

Analiza

Całka oznaczona (Riemanna)

Wojciech Domitrz

Slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

2026

Podział przedziału i jego średnica

Niech $a < b$ oraz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Podziałem przedziału $[a, b]$ nazywamy układ punktów

$$\Delta : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

Długości podprzedziałów i średnica podziału wynoszą

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \delta(\Delta) = \max_{1 \leq k \leq m} \Delta x_k.$$

Normalny ciąg podziałów

Ciąg (Δ_n) jest normalny, jeżeli $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$. Liczbę podprzedziałów w Δ_n oznaczamy przez m_n .

Samo $m_n \rightarrow \infty$ nie wystarcza: długość *każdego* podprzedziału musi dążyć do zera, jednostajnie względem jego numeru.

Suma całkowa Riemanna

W każdym podprzedziale wybieramy dowolny punkt

$$\xi_{n,k} \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}], \quad k = 1, \dots, m_n.$$

Odpowiadająca im suma całkowa ma postać

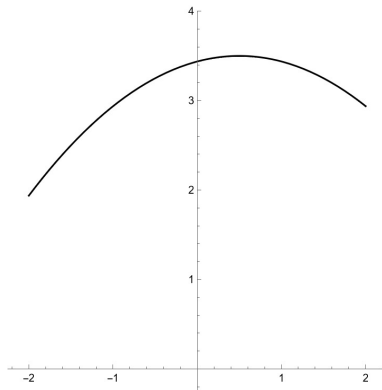
Suma Riemanna

$$S_n = \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_{n,k}) \Delta x_{n,k}.$$

Dla funkcji nieujemnej każdy składnik jest polem prostokąta o szerokości $\Delta x_{n,k}$ i wysokości $f(\xi_{n,k})$.

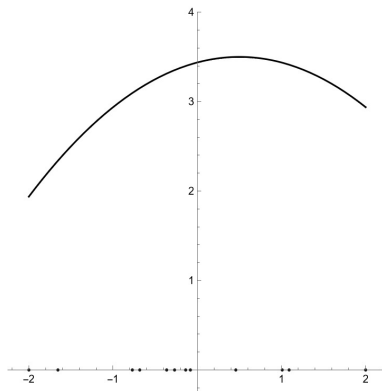
Punkty $\xi_{n,k}$ mogą być końcami podprzedziałów, ich środkami lub innymi punktami. W definicji całki trzeba dopuścić wszystkie takie wybory.

Sumy całkowite: wykres funkcji



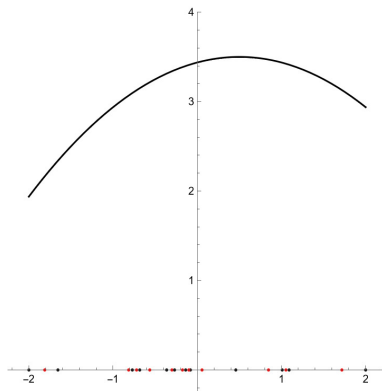
Rozpatrujemy funkcję na ustalonym przedziale $[a, b]$.

Sumy całkowite: podział przedziału



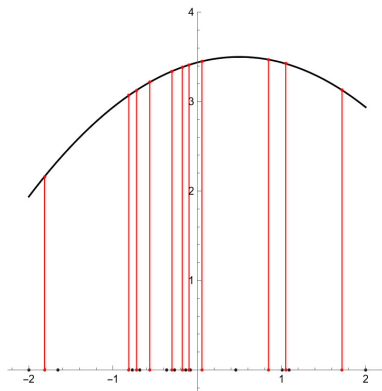
Wybieramy punkty podziału $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$.

Sumy całkowite: punkty pośrednie



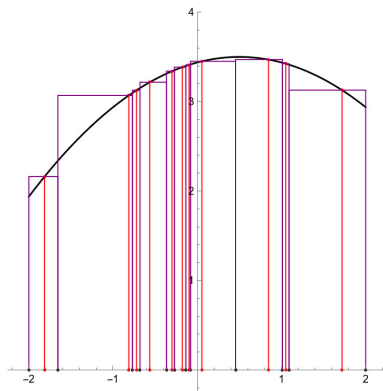
W każdym przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ wybieramy punkt ξ_k .

Sumy całkowite: wartości funkcji



Wysokość k -tego prostokąta wyznacza wartość $f(\xi_k)$.

Sumy całkowe: prostokąty



Suma pól prostokątów to $S = \sum_{k=1}^m f(\xi_k)\Delta x_k$. Przy dostatecznie drobnym podziale przybliża ona pole pod wykresem.

Całka oznaczona Riemanna

Definicja

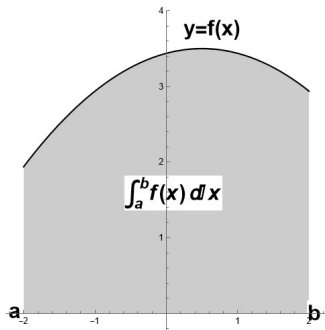
Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Riemanna, jeżeli istnieje jedna liczba $I \in \mathbb{R}$ taka, że dla **każdego normalnego ciągu podziałów** oraz **każdego wyboru punktów pośrednich** zachodzi $S_n \rightarrow I$.

Liczbę tę nazywamy całką oznaczoną i zapisujemy

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\delta(\Delta_n) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_{n,k}) \Delta x_{n,k}.$$

Granica ma być skończona i wspólna dla wszystkich dopuszczalnych podziałów oraz punktów pośrednich.

Zapis $f \in R[a, b]$ oznacza całkowność Riemanna na $[a, b]$; a i b są odpowiednio dolną i górną granicą całkowania.

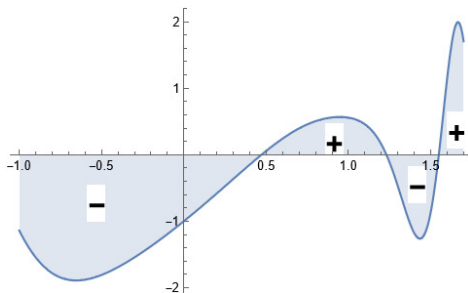


Jeżeli f jest ciągła i nieujemna na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx$$

jest polem obszaru ograniczonego wykresem f , osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

Znak całki a pole obszaru



Całka uwzględnia znaki: obszary nad osią OX wnoszą wkład dodatni, a obszary pod osią – ujemny.

$$\int_a^b f(x) dx = P_+ - P_-, \quad \int_a^b |f(x)| dx = P_+ + P_-.$$

Zatem pole całego obszaru między wykresem a osią opisuje druga z tych całek. Tutaj P_+, P_- oznaczają nieujemne pola odpowiednich części.

Prędkość i przemieszczenie

Niech $q(t)$ będzie położeniem punktu poruszającego się po prostej, a $v(t) = q'(t)$ jego ciągłą prędkością ze znakiem na $[a, b]$.

Dzielimy przedział czasu:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Wybierając $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, przybliżamy zmianę położenia na krótkim odcinku czasu przez $v(\tau_i)\Delta t_i$. Stąd

$$q(b) - q(a) \approx \sum_{i=1}^m v(\tau_i)\Delta t_i.$$

Gdy średnica podziału dąży do zera, otrzymujemy

$$q(b) - q(a) = \int_a^b v(t) dt.$$

Jest to **przemieszczenie**; może być dodatnie, ujemne lub równe zero.

Droga a przemieszczenie

Droga sumuje długości wszystkich odcinków ruchu, niezależnie od jego kierunku. Szybkość jest równa $|v(t)|$, dlatego

$$s = \int_a^b |v(t)| dt.$$

Jeżeli $v \geq 0$, to droga jest równa $\int_a^b v(t) dt$. Przy zmianach znaku prędkości trzeba uwzględnić wartość bezwzględną lub podzielić całkę w miejscach zmiany kierunku.

Przykładowo dla $v(t) = t$ na $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 t dt = 0, \quad s = \int_{-1}^0 (-t) dt + \int_0^1 t dt = 1.$$

Punkt wrócił do położenia początkowego, ale przebyta droga jest dodatnia.

Całkowalność wymaga ograniczoności

Twierdzenie

Jeżeli $f \in R[a, b]$, to f jest ograniczona na $[a, b]$.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że f jest nieograniczona. Weźmy normalny ciąg podziałów, na przykład podziały równomierne.

W każdym podziale istnieje podprzedział $I_{n,r}$, na którym $|f|$ jest nieograniczona. Gdyby na wszystkich podprzedziałach funkcja była ograniczona, skończona liczba ograniczeń dawałaby ograniczenie na całym $[a, b]$.

W pozostałych podprzedziałach wybieramy dowolne punkty i oznaczamy

$$A_n = \sum_{k \neq r} f(\xi_{n,k}) \Delta x_{n,k}.$$

Liczba A_n jest skończona, ponieważ jest sumą skończenie wielu liczb rzeczywistych.

Dowód ograniczoności: sprzeczność

Ponieważ $|f|$ jest nieograniczona na $I_{n,r}$, można dobrać $\xi_{n,r}$ tak, aby

$$|f(\xi_{n,r})|\Delta x_{n,r} > n + |A_n|.$$

Wtedy, korzystając z odwróconej nierówności trójkąta, dostajemy

$$\begin{aligned}|S_n| &= |A_n + f(\xi_{n,r})\Delta x_{n,r}| \\ &\geq |f(\xi_{n,r})|\Delta x_{n,r} - |A_n| > n.\end{aligned}$$

Taki ciąg sum całkowych nie może mieć skończonej granicy. Jest to sprzeczne z definicją całkowania Riemanna. $\square$

Wniosek

Funkcja nieograniczona na przedziale domkniętym nie jest na nim całkowna w sensie Riemanna. Całki niewłaściwe wymagają osobnej definicji.

Ograniczoność nie wystarcza

Funkcja Dirichleta na $[a, b]$, gdzie $a < b$, ma postać

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jest ograniczona, lecz nie jest całkowna w sensie Riemanna.

W każdym podprzedziale o dodatniej długości są liczby wymierne i niewymierne. Dla tego samego normalnego ciągu podziałów możemy zatem wybrać:

- wyłącznie wymierne punkty pośrednie; wtedy $S_n = \sum_k \Delta x_{n,k} = b - a$;
- wyłącznie niewymierne punkty pośrednie; wtedy $S_n = 0$.

Ponieważ $b - a \neq 0$, nie istnieje wspólna granica sum całkowych.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i ciągła poza co najwyżej skończoną liczbą punktów, to $f \in R[a, b]$.

W szczególności każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest całkowalna: jej ograniczoność wynika z twierdzenia Weierstrassa.

Dlaczego skończenie wiele nieciągłości nie przeszkadza? Można otoczyć te punkty przedziałami o dowolnie małej łącznej długości. Ograniczoność f zapewnia wtedy dowolnie mały wkład tych przedziałów do różnicy sum górnych i dolnych.

Na pozostałych domkniętych częściach przedziału funkcja jest jednostajnie ciągła, więc dla dostatecznie drobnego podziału oscylacje funkcji są małe. Łącznie daje to kryterium całkowalności Riemanna.

Własności całki: wartości i porządek

Zakładamy $a < b$.

Zmiana w skończenie wielu punktach

Jeżeli $f \in R[a, b]$, a funkcja rzeczywista g różni się od f tylko w skończenie wielu punktach, to $g \in R[a, b]$ i

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Pojedyncze punkty nie mają długości; ich wartości nie zmieniają całki.

Monotoniczność

Jeżeli $f, g \in R[a, b]$ i $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

W szczególności całka z funkcji nieujemnej jest nieujemna.

Granice całkowania i addytywność

Przyjmujemy następujące definicje:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (a > b).$$

Jeżeli $f \in R[a, b]$ i $a < c < b$, to całki na obu podprzedziałach istnieją i

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Odwrotnie, całkowalność na $[a, c]$ i $[c, b]$ daje całkowalność na $[a, b]$ oraz tę samą równość.

Dowolna kolejność punktów

Jeżeli f jest całkowalna na $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$, powyższa równość zachodzi dla każdej kolejności a, b, c . Uwzględniamy znaki wynikające z orientacji granic.

Liniowość całki

Jeżeli $f, g \in R[a, b]$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, to $\lambda f + \mu g$ oraz fg są całkowne, a ponadto

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

W szczególności

$$\begin{aligned}\int_a^b (f \pm g)(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Liniowość wynika z liniowości sum Riemanna i przejścia do granicy.
Całkowalność iloczynu nie oznacza, że całka z iloczynu jest iloczynem całek.

Nierówność Schwarza–Buniakowskiego

Jeżeli $a < b$ i $f, g \in R[a, b]$, to

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

Równoważnie, wartość bezwzględna całki po lewej stronie jest nie większa niż pierwiastek z iloczynu po prawej.

Dowód. Oznaczmy

$$A = \int_a^b f^2, \quad B = \int_a^b g^2, \quad C = \int_a^b fg.$$

Dla każdej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$0 \leq \int_a^b (f - \lambda g)^2 = A - 2\lambda C + \lambda^2 B.$$

Gdy $B > 0$, podstawienie $\lambda = C/B$ daje $C^2 \leq AB$. Gdy $B = 0$, warunek $A - 2\lambda C \geq 0$ dla wszystkich λ wymusza $C = 0$, więc nierówność także zachodzi. □

Oszacowanie wartości całki

Jeżeli $f \in R[a, b]$ i $a < b$, to $|f| \in R[a, b]$. Dla

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

otrzymujemy

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b - a).$$

Pierwsza nierówność wynika z $-|f| \leq f \leq |f|$, monotoniczności i liniowości całki. Druga wynika z $|f| \leq M$.

Dla dowolnej kolejności końców poprawna postać to

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_{\min(a, b)}^{\max(a, b)} |f(x)| dx \leq M|b - a|,$$

gdzie supremum M liczymy na przedziale między a i b .

Całka z iloczynu: kontrprzykład

Na przedziale $[0, 2]$ zdefiniujemy

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Obie funkcje są ograniczone i mają tylko jedną nieciągłość, więc są całkowalne. Ponadto

$$\int_0^2 f(x) dx = 1, \quad \int_0^2 g(x) dx = 1.$$

Dla każdego x mamy $f(x)g(x) = 0$, a zatem

$$\int_0^2 f(x)g(x) dx = 0 \neq 1 = \left(\int_0^2 f \right) \left(\int_0^2 g \right).$$

Nie istnieje ogólna reguła zastępująca całkę z iloczynu iloczynem całek.

Całka jako funkcja górnej granicy

Niech $f \in R[a, b]$, $\alpha \in [a, b]$ oraz

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Twierdzenie

Funkcja F jest ciągła na $[a, b]$. Jeżeli dodatkowo f jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to F jest w tym punkcie różniczkowalna i

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Na końcach przedziału analogiczne stwierdzenie dotyczy pochodnych jednostronnych, jeżeli f jest tam jednostronnie ciągła.

Zmienna t jest zmienną całkowania, a x określa górną granicę. Taki zapis zapobiega pomyleniu tych dwóch ról.

Ciągłość funkcji całkowej: dowód

Ograniczoność f daje liczbę $M \geq 0$ taką, że $|f(t)| \leq M$ na $[a, b]$. Dla $x, y \in [a, b]$ addytywność całki daje

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt.$$

Oszacowanie całki z uwzględnieniem kolejności granic prowadzi do

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)| dt \\ &\leq M|y - x|. \end{aligned}$$

Gdy $y \rightarrow x$, prawa strona dąży do zera. Zatem F jest ciągła w każdym punkcie przedziału, również jednostronnie na jego końcach. □

Udowodniliśmy więcej: F spełnia warunek Lipschitza ze stałą M .
Rozumowanie obejmuje zarówno $y > x$, jak i $y < x$.

Pochodna funkcji całkowitej: dowód

Niech f będzie ciągła w $x_0 \in (a, b)$. Dla $h \neq 0$ i $x_0 + h \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt.\end{aligned}$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ ciągłość zapewnia $\delta > 0$ takie, że

$$|t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jeżeli $0 < |h| < \delta$, to cały przedział między x_0 i $x_0 + h$ leży w tym otoczeniu. Stąd

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Otrzymujemy $F'(x_0) = f(x_0)$. Oszacowanie działa dla obu znaków h . □

Różniczkowanie całek: przykłady

1. Górna granica równa x . Funkcja e^{t^2} jest ciągła na $\mathbb{R}$, więc

$$F(x) = \int_{-1}^x e^{t^2} dt \implies F'(x) = e^{x^2}.$$

Do obliczenia pochodnej nie trzeba znać jawnego wzoru funkcji pierwotnej.

2. Górna granica zależna od x . Niech

$$G(x) = \int_{-1}^{\sin x} e^{t^2} dt = F(\sin x).$$

Z reguły różniczkowania złożenia:

$$G'(x) = F'(\sin x) \cos x = e^{\sin^2 x} \cos x.$$

Ogólnie, przy ciągłym f i różniczkowalnym u ,

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) u'(x).$$

Ekstrema funkcji całkowej

Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Aby traktować tę całkę jako właściwą całkę Riemanna, uzupełniamy funkcję podcałkową w zerze:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t / t = 1$, funkcja f jest ciągła. Wartość w jednym punkcie nie zmienia całki.

Dla $x > 0$ otrzymujemy

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad F'(x) = 0 \iff x = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ekstrema: klasyfikacja punktów

Dla $x > 0$ mamy

$$F''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad F''(n\pi) = \frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

Zatem:

- w punktach $x = (2k + 1)\pi$, $k = 0, 1, \dots$, występują ścisłe maksima lokalne, ponieważ $F'' < 0$;
- w punktach $x = 2k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, występują ścisłe minima lokalne, ponieważ $F'' > 0$.

To samo wynika ze znaku $F'(x)$: dla $x > 0$ mianownik jest dodatni, więc znak pochodnej jest znakiem $\sin x$.

Nie ma innych ekstremów lokalnych w $(0, \infty)$, ponieważ różniczkowalna funkcja może mieć tam ekstremum tylko w punkcie zerowania pochodnej. Klasyfikacja lokalna sama w sobie nie rozstrzyga o ekstremach globalnych.

Twierdzenie Newtona–Leibniza

Niech f będzie ciągła na $[a, b]$, gdzie $a < b$.

Twierdzenie

Funkcja $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest funkcją pierwotną f w (a, b) . Ponadto

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jeżeli Φ jest dowolną funkcją pierwotną f w (a, b) , ciągłą na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b.$$

Przy f ciągłej do końców naturalne przedłużenie funkcji pierwotnej ma tam odpowiednie pochodne jednostronne. Wartości na końcach są niezbędne do obliczenia różnicy.

Newton–Leibniz: funkcja pierwotna

Krok 1. Z twierdzenia o pochodnej funkcji całkowej wynika

$$F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Ponieważ $F(a) = 0$ i $F(b) = \int_a^b f(t) dt$, mamy

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Krok 2. Jeżeli również $\Phi' = f$, to $(\Phi - F)' = 0$ w (a, b) . Z twierdzenia Lagrange'a funkcja $\Phi - F$ jest stała; dzięki ciągłości to samo zachodzi na końcach przedziału.

$$\Phi(x) = F(x) + C \implies \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a).$$

Stała całkowania znika przy odejmowaniu wartości na końcach. □

Newton–Leibniz: dowód przez sumy

Zachowajmy też dowód bezpośrednio łączący funkcję pierwotną z sumami Riemanna. Dla dowolnego podziału:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{k=1}^m [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})].$$

Na każdym podprzedziale twierdzenie Lagrange'a daje $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ takie, że

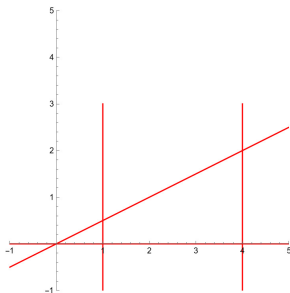
$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = \Phi'(c_k)\Delta x_k = f(c_k)\Delta x_k.$$

Zatem

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{k=1}^m f(c_k)\Delta x_k.$$

Wybieramy normalny ciąg podziałów. Ciągłość f zapewnia całkowalność, więc prawa strona dąży do $\int_a^b f(x) dx$. Lewa strona nie zależy od podziału. To kończy drugi dowód. $\square$

Pole pod prostą: przykład



Dla $f(x) = x/2$ na $[1, 4]$ funkcja jest nieujemna, więc pole wynosi

$$P = \int_1^4 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Kontrola geometryczna: trapez ma wysokość $4 - 1 = 3$ i podstawy $1/2$ oraz 2 , stąd $P = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) \cdot 3 = 15/4$.

Obliczanie całek oznaczonych

1. Tangens. Na $[0, \pi/4]$ mamy $\cos x > 0$, dlatego

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx &= [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} \\ &= -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

2. Funkcja wykładnicza.

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

3. Sinus.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

W każdym przykładzie funkcja podcałkowa jest ciągła na całym przedziale całkowania, więc można zastosować twierdzenie Newtona–Leibniza.

Wartość średnia funkcji

Niech $a < b$ i $f \in R[a, b]$. W podziale równomiernym

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

średnia arytmetyczna wartości w punktach $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ jest równa

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x.$$

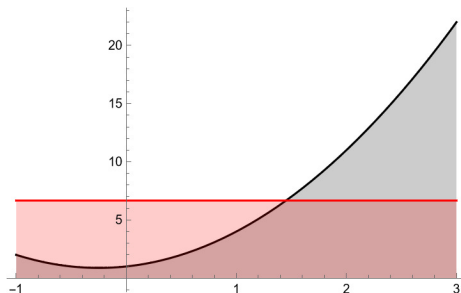
Przechodząc do granicy, otrzymujemy definicję:

Wartość średnia na przedziale

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Wzór dzieli łączny wkład funkcji przez długość przedziału. Warunek $a < b$ wyklucza dzielenie przez zero.

Wartość średnia: interpretacja



Dla $f \geq 0$ prostokąt o podstawie $b - a$ i wysokości $\mu(f)$ ma takie samo pole jak obszar pod wykresem:

$$\mu(f)(b - a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Jeżeli f jest ciągła, to $\min f \leq \mu(f) \leq \max f$. Z własności Darboux wynika istnienie $c \in [a, b]$ takiego, że $f(c) = \mu(f)$.

Przyrost i średnia wartość pochodnej

Niech $F \in C^1([a, b])$ i $a < b$. Wtedy F' jest ciągła, a więc całkowalna, i

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_a^b F'(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b F'(x) dx \right) (b-a) \\ &= \mu(F')(b-a). \end{aligned}$$

Przyrost funkcji jest iloczynem średniej wartości jej pochodnej i długości przedziału.

Można osłabić założenie C^1 : wystarczy ciągłość F na $[a, b]$, różniczkowalność w (a, b) oraz całkowalność Riemanna pochodnej (po określeniu jej skończonych wartości na końcach). Wtedy działa dowód przez twierdzenie Lagrange'a i sumy całkowite.

Sama różniczkowalność nie zapewnia całkowalności Riemanna pochodnej.

Średnia prędkość i średnia szybkość

Dla ruchu po prostej, przy ciągłej prędkości $v = q'$ na $[a, b]$,

$$\bar{v} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt = \frac{q(b) - q(a)}{b-a}.$$

Zatem **przemieszczenie** jest iloczynem średniej prędkości i czasu:

$$q(b) - q(a) = \bar{v}(b-a).$$

Natomiast średnia szybkość wynosi

$$|\bar{v}| = \frac{1}{b-a} \int_a^b |v(t)| dt, \quad s = |\bar{v}|(b-a).$$

To właśnie iloczyn średniej szybkości i czasu daje **drogę**. Prędkość ze znakiem rozróżnia kierunki; szybkość i droga są nieujemne.

Twierdzenie

Jeżeli $u, v \in C^1([a, b])$, to

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Wyprowadzenie. Całkujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$(uv)' = u'v + uv', \quad [uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

Po przeniesieniu pierwszej całki otrzymujemy tezę.

Wybór u i v' ma uprościć nową całkę. W całce oznaczonej trzeba obliczyć wyrażenie brzegowe $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Całkowanie przez części: przykład

Obliczamy $I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$. Przyjmujemy

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} I &= [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= -\pi \cos \pi + 0 \cos 0 + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi + (0 - 0) = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

Znak przed drugą całką jest dodatni, ponieważ odejmujemy całkę z $-\cos x$.

Kontrola znaku: $x \sin x \geq 0$ na $[0, \pi]$, więc wynik powinien być nieujemny.

Zamiana zmiennej w całce

Niech $\alpha < \beta$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$, a f będzie ciągła na całym obrazie $X = \varphi([\alpha, \beta])$. Oznaczmy

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

Wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Przy podstawieniu $x = \varphi(t)$ zmieniamy jednocześnie funkcję podcałkową, różniczkę $dx = \varphi'(t) dt$ oraz granice.

W tej postaci twierdzenie nie wymaga monotoniczności φ . Wkłady odcinków przebieganych w przeciwnych kierunkach znoszą się dzięki znakowi φ' . Jeśli $a > b$, całka po lewej ma odwrócone granice.

Zamiana zmiennej: dowód

Ponieważ f jest ciągła na przedziale X , ma funkcję pierwotną F . Z reguły łańcuchowej

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Twierdzenie Newtona–Leibniza daje

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

To dowodzi wzoru. □

Analogicznie wzór działa przy dowolnej kolejności granic α, β , jeśli φ jest klasy C^1 na przedziale między nimi. Należy zachować zgodność obu par końców.

Podstawienie: pole ćwiartki koła

Przykład 1. Obliczamy $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Wybieramy $x = 2 \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Wtedy

$$dx = 2 \cos t dt, \quad x = 0 \leftrightarrow t = 0, \quad x = 2 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ $\cos t \geq 0$ na tym przedziale,

$$\sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2|\cos t| = 2 \cos t.$$

Stąd

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= [2t + \sin 2t]_0^{\pi/2} = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

Wynik zgadza się z polem ćwiartki koła o promieniu 2.

Przykład 2. Obliczamy $I = \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$.

$$t = \sqrt{1+3x}, \quad x = \frac{t^2-1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3} dt.$$

Granice: $x = 0 \leftrightarrow t = 1$, $x = 5 \leftrightarrow t = 4$. Na całym przedziale $t > 0$, więc można skrócić czynnik t :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{t^2-1}{3t} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1) dt \\ &= \frac{2}{9} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{9} \cdot 18 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Przykład 3. Obliczamy

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

Przyjmujemy $t = e^x$, więc $dx = dt/t$ i $e^{-x} = 1/t$. Nowe granice wynoszą 2 i 3, zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{1}{t - 1/t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{t-1}{t+1} \right]_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{1/2}{1/3} = \boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Ponieważ $t \in [2, 3]$, oba wyrażenia pod logarytmami są dodatnie i żaden mianownik nie znika.

Podstawienie tangensa połowy kąta

Przykład 4. Obliczamy $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. Stosujemy podstawienie

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Granice: $x = 0 \leftrightarrow t = 0$, $x = \pi/2 \leftrightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2}{2(1+t^2)+1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Podstawienie jest ciągłe i odwracalne na tym przedziale; jego odwrotność to $x = 2 \arctan t$.

Pole obszaru między wykresami

Niech f, g będą ciągłe na $[a, b]$, gdzie $a < b$, i niech $f(x) \geq g(x)$ na całym przedziale. Obszar

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

ma pole

$$|D| = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

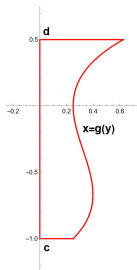
Wysokość pionowego paska to **funkcja górna minus funkcja dolna**. Nie trzeba zakładać, że obie funkcje są dodatnie.

Jeżeli wykresy przecinają się i zmieniają kolejność, pole między nimi wynosi

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

W praktyce ustalamy punkty przecięcia, dzielimy przedział i na każdej części odejmujemy funkcję dolną od górnej.

Pole obszaru: paski poziome



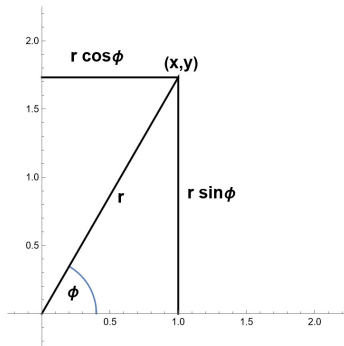
Niech $g : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ będzie ciągła, $c < d$, oraz

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}.$$

Szerokość poziomego paska wynosi $g(y)$, więc $|D| = \int_c^d g(y) dy$. Ogólniej, dla ciągłych granic $x_{\text{lewa}}(y) \leq x_{\text{prawa}}(y)$,

$$|D| = \int_c^d [x_{\text{prawa}}(y) - x_{\text{lewa}}(y)] dy.$$

Współrzędne biegunowe

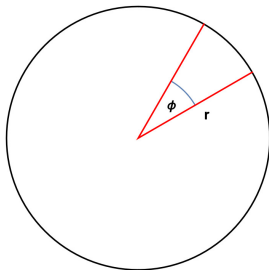


Punkt opisujemy odległością $r \geq 0$ od początku układu i kątem φ , mierzonym od dodatniej półosi OX :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Kąt w dalszych wzorach wyrażamy w radianach. Dla $r > 0$ jest określony z dokładnością do wielokrotności 2π .

Pole wycinka kołowego

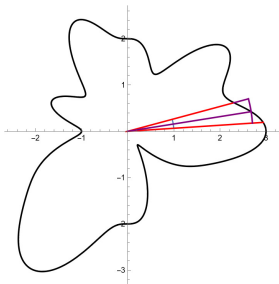


Niech $r \geq 0$ i $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Wycinek o kącie θ zajmuje część $\theta/(2\pi)$ koła, dlatego

$$\frac{|S(\theta)|}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \implies \boxed{|S(\theta)| = \frac{1}{2}r^2\theta}$$

dla $r > 0$; dla $r = 0$ pole wynosi 0. Wzór $\frac{1}{2}r^2\theta$ wymaga kąta w radianach, a nie w stopniach.

Pole obszaru w układzie biegunowym



Niech R będzie ciągła i nieujemna na $[\alpha, \beta]$, gdzie $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$.
Rozpatrujemy obszar

$$D = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq R(\varphi)\}.$$

Funkcja R opisuje brzeg, natomiast zmienna r przebiega wszystkie promienie od 0 do $R(\varphi)$. Ograniczenie zakresu kąta zapobiega wielokrotnemu obieganiu obszaru.

Pole biegunowe: sumy wycinków

Dzielimy przedział kątów:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_m = \beta, \quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}.$$

Wybieramy $\xi_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ i przybliżamy każdą część obszaru wycinkiem koła o promieniu $R(\xi_k)$:

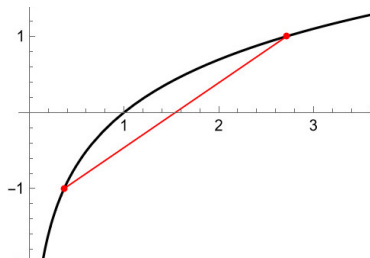
$$P_\Delta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R(\xi_k)^2 \Delta\varphi_k.$$

Przy średnicy podziału dążącej do zera otrzymujemy

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} R(\varphi)^2 d\varphi.$$

Uzasadnienie: na każdym przedziale kątów obszar leży między wycinkami o minimalnym i maksymalnym promieniu. Ciągłość R^2 sprawia, że odpowiadające im sumy dolne i górne dążą do tej samej całki.

Logarytm i sieczna: opis obszaru



Wyznaczamy pole między wykresem $y = \ln x$ a sieczną przechodzącą przez punkty

$$A = (e^{-1}, -1), \quad B = (e, 1).$$

Równanie siecznej to

$$\ell(x) = -1 + \frac{2}{e - e^{-1}}(x - e^{-1}).$$

Ponieważ $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$, logarytm jest wklęsły i na $[e^{-1}, e]$ leży nad odcinkiem AB .

Logarytm i sieczna: obliczenie pola

Pole jest równe różnicy całek:

$$|D| = \int_{e^{-1}}^e [\ln x - \ell(x)] dx.$$

Całka z funkcji liniowej jest iloczynem długości przedziału i średniej jej wartości na końcach, zatem

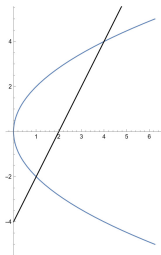
$$\int_{e^{-1}}^e \ell(x) dx = (e - e^{-1}) \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

Nie znaczy to, że pole między sieczną a osią jest zerowe: jej dodatni i ujemny wkład całkowy znoszą się.

Ponieważ $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$, dostajemy

$$\begin{aligned} |D| &= [x \ln x - x]_{e^{-1}}^e \\ &= (e - e) - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) = \boxed{\frac{2}{e}}. \end{aligned}$$

Parabola i prosta: granice obszaru



Obszar jest ograniczony parabolą $y^2 = 4x$ i prostą $y = 2x - 4$. Wygodniej zapisać obie krzywe jako funkcje zmiennej y :

$$x = \frac{y^2}{4}, \quad x = \frac{y}{2} + 2.$$

Punkty przecięcia spełniają

$$y^2 = 2y + 8 \iff (y - 4)(y + 2) = 0,$$

czyli są to $(1, -2)$ i $(4, 4)$.

Parabola i prosta: pole

Dla $y \in [-2, 4]$ prosta jest prawą, a parabola lewą granicą, ponieważ

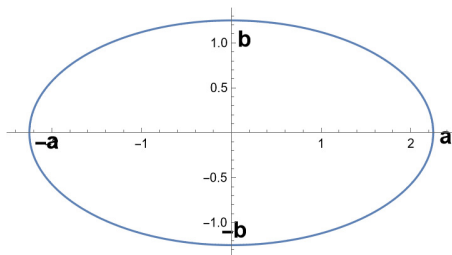
$$\frac{y}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} = -\frac{1}{4}(y-4)(y+2) \geq 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned}|D| &= \int_{-2}^4 \left(\frac{y}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} \right) dy \\&= \left[\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \right]_{-2}^4 \\&= \left(4 + 8 - \frac{16}{3} \right) - \left(1 - 4 + \frac{2}{3} \right) \\&= \frac{20}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{9}.\end{aligned}$$

Użycie pasków poziomych pozwala opisać cały obszar jedną całką.

Pole elipsy: parametryzacja



Elipsa o półosiach $a, b > 0$ ma równanie i parametryzację

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

W pierwszej ćwiartce $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Ze względu na symetrię całe pole jest czterokrotnością pola tej części:

$$P = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

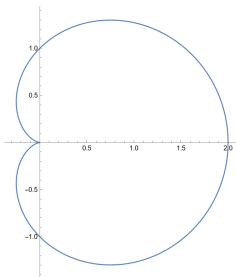
Pole elipsy: rachunki

Podstawiamy $x = a \cos t$. Gdy x rośnie od 0 do a , kąt t maleje od $\pi/2$ do 0. Ponadto $dx = -a \sin t \, dt$ i $\sin t \geq 0$.

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) \, dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt \\ &= 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= 2ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\pi ab}. \end{aligned}$$

Zmiana kolejności granic usuwa minus z różniczki. Dla $a = b = r$ otrzymujemy znany wzór πr^2 na pole koła.

Pole kardiody



Kardioida jest opisana równaniem biegunowym

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Promień jest nieujemny. Cały brzeg jest obiegany raz, a symetria względem osi OX pozwala podwoić pole górnej połowy:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

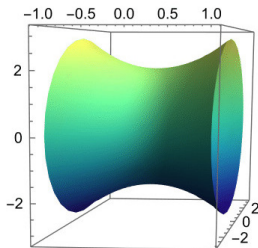
Pole kardiody: rozwinięcie całki

Rozwijamy kwadrat i stosujemy $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$:

$$\begin{aligned} P &= a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= a^2 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^\pi \\ &= \boxed{\frac{3}{2} \pi a^2}. \end{aligned}$$

Składniki sinusowe znikają na obu końcach przedziału. Całkujemy kwadrat promienia, ponieważ pole małego wycinka koła jest proporcjonalne do r^2 .

Objętość bryły obrotowej

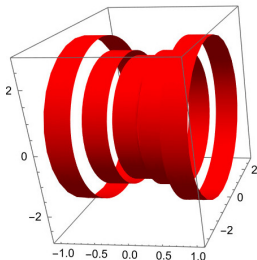


Niech $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ będzie ciągła. Obracamy wokół osi OX **obszar** $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Powstaje bryła ograniczona powierzchnią obrotową oraz przekrojami w płaszczyznach $x = a$ i $x = b$. Przekrój prostopadły do osi w punkcie x jest kołem o promieniu $f(x)$ i polu $\pi f(x)^2$.

Sam obrót wykresu tworzy powierzchnię boczną, czyli część brzegu tej bryły.

Przybliżenie objętości walcami

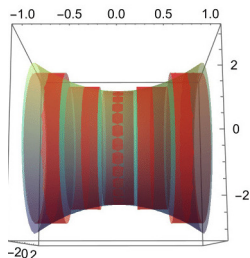


Dla podziału $a = x_0 < \dots < x_m = b$ wybieramy $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
Odpowiadający walec ma wysokość Δx_k i promień $f(\xi_k)$, więc

$$V_k = \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k, \quad V_\Delta = \pi \sum_{k=1}^m f(\xi_k)^2 \Delta x_k.$$

Wzór sumuje objętości cienkich walców ustawionych wzdłuż osi obrotu.

Od sumy walców do całki



Gdy średnica podziału dąży do zera, ciągłość f^2 zapewnia zbieżność sum Riemanna:

$$V = \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \pi \sum_k f(\xi_k)^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Wycinki bryły można oszacować od dołu i od góry walcami o minimalnym i maksymalnym promieniu. Oba oszacowania mają tę samą granicę.

Wzory na objętość bryły obrotowej

Obrót wokół osi OX . Dla ciągłej, nieujemnej funkcji f na $[a, b]$:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

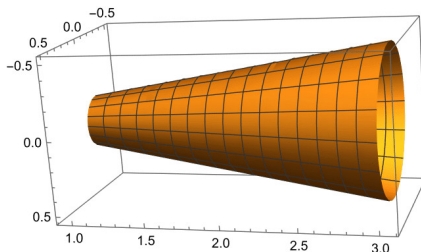
Obrót wokół osi OY . Jeżeli obszar jest opisany przez $c \leq y \leq d$ i $0 \leq x \leq g(y)$, gdzie g jest ciągła i nieujemna, to

$$V = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

W obu wzorach całkujemy pole przekroju prostopadłego do osi obrotu.

Jeżeli przekrój jest pierścieniem o promieniach $0 \leq r \leq R$, jego pole wynosi $\pi(R^2 - r^2)$. Wtedy pod całką występuje różnica kwadratów promieni, a nie kwadrat ich różnicy.

Stożek ścięty: model bryły



Niech $0 < a < b$ będą promieniami podstaw, a $h > 0$ wysokością stożka ściętego. Promień zmienia się liniowo:

$$f(x) = a + \frac{b-a}{h}x, \quad 0 \leq x \leq h.$$

Zatem

$$V = \pi \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x \right)^2 dx.$$

Rysunek przedstawia schemat bryły; w obliczeniach początek osi przyjmujemy przy podstawie o promieniu a .

Stożek ścięty: obliczenie objętości

Podstawiamy $t = a + \frac{b-a}{h}x$. Wtedy

$$dx = \frac{h}{b-a} dt, \quad x=0 \leftrightarrow t=a, \quad x=h \leftrightarrow t=b.$$

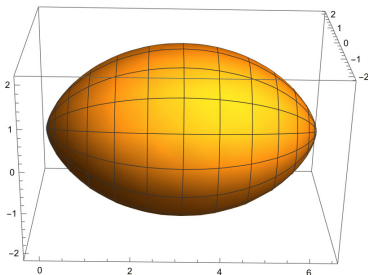
Stąd

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt = \frac{\pi h}{3(b-a)} (b^3 - a^3) \\ &= \boxed{\frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2)}. \end{aligned}$$

W ostatnim kroku użyliśmy rozkładu $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.

Dla $a=b$ otrzymujemy walec: bez podstawienia dzielącego przez $b-a$ mamy $V = \pi a^2 h$. Wzór końcowy daje tę samą wartość. Dla $a=0$ otrzymujemy wzór na objętość stożka.

Bryła pod łukiem cykloidy



Jeden łuk cykloidy jest opisany przez

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Obracamy wokół osi OX obszar między tym łukiem a osią. Ponieważ $x'(t) = a(1 - \cos t) \geq 0$ i x jest ściśle rosnąca, łuk jest wykresem funkcji $y = f(x)$ dla $0 \leq x \leq 2\pi a$.

Cykloida: całka na objętość

Korzystamy ze wzoru $V = \pi \int y^2 dx$ i parametryzacji:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\ &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Użyliśmy tożsamości $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$.

Podstawiamy $u = t/2$, $dt = 2 du$. Granice zmieniają się z $0, 2\pi$ na $0, \pi$, zatem

$$V = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 u du.$$

Pozostaje obliczyć całkę z szóstej potęgi sinusa.

Całka z potęgą sinusa: redukcja

Oznaczmy $J_n = \int_0^\pi \sin^n u \, du$. Dla całkowitego $n \geq 2$ całkowanie przez części daje

$$\begin{aligned} J_n &= [-\sin^{n-1} u \cos u]_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} u \cos^2 u \, du \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} u (1 - \sin^2 u) \, du \\ &= (n-1)(J_{n-2} - J_n). \end{aligned}$$

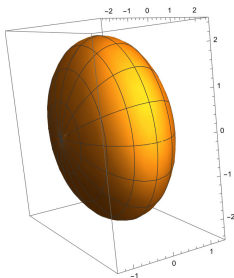
Wyrażenie brzegowe jest zerowe, zatem

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad J_0 = \pi.$$

W szczególności

$$J_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{5\pi}{16}, \quad \boxed{V = 16\pi a^3 J_6 = 5\pi^2 a^3}.$$

Elipsoida obrotowa



Obracamy wypełnioną elipsę $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$, $a, b > 0$, wokół osi OY .
Promień przekroju na wysokości y wynosi

$$g(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad -b \leq y \leq b.$$

Powstaje elipsoida o półosiach a, a, b , a jej objętość to

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy.$$

Elipsoida: obliczenie objętości

Funkcja podcałkowa jest parzysta, dlatego

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy \\ &= 2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_0^b \\ &= 2\pi a^2 \left(b - \frac{b}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi a^2 b}. \end{aligned}$$

Wynik ma wymiar objętości: występuje iloczyn trzech długości $a \cdot a \cdot b$.

Dla $a = b = r$ elipsoida jest kulą, a wzór upraszcza się do $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Krzywe gładkie i regularne

Krzywą parametryzowaną w $\mathbb{R}^n$ nazywamy ciągłe odwzorowanie

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad a < b.$$

W tym wykładzie krzywą nazywamy **gładką**, gdy wszystkie jej współrzędne są klasy C^1 na $[a, b]$.

Gładka parametryzacja jest **regularna**, jeżeli

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \text{dla każdego } t \in [a, b], \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n [x'_i(t)]^2 > 0.$$

Na końcach przedziału pochodne rozumiemy jednostronnie. Wektor $\gamma'(t)$ opisuje kierunek i szybkość przebiegania krzywej; regularność oznacza, że nie jest on zerowy.

Krzywe proste, zamknięte i płaskie

Krzywa prosta (zwykła) otwarta: parametryzacja γ jest różnowartościowa na całym $[a, b]$. W szczególności $\gamma(a) \neq \gamma(b)$.

Krzywa prosta zamknięta: $\gamma(a) = \gamma(b)$, a γ jest różnowartościowa na $[a, b)$. Jedynym dopuszczalnym powtórzeniem punktu jest więc wspólny początek i koniec.

Sama różnowartościowość na (a, b) nie wystarcza: trzeba także wykluczyć trafienie końca krzywej w punkt jej wnętrza.

Krzywa płaska: jej obraz jest zawarty w pewnej płaszczyźnie afinicznej. Każda krzywa w $\mathbb{R}^2$ jest płaska; krzywa opisana trzema współrzędnymi też może być płaska, np. $(\cos t, \sin t, 0)$.

Regularność, prostota i płaskość są różnymi własnościami i należy sprawdzać je oddzielnie.

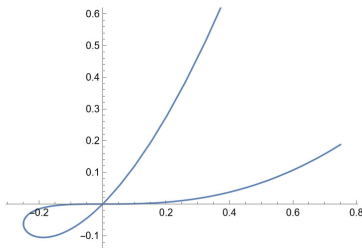
Krzywa z samoprzecięciem

Niech $\gamma(t) = (t + t^2, t^3 + t^4)$, $t \in [-3/2, 1/2]$.

$$\gamma'(t) = (1 + 2t, 3t^2 + 4t^3).$$

Pierwsza współrzędna pochodnej zeruje się tylko dla $t = -1/2$; wtedy druga wynosi $1/4 \neq 0$. Krzywa jest więc regularna.

Nie jest prosta, ponieważ $\gamma(-1) = \gamma(0) = (0, 0)$, a parametry -1 i 0 są różne i leżą wewnątrz przedziału.



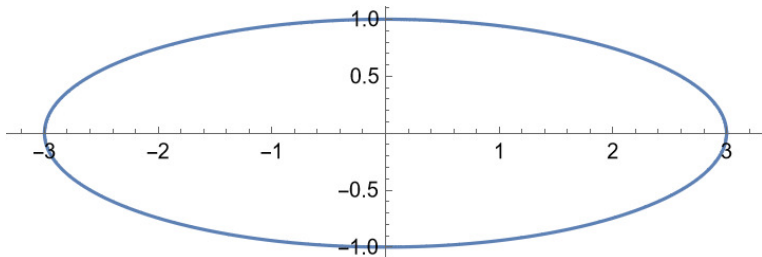
Rysunek ilustruje fragment krzywej w otoczeniu samoprzecięcia.

Elipsa jako krzywa regularna

Dla $\gamma(t) = (3 \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 9 \sin^2 t + \cos^2 t > 0.$$

Parametryzacja jest regularna. Para $(\cos t, \sin t)$ jest różnowartościowa na $[0, 2\pi)$, a $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, więc jest to krzywa prosta zamknięta.



Elipsa leży w $\mathbb{R}^2$, zatem jest płaska.

Krzywa prosta otwarta

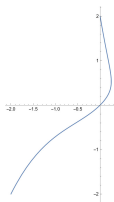
Niech $\gamma(t) = (t - t^2, t + t^5)$, $t \in [-1, 1]$.

$$\gamma'(t) = (1 - 2t, 1 + 5t^4).$$

Druga współrzędna pochodnej jest zawsze dodatnia. Wynikają z tego dwie własności:

- wektor pochodnej nigdy nie znika, więc krzywa jest regularna;
- funkcja $t + t^5$ jest ściśle rosnąca, więc γ jest różnowartościowa.

Końce to $\gamma(-1) = (-2, -2)$ i $\gamma(1) = (0, 2)$. Krzywa jest prosta otwarta i płaska.

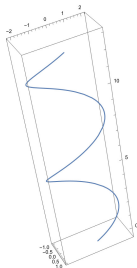


Linia śrubowa

Niech $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, 2 \cos t, 1), \quad \|\gamma'(t)\|^2 = \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1 > 0.$$

Krzywa jest regularna i różnowartościowa, ponieważ jej trzecia współrzędna jest ściśle rosnąca. Jest zatem prosta otwarta.



Dlaczego linia śrubowa nie jest płaska?

Gdyby obraz krzywej $(\cos t, 2 \sin t, t)$ leżał w płaszczyźnie, istniałyby liczby A, B, C, D , przy czym $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, takie, że

$$A \cos t + 2B \sin t + Ct = D \quad \text{dla wszystkich } t \in [0, 4\pi].$$

Dwukrotne różniczkowanie w przedziale otwartym daje

$$-A \cos t - 2B \sin t = 0.$$

Dla $t = \pi$ otrzymujemy $A = 0$, a dla $t = \pi/2$ – $B = 0$. Pierwotna równość przyjmuje więc postać $Ct = D$ dla wszystkich t , co wymusza $C = 0$ i $D = 0$.

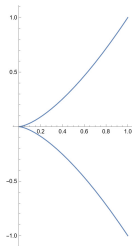
Otrzymaliśmy sprzeczność z $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Linia śrubowa nie jest płaska. Sam fakt użycia trzech współrzędnych nie byłby jeszcze wystarczającym uzasadnieniem.

Krzywa gładka nieregularna

Niech $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-3/2, 1/2]$. Jest to krzywa gładka i prosta otwarta: współrzędna t^3 jest ściśle rosnąca.

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2), \quad \gamma'(0) = (0, 0).$$

Parametryzacja nie jest regularna w $t = 0$. Jej obraz leży na krzywej $y^2 = x^3$, mającej ostrze w początku układu.



Ilustracja kształtu krzywej $y^2 = x^3$; zakres analizowanego parametru podano wyżej.

Długość krzywej: łamane wpisane

Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie ciągła. Wybieramy podział

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

i łączymy kolejne punkty $P_k = \gamma(t_k)$ odcinkami. Długość łamanej wpisanej wynosi

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

Długość i prostowalność

Długość krzywej definiujemy jako $L = \sup_\Delta L_\Delta$, gdzie supremum jest po wszystkich skończonych podziałach. Krzywa jest **prostowalna**, jeżeli $L < \infty$.

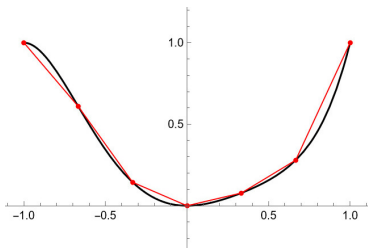
Dodanie punktów do podziału nie zmniejsza długości łamanej, co wynika z nierówności trójkąta.

Długość odcinka łamanej

Dla $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ klasy C^1 i $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ twierdzenie Lagrange'a, zastosowane osobno do współrzędnych, daje

$$\begin{aligned}\|P_k - P_{k-1}\| &= \sqrt{[x_1(t_k) - x_1(t_{k-1})]^2 + [x_2(t_k) - x_2(t_{k-1})]^2} \\ &= \sqrt{[x_1'(c_k)]^2 + [x_2'(d_k)]^2} \Delta t_k,\end{aligned}$$

gdzie $c_k, d_k \in (t_{k-1}, t_k)$. Punkty c_k i d_k nie muszą być równe.



Przejsie od łamanych do całki

Pochodne x'_1, x'_2 są jednostajnie ciągłe. Oznaczmy przez $\omega(\delta)$ największą z ich oscylacji między punktami oddalonymi najwyżej o δ . Wtedy $\omega(\delta) \rightarrow 0$.

Dla dowolnego $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ nierówność $|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$ daje

$$\left| \sqrt{x'_1(c_k)^2 + x'_2(d_k)^2} - \sqrt{x'_1(\xi_k)^2 + x'_2(\xi_k)^2} \right| \leq \sqrt{2} \omega(\delta).$$

Po pomnożeniu przez Δt_k i zsumowaniu:

$$\left| L_\Delta - \sum_k \|\gamma'(\xi_k)\| \Delta t_k \right| \leq \sqrt{2} \omega(\delta) (b - a) \rightarrow 0.$$

Drugi składnik jest sumą Riemanna ciągłej funkcji $\|\gamma'\|$. Zatem dla każdego normalnego ciągu podziałów

$$L_\Delta \rightarrow \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dlaczego granica jest długością?

Oznaczmy $I = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Z Newtona–Leibniza dla współrzędnych i nierówności trójkąta:

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Sumując, dostajemy $L_\Delta \leq I$ dla każdego podziału, czyli $L = \sup_\Delta L_\Delta \leq I$.

Z drugiej strony dla normalnego ciągu podziałów wykazaliśmy $L_{\Delta_n} \rightarrow I$. Ponieważ każda z liczb L_{Δ_n} jest nie większa niż supremum L , mamy $I \leq L$.

Ostatecznie $L = I < \infty$: każda krzywa klasy C^1 jest prostowalna. Nie jest potrzebny warunek $\gamma'(t) \neq 0$. □

Wzór na długość krzywej

Twierdzenie

Dla krzywej $\gamma = (x_1, \dots, x_n) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$:

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(t)]^2} dt.$$

W szczególności w dwóch i trzech wymiarach:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Dla krzywej kawałkami klasy C^1 sumujemy długości poszczególnych części. Przy wielokrotnym przebieganiu tej samej części wzór liczy długość z krotnością; dla krzywej prostej daje długość jej obrazu.

Długość wykresu funkcji

Niech $f \in C^1([a, b])$, $a < b$. Wykres parametryzujemy przez

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Parametryzacja jest różnowartościowa, ponieważ jej pierwsza współrzędna jest równa t . Jest też regularna:

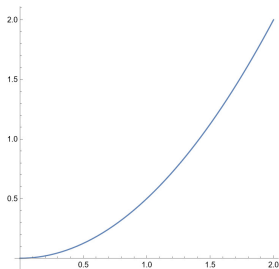
$$\gamma'(t) = (1, f'(t)), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \geq 1.$$

Z ogólnego wzoru otrzymujemy

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Czynnik pod pierwiastkiem zawiera **kwadrat** pochodnej. Długość jest co najmniej równa $b - a$, czyli długości rzutu wykresu na oś OX .

Długość łuku paraboli



Dla paraboli $y = x^2/2$, $x \in [0, a]$, gdzie $a > 0$, mamy $y' = x$. Zatem

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Aby obliczyć tę całkę, wyprowadzimy wzór na funkcję pierwotną, a następnie podstawimy obie granice.

Parabola: obliczenie długości

Niech $I = \int \sqrt{1+x^2} dx$. Całkując przez części,

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 1/\sqrt{1+x^2}$, otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] + C.$$

Dla $x = 0$ oba składniki w nawiasie są zerowe, więc

$$L = \frac{1}{2} \left[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2}) \right].$$

Argument logarytmu jest dodatni dla każdego rzeczywistego x .

Długość łuku cykloidy

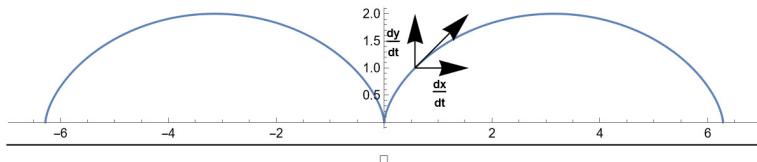
Dla $a > 0$ jeden łuk cykloidy ma parametryzację

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Pochodne wynoszą $x' = a(1 - \cos t)$ i $y' = a \sin t$, zatem

$$\begin{aligned}\sqrt{x'^2 + y'^2} &= a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2a \sin \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Ostatnia równość zachodzi, bo $t/2 \in [0, \pi]$.



Obliczamy długość jednego łuku; na ilustracji widać dwa sąsiednie łuki.

Cykloida: wynik i końce łuku

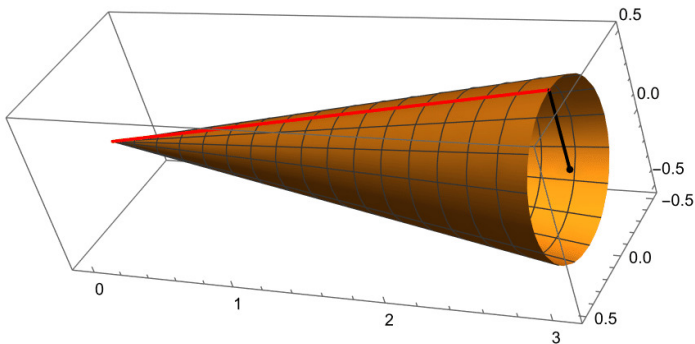
Całkujemy obliczoną długość wektora pochodnej:

$$\begin{aligned} L &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= [-4a \cos(t/2)]_0^{2\pi} \\ &= -4a \cos \pi + 4a \cos 0 = \boxed{8a}. \end{aligned}$$

W punktach $t = 0$ i $t = 2\pi$ obie pochodne są zerowe. Parametryzacja nie jest więc regularna na całym przedziale domkniętym.

Nie przeszkadza to w zastosowaniu wzoru na długość: współrzędne są klasy C^1 , a twierdzenie o długości nie wymaga niezerowej pochodnej. Łuk między kolejnymi ostrzami ma długość osiem razy większą od promienia toczącego się koła.

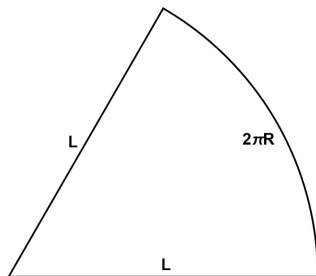
Pole powierzchni bocznej stożka



Rozpatrujemy stożek prosty o promieniu podstawy $R > 0$ i długości tworzącej L . Szukamy pola powierzchni bocznej, bez koła stanowiącego podstawę.

Po rozcięciu powierzchni wzdłuż tworzącej można ją rozwinąć na płaszczyznę w wycinek koła.

Stożek: rozwinięcie powierzchni



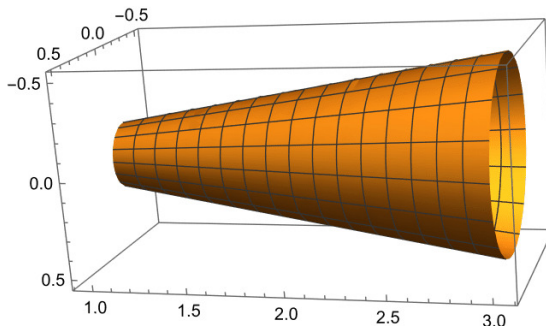
Promień wycinka wynosi L , a długość jego łuku to obwód podstawy $2\pi R$.
Jeżeli kąt wycinka to θ , mamy

$$L\theta = 2\pi R, \quad \theta = \frac{2\pi R}{L}.$$

Pole wycinka, a więc powierzchni bocznej stożka, jest równe

$$P = \frac{1}{2}L^2\theta = \pi RL.$$

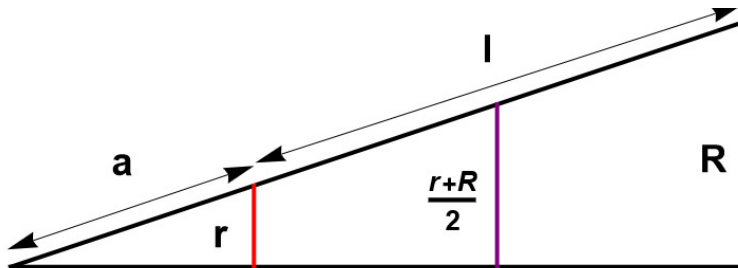
Powierzchnia stożka ściętego



Niech $0 < r < R$ będą promieniami podstaw, a $l > 0$ długością tworzącej stożka ściętego.

Przedłużamy tworzące do wspólnego wierzchołka. Otrzymujemy duży stożek i mniejszy stożek, którego powierzchnię boczną trzeba odjąć. Długość tworzącej mniejszego stożka oznaczmy przez a .

Stożek ścięty: podobieństwo

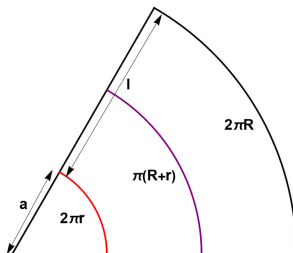


Z podobieństwa trójkątów w przekroju osiowym:

$$\frac{a}{r} = \frac{a+l}{R} \implies aR = ar + lr \implies a = \frac{lr}{R-r}.$$

Tutaj a oznacza pomocniczą długość tworzącej małego stożka. Tworząca dużego stożka ma długość $a + l$.

Stożek ścięty: pole boczne

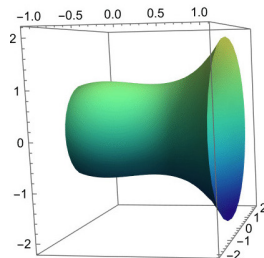
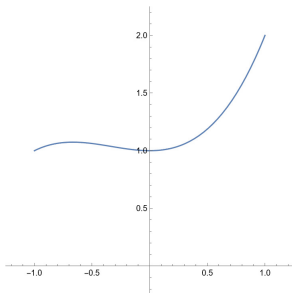


Odejmujemy pola boczne obu stożków:

$$\begin{aligned} P &= \pi R(a + l) - \pi r a = \pi Rl + \pi(R - r)a \\ &= \pi Rl + \pi l r = \boxed{\pi(R + r)l}. \end{aligned}$$

Równoważnie $P = 2\pi \frac{R+r}{2} l$: pole jest iloczynem obwodu odpowiadającego średniemu promieniowi i długości tworzącej. Dla $R = r$ otrzymujemy walec i ten sam wzór daje $2\pi Rl$.

Powierzchnia obrotowa wykresu

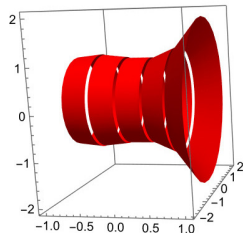
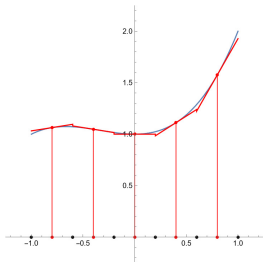


Niech $f \in C^1([a, b])$ i $f \geq 0$. Obrót **wykresu** $y = f(x)$ wokół osi OX tworzy powierzchnię obrotową.

Przybliżymy wykres łamaną. Obrót każdego jej odcinka daje powierzchnię boczną stożka ściętego, stożka albo walca. Suma ich pól będzie przybliżać pole powierzchni.

Obliczane pole nie obejmuje ewentualnych kół zamykających bryłę przy $x = a$ i $x = b$.

Powierzchnia: przybliżenie łamaną



Dla podziału $a = x_0 < \dots < x_m = b$ oznaczmy

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

Promienie podstaw k -tej części wynoszą $f(x_{k-1})$ i $f(x_k)$, a tworząca ma długość l_k . Jej **dokładne** pole to

$$P_k = \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]l_k, \quad P_\Delta = \sum_{k=1}^m P_k.$$

Powierzchnia: granica sum pól

Niech $\rho_k = [f(x_{k-1}) + f(x_k)]/2$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ takie, że

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k.$$

Zatem dokładnie

$$P_\Delta = 2\pi \sum_k \rho_k \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \Delta x_k.$$

Niech $K = \max_{[a,b]} \sqrt{1 + (f')^2}$, a $\omega_f(\delta)$ oznacza moduł ciągłości f . Mamy $|\rho_k - f(c_k)| \leq \omega_f(\delta)$, więc

$$\left| P_\Delta - 2\pi \sum_k f(c_k) \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \Delta x_k \right| \leq 2\pi K \omega_f(\delta)(b-a) \rightarrow 0.$$

Pozostała suma jest sumą Riemanna ciągłej funkcji. Dlatego

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Pole powierzchni: promień i oś

Promieniem obrotu jest odległość od osi, a więc liczba nieujemna. Dla wykresu $y = f(x)$, $f \in C^1([a, b])$, obracanego wokół OX :

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Dla wykresu $x = g(y)$, $g \in C^1([c, d])$, obracanego wokół OY :

$$P = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

Przy funkcjach nieujemnych można pominąć wartości bezwzględne. Dla funkcji zmieniającej znak wygodnie podzielić całkę w jej miejscach zerowych.

Oba wzory opisują pole powierzchni bocznej; ewentualne podstawy dodajemy osobno, jeśli zadanie dotyczy całego brzegu bryły.

Powierzchnia: zapis parametryczny

Dla krzywej $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, klasy C^1 (lub kawałkami C^1), element długości ma postać

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Przy obrocie wokół osi OX i OY odpowiednio:

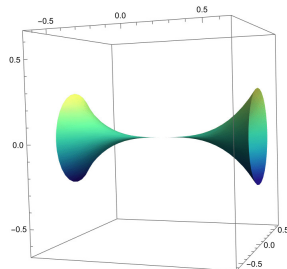
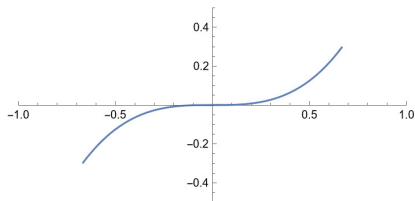
$$P_{OX} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

$$P_{OY} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Wzory dają zwykłe pole geometryczne, jeżeli powierzchnia jest pokrywana jednokrotnie (poza brzegami i zbiorami o polu zero). W przeciwnym razie liczą pole z krotnością.

Przykładowo wystarczy pojedynczy łuk z $y \geq 0$ i ściśle monotoniczną współrzędną x dla obrotu wokół OX . Obrót obu symetrycznych połówek zamkniętej krzywej może wytworzyć tę samą powierzchnię dwa razy.

Obrót wykresu funkcji sześcienniej



Obracamy łuk $y = x^3$, $x \in [-2/3, 2/3]$, wokół osi OX . Promień wynosi $|x^3|$, a $y' = 3x^2$, dlatego

$$P = 2\pi \int_{-2/3}^{2/3} |x|^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 4\pi \int_0^{2/3} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Użyliśmy parzystości funkcji podcałkowej. Części dla $x < 0$ i $x > 0$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $x = 0$, więc ich pola się sumują.

Funkcja sześcienna: obliczenie pola

Podstawiamy $t = 1 + 9x^4$, więc $dt = 36x^3 dx$. Nowe granice:

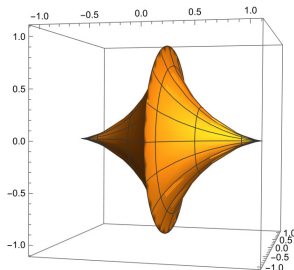
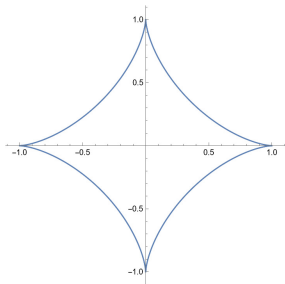
$$x = 0 \mapsto t = 1, \quad x = \frac{2}{3} \mapsto t = 1 + 9\frac{16}{81} = \frac{25}{9}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\pi}{36} \int_1^{25/9} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{9} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{25/9} \\ &= \frac{2\pi}{27} \left[\left(\frac{25}{9} \right)^{3/2} - 1 \right] \\ &= \frac{2\pi}{27} \left(\frac{125}{27} - 1 \right) = \boxed{\frac{196\pi}{729}}. \end{aligned}$$

Wartość $25/9$ musi występować zarówno w przeliczeniu granic, jak i w nowej całce.

Powierzchnia powstała z astroidy



Astroidę opisuje parametryzacja

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Po obrocie wokół osi OX górna i dolna połowa tworzą tę samą powierzchnię. Do obliczenia jej pola bierzemy tylko górną połowę, czyli $t \in [0, \pi]$.

Symetria względem płaszczyzny $x = 0$ pozwala obliczyć pole z łuku w pierwszej ćwiartce, $0 \leq t \leq \pi/2$, i pomnożyć je przez 2.

Astroida: element długości i promień

Na przedziale $[0, \pi/2]$ obie funkcje trygonometryczne są nieujemne. Mamy

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y' = 3a \sin^2 t \cos t,$$

więc

$$\begin{aligned}\sqrt{x'^2 + y'^2} &= 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} \\ &= 3a |\sin t \cos t| = 3a \sin t \cos t.\end{aligned}$$

Promieniem obrotu jest $y = a \sin^3 t$. Uwzględniając symetrię obu części górnej połowy, dostajemy

$$\begin{aligned}P &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t \, dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \, dt.\end{aligned}$$

Astroida: obliczenie pola

Stosujemy podstawienie

$$u = \sin t, \quad du = \cos t \, dt,$$

z granicami $t = 0 \leftrightarrow u = 0$ i $t = \pi/2 \leftrightarrow u = 1$:

$$\begin{aligned} P &= 12\pi a^2 \int_0^1 u^4 \, du \\ &= 12\pi a^2 \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \boxed{\frac{12}{5} \pi a^2}. \end{aligned}$$

Pochodne parametryzacji zerują się w ostrzach astroidy. Wzór stosujemy do gładkich łuków między ostrzami i sumujemy ich pola; punkty końcowe nie zmieniają całki.

Całkowanie po całym przedziale $[0, 2\pi]$ z promieniem $|y|$ dałoby dwa razy większą liczbę, ponieważ górna i dolna połowa wytwarzają tę samą powierzchnię.