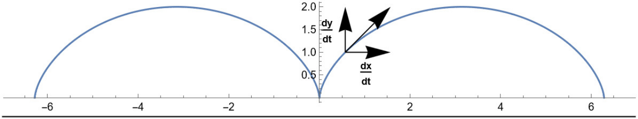
$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

(1) Obliczyć długość łuku paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, a]$, $a > 0$.



$$|L| = \int_0^a \sqrt{1 + [(\tfrac{1}{2}x^2)']^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + x^2}\, dx =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}|\right] \Big|_0^a =$$
$$= \frac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2+1} + \ln|a + \sqrt{a^2+1}|\right]$$

(2) Obliczyć długość łuku cykloidy
$x(t) = a(t - \sin t)\,,\ y(t) = a(1 - \cos t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,,\ a > 0.$

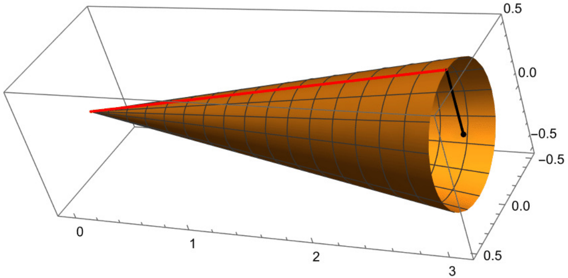


□

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a\sin t]^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

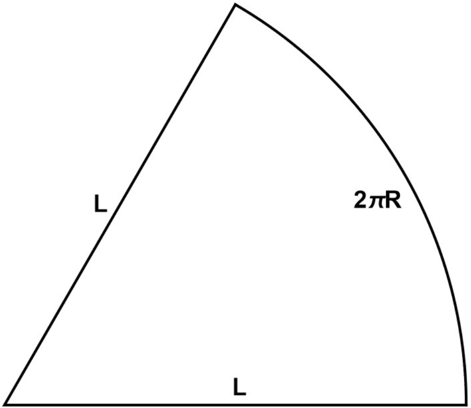
$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{t}{2}\right|\, dt =$$
$$= 2a\ \left(-2\cos \tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a$$

Pole powierzchni bocznej stożka



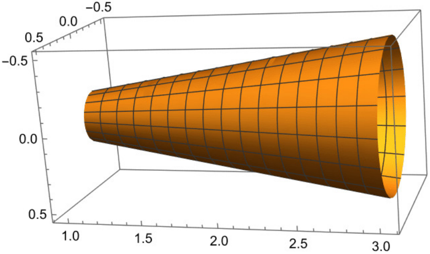
Stożek o tworzącej o długości L i promieniu podstawy długości R.

Pole powierzchni bocznej stożka



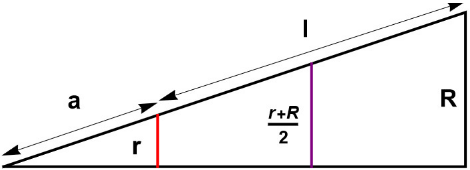
Pole powierzchni bocznej stożka o tworzącej o długości L i promieniu podstawy długości R to $P = \pi RL$.

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego



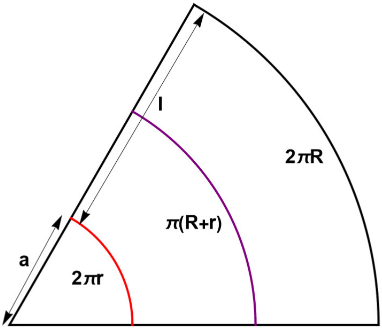
Stożek ścięty o tworzącej o długości l i promieniach podstaw długości r i R $(r < R)$

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego



$$\frac{a}{r} = \frac{a+l}{R} \Rightarrow aR = ar + lr \Rightarrow a = \frac{lr}{R-r}$$

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego

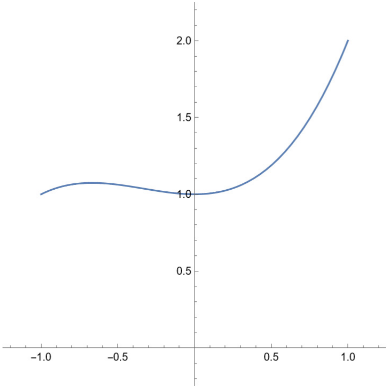


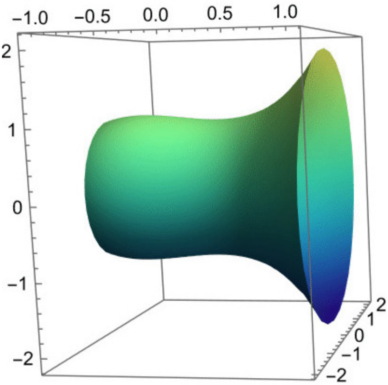
$a = \frac{lr}{R-r}$. Pole powierzchni bocznej stożka ściętego to

$$P = \pi R(l+a) - \pi ra = \pi(Rl + (R-r)a) = 2\pi\frac{r+R}{2}l.$$

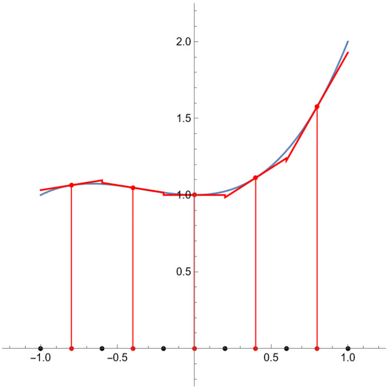
$$P = 2\pi\frac{r+R}{2}l$$

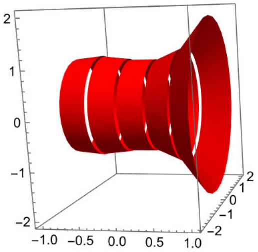
Powierzchnia powstała przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.





Pole powierzchni obrotowej





$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) l_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)}\Delta x_i$$

$$\lim_{\delta_n \to 0} S_n = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Pole powierzchni obrotowej

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem:

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Pole powierzchni obrotowej

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem:

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Jeśli obracana krzywa zadana jest parametrycznie, to:

$$|S| = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Pole powierzchni obrotowej

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $y = f(x), \ x \in [a, b]$ wyraża się wzorem:

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

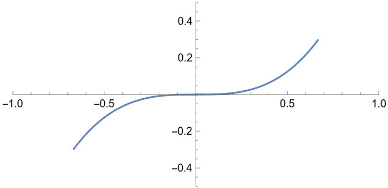
Jeśli obracana krzywa zadana jest parametrycznie, to:

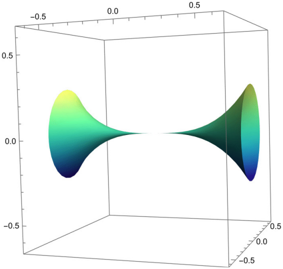
$$|S| = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$

Jeśli obracamy wokół osi OY wykres funkcji $x = f(y), \ y \in [c, d]$, to:

$$|S| = 2\pi \int_c^d f(y) \cdot \sqrt{1 + [f'(y)]^2} \, dy$$

(1) Obliczyć pole powierzchni bocznej powstałej przez obrót wokół osi OX łuku krzywej $y = x^3$, $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

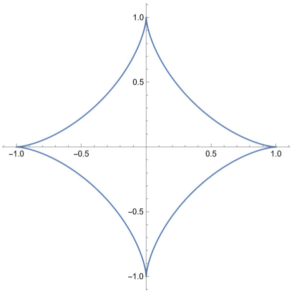


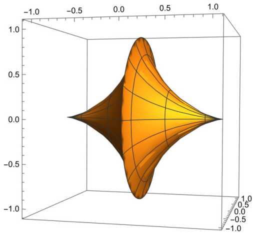


$$|S| = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4}\, dx = \left\| \begin{array}{c} t = 1 + 9x^4 \\ dt = 36x^3 dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow t = \frac{25}{4} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{4\pi}{36} \int_1^{\frac{25}{9}} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{2\pi}{27} \left(\frac{125}{27} - 1 \right)$$

(2) Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót wokół OX asteroidy $x(t) = a\cos^3 t\,,\ \ y(t) = a\sin^3 t\,,\ \ t \in [0, 2\pi]$.





$$|S| = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt =$$
$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

Pole powierzchni obrotowej - przykłady

$$|S| = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t \, dt = \left\| \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \\ t = 0 \iff u = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \iff u = 1 \end{array} \right\| =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^1 u^4 \, du = 12\pi a^2 \left. \frac{u^5}{5} \right|_0^1 = \frac{12}{5}\pi a^2$$