

# Analiza, Wykład: Całki niewłaściwe

Wojciech Domitrz  
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

# Całki niewłaściwe I rodzaju (w przedziale nieskończonym)

Jeśli  $f \in R[a, b]$ , to  $f$  jest ograniczona na  $[a, b]$  i przedział  $[a, b]$  jest skończony.

# Całki niewłaściwe I rodzaju (w przedziale nieskończonym)

Jeśli  $f \in R[a, b]$ , to  $f$  jest ograniczona na  $[a, b]$  i przedział  $[a, b]$  jest skończony.

## Definicja (Całka niewłaściwa I-go rodzaju)

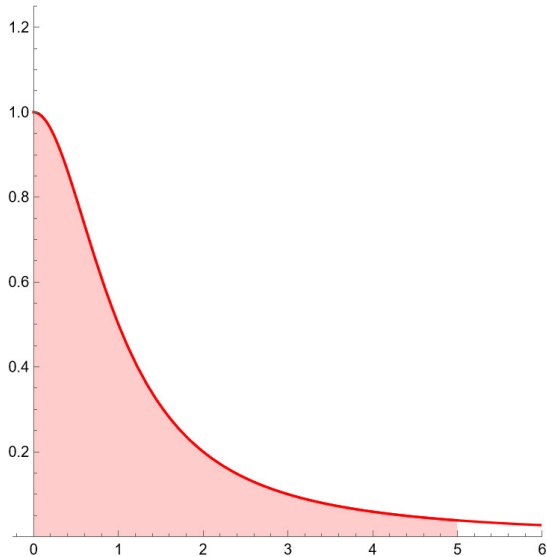
Założmy, że funkcja  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna w sensie Riemanna na  $[a, T]$  dla każdego  $T > a$ .

Jeśli istnieje granica właściwa (skończona):

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x) dx$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji  $f(x)$  w przedziale  $[a, +\infty)$  i oznaczamy  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ . Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa jest zbieżna. Jeśli powyższa granica nie istnieje lub jest niewłaściwa (równa  $\pm\infty$ ) to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

# Całki niewłaściwe I rodzaju



## Definicja

Dla funkcji  $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $f \in R[S, a]$  dla każdego  $S < a$ , całka niewłaściwa  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  to liczba

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

## Definicja

Dla funkcji  $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $f \in R[S, a]$  dla każdego  $S < a$ , całka niewłaściwa  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  to liczba

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , takiej, że  $f \in R[S, T]$  dla każdych  $S < T$ , całka niewłaściwa  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  to liczba

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

o ile obie całki niewłaściwe są zbieżne ( $c \in \mathbb{R}$ ).

Przykłady:

(1)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  jest zbieżna dla  $\alpha > 1$  i rozbieżna dla  $\alpha \leq 1$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^T =$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (T^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases} \quad \alpha \neq 1$$

$$\alpha = 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^T =$$
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \ln T = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \\
 &= \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{dx}{x^2+1} = \\
 &= \lim_{S \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_S^0 + \lim_{T \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^T = \\
 &= \lim_{S \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} S] + \lim_{T \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} T - \operatorname{arctg} 0] = \\
 &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^T = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - e^{-T}) = 1
 \end{aligned}$$



$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{\ln x}{x^3} dx = (\star)$$

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{\ln x}{x^3} dx &= \left\| \begin{array}{l} f = \ln x \quad g' = \frac{1}{x^3} \\ f' = \frac{1}{x} \quad g = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\| = -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^T + \frac{1}{2} \int_1^T \frac{dx}{x^3} = \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^T = -\frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\star) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2} \right] = \frac{1}{4}$$

bo korzystając z Twierdzenia de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\ln T}{2T^2} = \left\| H \right\| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{T}}{4T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{4T^2} = 0$$

# Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, T]$ ,  $\forall T > a$  oraz

$$\forall x \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x), \quad (1)$$

to ze zbieżności  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  wynika zbieżność  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

# Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, T]$ ,  $\forall T > a$  oraz

$$\forall x \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x), \quad (1)$$

to ze zbieżności  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  wynika zbieżność  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Dowód (1): Niech  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  oraz  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$  dla  $x \geq a$ . Wtedy z (1) wynika, że dla każdego  $T \geq a$

$$0 \leq F(T) \leq G(T). \quad (2)$$

Jeżeli całka  $\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} G(T)$  jest zbieżna to z (2) otrzymujemy  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} G(T)$ .  $\square$

# Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, T]$ ,  $\forall T > a$  oraz

$$\forall x \geq a \quad 0 \leq f(x) \leq g(x), \quad (1)$$

to ze zbieżności  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  wynika zbieżność  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Dowód (1): Niech  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  oraz  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$  dla  $x \geq a$ . Wtedy z (1) wynika, że dla każdego  $T \geq a$

$$0 \leq F(T) \leq G(T). \quad (2)$$

Jeżeli całka  $\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} G(T)$  jest zbieżna to z (2) otrzymujemy  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} G(T)$ .  $\square$

Wniosek

Przy założeniach poprzedniego twierdzenia jeżeli  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  jest rozbieżna to  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  jest rozbieżna.

## Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, T]$ ,  $\forall T > a$ ,  $f, g > 0$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

## Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, T]$ ,  $\forall T > a$ ,  $f, g > 0$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Uwaga:

Powyższe kryteria są również prawdziwe dla  $f, g : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g < 0$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq 0$ , wtedy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0, \quad K \in \mathbb{R}$$

Przykłady:

(1) Pokazać, że  $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin 2x) \cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} dx$  jest zbieżna

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq \frac{(3-\sin 2x) \cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3-\sin 2x}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  jest zbieżna ( $\alpha > 1$ )  $\Rightarrow$  całka zbieżna (K.P.)

Przykłady:

(1) Pokazać, że  $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin 2x) \cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} dx$  jest zbieżna

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq \frac{(3-\sin 2x) \cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3-\sin 2x}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  jest zbieżna ( $\alpha > 1$ )  $\Rightarrow$  całka zbieżna (K.P.)

(2) Zbadać zbieżność całki  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot [(x+1) \cdot \sqrt[3]{x} + 2x + 3]}{\ln(x+1) \cdot [x^2 \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3]} dx$

Ponieważ  $\frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$  to przyjmujemy  $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$ ,  $f, g > 0$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \frac{[(x+1)\sqrt[3]{x}+2x+3] \cdot x^{\frac{7}{6}}}{x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{13}{6}}+3x^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+3} = \frac{\pi}{2} \in (0, +\infty)
 \end{aligned}$$

bo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \parallel H \parallel = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

i całka  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$  jest zbieżna ( $\alpha > 1$ )  $\Rightarrow$  całka zbieżna (K.I.).

## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna i  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  jest rozbieżna.

## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna i  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  jest rozbieżna.

## Twierdzenie

Jeśli  $f \in R[a, T]$  i całka  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  jest zbieżna, to całka  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna.

Przykład:

Zbadać zbieżność całki  $\int_1^{+\infty} \operatorname{tgh} x \cdot \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{2+x^2} dx$

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq |f(x)| = |\operatorname{tgh} x| \cdot |\cos 2x| \cdot \frac{\sqrt{x}}{2+x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

i całka  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$  jest zbieżna ( $\alpha > 1$ )  $\Rightarrow$

całka bezwzględnie zbieżna (K.P.)  $\Rightarrow$  całka zbieżna (Tw.)

# Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

## Definicja

Jeśli  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f \in R[a, b]$  dla dowolnego  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

to tę granicę nazywamy *wartością główną* całki  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  i oznaczamy *P.V.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  lub  $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

## Definicja

Jeśli  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f \in R[a, b]$  dla dowolnego  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

to tę granicę nazywamy *wartością główną* całki  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  i oznaczamy *P.V.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  lub  $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

Uwaga:

Jeśli całka niewłaściwa  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna, to istnieje jej wartość główna  $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Implikacja przeciwna nie zachodzi.



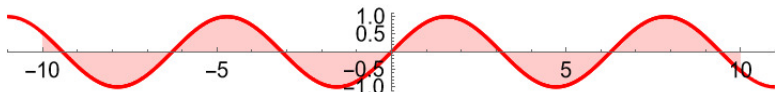
Przykłady:

(1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = \int_{-\infty}^0 \sin x \, dx + \int_0^{+\infty} \sin x \, dx$  - rozbieżna, bo

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \sin x \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - \cos T) - \text{nie istnieje}$$

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \sin x \, dx =$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_{-T}^T = -\lim_{T \rightarrow +\infty} [\cos T - \cos(-T)] = 0$$



(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx$  - całka rozbieżna, bo

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{2x+1}{x^2+1} dx =$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x] \Big|_0^T =$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} [[\ln(T^2 + 1) + \operatorname{arctg} T] - 1] = +\infty$$

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{2x+1}{x^2+1} dx =$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x] \Big|_{-T}^T = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx$  - całka rozbieżna, bo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x] \Big|_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [[\ln(T^2 + 1) + \operatorname{arctg} T]] = +\infty \\ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x] \Big|_{-T}^T &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

(3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$  - całka rozbieżna, bo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \cos x dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sin T - \text{granica nie istnieje} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \cos x dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_{-T}^T = \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} [\sin T - \sin(-T)] &= \lim_{T \rightarrow +\infty} 2 \sin T - \text{wartość główna} \\ \text{całki też nie istnieje} \end{aligned}$$

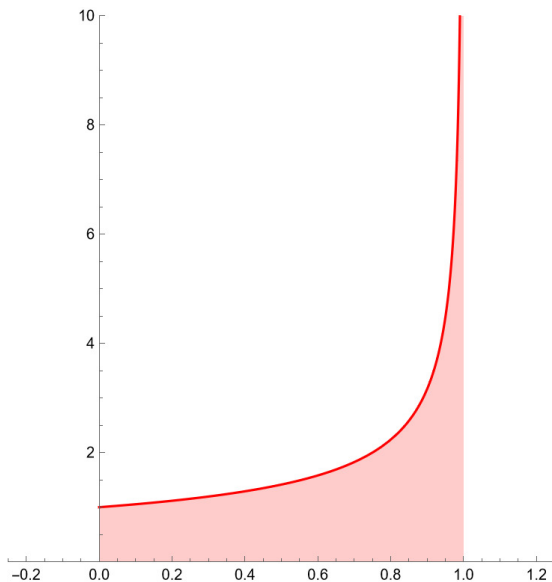
## Definicja (całka niewłaściwa II rodzaju)

Jeśli  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu  $b$  ( $b - \varepsilon, b$ ) i  $f \in R[a, c]$  dla każdego  $a < c < b$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b)$  i oznaczamy  $\int_a^b f(x) dx$ . Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa jest zbieżna. Jeśli powyższa granica nie istnieje lub jest niewłaściwa (równa  $\pm\infty$ ) to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

# Całki niewłaściwe II rodzaju



Analogicznie definiujemy:

## Definicja

Dla funkcji  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nieograniczonej w prawostronnym sąsiedztwie  $a$  czyli w przedziale  $(a, a + \varepsilon)$ , takiej, że  $f \in R[d, b]$  dla każdego  $a < d < b$  całka niewłaściwa  $\int_a^b f(x) dx$  to liczba

$$\lim_{d \rightarrow a^+} \int_d^b f(x) dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Przykłady:

(1)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  jest zbieżna dla  $\alpha < 1$  i rozbieżna dla  $\alpha \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^1 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} (1 - c^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \quad \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1 : \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_c^1 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty \end{aligned}$$

Przykłady:

(1)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  jest zbieżna dla  $\alpha < 1$  i rozbieżna dla  $\alpha \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^1 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} (1 - c^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \quad \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1: \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_c^1 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_{-1}^a \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} (-2\sqrt{-x}) \Big|_{-1}^a + \lim_{b \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x}) \Big|_b^1 = 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -1^+} \arcsin x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -1^+} \arcsin x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left\| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ x = 0 \iff t = 0 \\ x = 2 \iff t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\| = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t} dt =$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \sin t dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \\ t = 0 \iff u = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \iff u = 0 \end{array} \right\| = -8 \int_1^0 (1 - u^2) du =$$

$$= 8 \int_0^1 (1 - u^2) du = 8 \left[ u - \frac{u^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{16}{3}$$

Uwaga:

W tym przykładzie w wyniku zamiany zmiennej całkowania dana całka niewłaściwa została przekształcona w całkę właściwą, którą obliczamy bez stosowania przejścia granicznego.

Może się też zdarzyć sytuacja odwrotna: przy zamianie zmiennej całkowania całka właściwa może stać się całką niewłaściwą.

Uwaga:

W tym przykładzie w wyniku zamiany zmiennej całkowania dana całka niewłaściwa została przekształcona w całkę właściwą, którą obliczamy bez stosowania przejścia granicznego.

Może się też zdarzyć sytuacja odwrotna: przy zamianie zmiennej całkowania całka właściwa może stać się całką niewłaściwą.

### Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  są nieograniczone w lewostronnym sąsiedztwie punktu  $b$  i  $f, g \in R[a, c], \forall c < b$  oraz  $\forall x \in [a, b) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ , to:

(1)  $\int_a^b g(x) dx$  jest zbieżna  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna,

(2)  $\int_a^b f(x) dx$  jest rozbieżna  $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$  jest rozbieżna.

## Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, c]$ ,  $\forall c < b$ ,  $f, g > 0$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki  $\int_a^b f(x) dx$  i  $\int_a^b g(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

## Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in R[a, c]$ ,  $\forall c < b$ ,  $f, g > 0$  oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki  $\int_a^b f(x) dx$  i  $\int_a^b g(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Uwaga:

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla

$f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g < 0$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq 0$ , wtedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0, \quad K \in \mathbb{R}$$

## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^b f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^b f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna i  $\int_a^b |f(x)| dx$  jest rozbieżna.



## Definicja

Całkę zbieżną  $\int_a^b f(x) dx$  nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna i  $\int_a^b |f(x)| dx$  jest rozbieżna.

## Twierdzenie

Jeśli  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R[a, c] \quad \forall c < b$  i całka  $\int_a^b |f(x)| dx$  jest zbieżna, to całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna.

Przykłady:

(1) Pokazać, że całka  $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  jest zbieżna bezwzględnie.

$$\forall x \in (0, 1] \quad 0 \leq \left| \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  jest zbieżna ( $\alpha < 1$ )  $\Rightarrow$  całka bezwzględnie zbieżna (K.P.).

Przykłady:

(1) Pokazać, że całka  $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  jest zbieżna bezwzględnie.

$$\forall x \in (0, 1] \quad 0 \leq \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  jest zbieżna ( $\alpha < 1$ )  $\Rightarrow$  całka bezwzględnie zbieżna (K.P.).

(2) Zbadać zbieżność całki  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\operatorname{ctg} x) dx$

$$f(x) = \ln(\operatorname{ctg} x), \quad g(x) = \ln \frac{1}{x}, \quad f, g > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{x}{\sin x} =$$

$$= 1 = K > 0$$

Stąd obie całki  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\operatorname{ctg} x) dx$  i  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln \frac{1}{x} dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln \frac{1}{x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln x dx = -\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{6}} \ln x dx =$$

$$= -\lim_{a \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_a^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \ln \frac{\pi}{6} + a \ln a - a \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \ln \frac{\pi}{6}$$

bo

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a \cdot \ln a = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = \parallel H \parallel = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-a) = 0$$

więc całka jest zbieżna.

(3) Pokazać, że całka  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$  jest zbieżna bezwzględnie.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \| H \| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 = K$$

$$f(x) = -\ln(\sin x), \quad g(x) = -\ln x, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \text{ i}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} (-\ln x) dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} [-x \ln x + x] \Big|_a^{\frac{1}{2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( a \ln a - a - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Z kryterium ilorazowego zbieżna jest całka  $\int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln \sin x) dx$ .

Wynika stąd zbieżność całek  $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin x \, dx$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$  oraz  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\ln(\sin x)] \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin x)| \, dx$ , stąd otrzymujemy zbieżność bezwzględną.

# Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju

## Definicja

Jeśli funkcja  $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest R - całkowna w przedziałach domkniętych  $[a, c - \varepsilon]$  i  $[c + \varepsilon, b]$  dla każdego (dowolnie małego)  $\varepsilon > 0$  oraz istnieje granica właściwa (skończona)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] =$$

to granicą nazywamy *wartością główną* całki  $\int_a^b f(x) dx$  i oznaczamy symbolem *P.V.*  $\int_a^b f(x) dx$  lub  $P \int_a^b f(x) dx$ .



# Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju

Uwaga:

Jeśli całka niewłaściwa  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna, to istnieje jej wartość główna  $P \int_a^b f(x) dx$  i jest równa całce niewłaściwej. Implikacja przeciwna nie zachodzi.

Przykład:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} - \text{rozbieżna, bo } \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} P \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln|-\varepsilon| - \ln|\varepsilon|] = 0 \end{aligned}$$

# Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju

