

Analiza

Całki niewłaściwe

Wojciech Domitrz

Slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

2026

Od całki właściwej do niewłaściwej

Właściwą całkę Riemanna $\int_a^b f(x) dx$ rozpatrujemy na przedziale o skończonych końcach. Całkowalność Riemanna wymaga ograniczoności f na tym przedziale.

Całki niewłaściwe pozwalają badać dwa inne przypadki:

- **I rodzaj:** przedział całkowania jest nieograniczony;
- **II rodzaj:** funkcja jest nieograniczona w pobliżu skończonego końca przedziału lub punktu wewnętrznego.

Najpierw obliczamy całki właściwe po przedziałach omijających problematyczne końce lub punkty, a następnie badamy granice.

Najważniejsze rozróżnienie

Całka niewłaściwa jest **zbieżna**, gdy odpowiednia granica jest skończoną liczbą rzeczywistą. Granica $+\infty$ lub $-\infty$ oznacza rozbieżność, podobnie jak brak granicy.

Całka na przedziale nieograniczonym

Niech $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowna Riemanna na $[a, T]$ dla **każdego** $T > a$.

Całka niewłaściwa I rodzaju

Jeżeli istnieje skończona granica, definiujemy

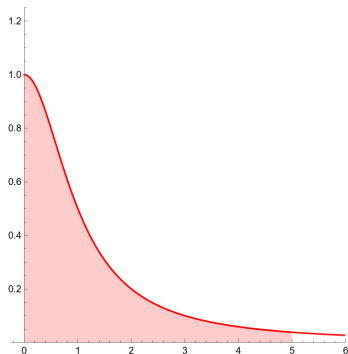
$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx.$$

Wtedy mówimy, że całka jest zbieżna. W pozostałych przypadkach jest rozbieżna.

Zapis $\int_a^\infty f = +\infty$ jest skrótem stwierdzenia, że całka rozbiega się do $+\infty$. Nie oznacza zbieżności do liczby rzeczywistej.

Warunek całkowności na każdym skończonym odcinku zapewnia, że jedynym badanym problemem jest zachowanie funkcji przy $x \rightarrow \infty$.

Całka I rodzaju: interpretacja



Dla $f \geq 0$ całki $\int_a^T f(x) dx$ opisują pola coraz większych części obszaru pod wykresem. Pole całego nieograniczonego obszaru może być skończone.

O zbieżności decyduje granica tych pól, a nie sama nieograniczoność przedziału.

Całka od minus nieskończoności

Niech $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $f \in R[S, a]$ dla każdego $S < a$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Całkę na lewym nieograniczonym przedziale można sprowadzić do prawego przez podstawienie $x = -t$. Dla skończonego $S < a$:

$$\int_S^a f(x) dx = \int_{-a}^{-S} f(-t) dt.$$

Ponieważ $-S \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-a}^{\infty} f(-t) dt$$

wtedy i tylko wtedy, gdy te całki są zbieżne.

Całka na całej prostej

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalna Riemanna na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym. Wybieramy dowolne $c \in \mathbb{R}$.

Definicja

Całka na całej prostej jest zbieżna, jeśli **obie** całki połówkowe są zbieżne. Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Każda z dwóch granic musi istnieć oddzielnie i być skończona. Nie wolno nadawać wartości wyrażeniu $-\infty + \infty$ przez wzajemne znoszenie rozbieżności.

Wybór c nie wpływa na zbieżność ani wynik: zmiana c dodaje do jednej całki całkę właściwą na skończonym odcinku, a odejmuje ją od drugiej.

Dwie niezależne granice

Przy zbieżności obu całek połówkowych zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{S \rightarrow -\infty \\ T \rightarrow \infty}} \int_S^T f(x) dx,$$

gdzie S i T zmieniają się **niezależnie**.

Sprawdzenie tylko granicy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

jest słabszym warunkiem: końce są tu ze sobą związane. Taka symetryczna granica, jeśli jest skończona, nazywa się **wartością główną Cauchy'ego**.

Wartość główna może istnieć mimo rozbieżności całki niewłaściwej.

Przykłady tego zjawiska omówimy osobno.

Całka potęgowa w nieskończoności

Badamy $I_\alpha = \int_1^\infty x^{-\alpha} dx$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dla $\alpha \neq 1$ i $T > 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^T x^{-\alpha} dx &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^T \\ &= \frac{T^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Jeżeli $\alpha > 1$, to $1 - \alpha < 0$ i $T^{1-\alpha} \rightarrow 0$. Zatem

$$I_\alpha = \frac{-1}{1-\alpha} = \boxed{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Jeżeli $\alpha < 1$, to $T^{1-\alpha} \rightarrow \infty$, a mianownik $1 - \alpha$ jest dodatni. Całka rozbiega się wtedy do $+\infty$.

Całka potęgowa: przypadek graniczny

Dla $\alpha = 1$ poprzedni wzór nie ma zastosowania, ponieważ jego mianownik jest zerowy. Liczymy oddzielnie:

$$\int_1^T \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^T = \ln T \rightarrow +\infty.$$

Ostatecznie

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha > 1.$$

Dlaczego granica funkcji nie wystarcza?

Funkcja $1/x$ dąży do zera, ale jej całka na $[1, \infty)$ jest rozbieżna. Sama informacja $f(x) \rightarrow 0$ nie zapewnia zbieżności całki.

Całki potęgowe stanowią podstawowy wzorec w kryteriach porównawczych.

Przykład: całka z funkcji wymiernej

Obliczamy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Rozdzielamy ją w 0 i badamy obie granice:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{s \rightarrow -\infty} [\arctan x]_s^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^t = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Obie całki są zbieżne, więc ich suma jest dobrze określona:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.}$$

Użyliśmy granic $\arctan x \rightarrow \pm\pi/2$ przy $x \rightarrow \pm\infty$.

Przykład: funkcja wykładnicza

Dla każdego $T > 0$ mamy

$$\int_0^T e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^T = 1 - e^{-T}.$$

Ponieważ $e^{-T} \rightarrow 0$ przy $T \rightarrow \infty$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - e^{-T}) = 1.$$

Całka jest zbieżna. Funkcja jest nieujemna, więc jej całka jest jednocześnie skończonym polem nieograniczonego obszaru pod wykresem.

Nie podstawiamy symbolu ∞ jak liczby do funkcji pierwotnej; zapis z granicą wyjaśnia, co oznacza obliczenie wartości na nieograniczonym przedziale.

Całkowanie przez części przed granicą

Obliczamy $I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx$. Najpierw ustalamy $T > 1$ i całkujemy na $[1, T]$ przez części:

$$u = \ln x, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v' = x^{-3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{\ln x}{x^3} dx &= \left[-\frac{\ln x}{2x^2} \right]_1^T + \frac{1}{2} \int_1^T x^{-3} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} \right]_1^T \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2}. \end{aligned}$$

Teraz trzeba uzasadnić granice obu składników zależnych od T .

Całkowanie przez części: granica

Mamy $1/(4T^2) \rightarrow 0$. Druga granica ma postać nieoznaczoną ∞/∞ , więc stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln T}{2T^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1/T}{4T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned} I &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Całkowanie przez części wykonaliśmy dla całki właściwej. Dopiero późniejsze przejście do granicy dowodzi zbieżności całki niewłaściwej i wyznacza jej wartość.

Kryterium porównawcze

Niech $f, g \in R[a, T]$ dla każdego $T > a$ oraz

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (x \geq a).$$

Wtedy:

- ze zbieżności $\int_a^\infty g(x) dx$ wynika zbieżność $\int_a^\infty f(x) dx$;
- z rozbieżności $\int_a^\infty f(x) dx$ wynika rozbieżność $\int_a^\infty g(x) dx$.

Kierunek porównania

Zbieżność przenosimy z **większej funkcji nieujemnej** na mniejszą.

Rozbieżność przenosimy z **mniejszej funkcji nieujemnej** na większą.

Wystarczy, aby nierówność zachodziła od pewnego $A \geq a$: całki na skończonym odcinku $[a, A]$ są właściwe i nie wpływają na zbieżność.

Kryterium porównawcze: dowód

Niech $F(T) = \int_a^T f(x) dx$ i $G(T) = \int_a^T g(x) dx$. Z nieujemności funkcji wynika, że F i G są niemalejące, ponieważ dla $T_2 > T_1$:

$$F(T_2) - F(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} f(x) dx \geq 0.$$

Jeśli $G(T) \rightarrow L < \infty$, to

$$0 \leq F(T) \leq G(T) \leq L \quad (T \geq a).$$

Funkcja F jest zatem niemalejąca i ograniczona z góry. Ma skończoną granicę równą $\sup_{T \geq a} F(T)$, co dowodzi zbieżności całki z f .

Drugi wniosek jest kontrapozycją pierwszego. Dla funkcji nieujemnej rozbieżność oznacza dążenie całek częściowych do $+\infty$. □

Samo ograniczenie $0 \leq F(T) \leq G(T)$ bez monotoniczności nie uzasadniałoby istnienia granicy $F(T)$.

Kryterium porównawcze graniczne

Niech f, g będą całkowalne Riemanna na każdym $[a, T]$ i dodatnie dla dostatecznie dużych x . Załóżmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < \infty.$$

Wtedy całki

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{ i } \quad \int_a^{\infty} g(x) dx$$

są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

Kryterium to bywa nazywane **ilorazowym**. Liczba K musi być skończona i ściśle dodatnia. Przy $K = 0$ lub $K = \infty$ nie otrzymujemy ogólnej równoważności.

Gdy $f(x)$ zachowuje się jak stała dodatnia razy prostsza funkcja $g(x)$, badanie zbieżności można sprowadzić do tej prostszej funkcji.

Kryterium ilorazowe: uzasadnienie

Z granicy $f(x)/g(x) \rightarrow K > 0$ wynika, że dla dostatecznie dużych x :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \frac{K}{2}.$$

Stąd

$$\frac{K}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3K}{2} g(x).$$

Jeżeli całka z g jest zbieżna, to prawa nierówność i kryterium porównawcze dają zbieżność całki z f .

Jeżeli całka z f jest zbieżna, to lewa nierówność daje

$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{K} f(x),$$

więc całka z g też jest zbieżna. Otrzymaliśmy oba kierunki równoważności. $\square$

Kierunek granicy i znak funkcji

Oba kryteria działają również przy $x \rightarrow -\infty$, po przyjęciu lokalnej całkowalności i badaniu lewego końca przedziału. Kierunek nieskończoności nie narzuca znaku funkcji.

Dla funkcji niedodatnich najpierw zmieniamy znaki. Jeżeli

$$f(x) \leq g(x) \leq 0, \quad \text{to} \quad 0 \leq -g(x) \leq -f(x).$$

Dlatego w kryterium porównawczym:

- ze zbieżności całki z f wynika zbieżność całki z g ;
- z rozbieżności całki z g wynika rozbieżność całki z f .

Dla $f, g < 0$ graniczne kryterium ilorazowe stosujemy do $-f, -g$. Iloraz się nie zmienia, więc warunek $f/g \rightarrow K \in (0, \infty)$ nadal daje równoważność zbieżności.

Porównanie: funkcja z sinusem

Badamy całkę

$$\int_1^{\infty} \frac{(3 - \sin 2x)x}{5(x+1)(x^2+1)} dx.$$

Dla $x \geq 1$ mamy $0 < x/(x+1) \leq 1$ i $2 \leq 3 - \sin 2x \leq 4$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3 - \sin 2x}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \\ &\leq \frac{4}{5(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$, kryterium porównawcze daje zbieżność badanej całki.

Nie trzeba obliczać funkcji pierwotnej: wystarczy dodatnie, całkowne oszacowanie.

Iloraz: wybór funkcji porównawczej

Badamy całkę $\int_2^{\infty} f(x) dx$, gdzie

$$f(x) = \frac{\ln x \arctan(x^2) [(x+1)\sqrt[3]{x} + 2x + 3]}{\ln(x+1) [x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3]}.$$

Funkcja jest ciągła i dodatnia na $[2, \infty)$. Główne potęgi w nawiasach to $x^{4/3}$ i $x^{5/2}$, a ich iloraz wynosi

$$\frac{x^{4/3}}{x^{5/2}} = x^{-7/6}.$$

Przyjmujemy więc $g(x) = x^{-7/6}$. Ponieważ $7/6 > 1$, całka z g na $[2, \infty)$ jest zbieżna.

Pozostaje sprawdzić, że $f(x)/g(x)$ ma skończoną, dodatnią granicę.

Iloraz: obliczenie granicy

Po pomnożeniu licznika przez $x^{7/6}$ otrzymujemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \arctan(x^2) \frac{x^{5/2} + x^{3/2} + 2x^{13/6} + 3x^{7/6}}{x^{5/2} + 2x^{1/2} + 3}.$$

Ostatni ułamek, po podzieleniu przez $x^{5/2}$, ma postać

$$\frac{1 + x^{-1} + 2x^{-1/3} + 3x^{-4/3}}{1 + 2x^{-2} + 3x^{-5/2}} \rightarrow 1.$$

Ponadto, stosując regułę de l'Hospitala do postaci ∞/∞ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 1, \quad \arctan(x^2) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Zatem $f(x)/g(x) \rightarrow \pi/2 \in (0, \infty)$. Kryterium ilorazowe dowodzi **zbieżności** badanej całki.

Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Zakładamy $f \in R[a, T]$ dla każdego $T > a$.

Zbieżność bezwzględna

Całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest bezwzględnie zbieżna, jeżeli

$$\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

Zbieżność warunkowa

Całka jest warunkowo zbieżna, jeżeli $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, lecz $\int_a^\infty |f(x)| dx$ jest rozbieżna.

Nie każda całka, która nie jest bezwzględnie zbieżna, jest warunkowo zbieżna: najpierw trzeba wykazać zbieżność całki z f .

W przypadku funkcji zmieniającej znak dodatnie i ujemne wkłady mogą zapewniać zbieżność, której nie ma po zastąpieniu f przez $|f|$.

Zbieżność bezwzględna daje zbieżność

Twierdzenie. Jeśli $f \in R[a, T]$ dla każdego $T > a$ i całka z $|f|$ jest zbieżna, to całka z f jest zbieżna.

Dowód. Wprowadzamy części dodatnią i ujemną:

$$f_+ = \max(f, 0) = \frac{|f| + f}{2}, \quad f_- = \max(-f, 0) = \frac{|f| - f}{2}.$$

Są one lokalnie całkowalne Riemanna oraz $0 \leq f_+, f_- \leq |f|$. Z kryterium porównawczego obie całki $\int_a^\infty f_+$ i $\int_a^\infty f_-$ są zbieżne.

Ponieważ $f = f_+ - f_-$, dla skończonego T mamy

$$\int_a^T f = \int_a^T f_+ - \int_a^T f_-.$$

Obie granice po prawej są skończone, więc granica po lewej istnieje. Ponadto, przechodząc do granicy w nierówności dla całek właściwych,

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Przykład z tangensem hiperbolicznym

Badamy całkę

$$\int_1^{\infty} \tanh x \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{2+x^2} dx.$$

Tangens hiperboliczny to $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. Dla $x \geq 1$ mamy $|\tanh x| \leq 1$, $|\cos 2x| \leq 1$ oraz $2+x^2 \geq x^2$, więc

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x)| &= |\tanh x| |\cos 2x| \frac{\sqrt{x}}{2+x^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}. \end{aligned}$$

Całka porównawcza jest zbieżna:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2.$$

Stąd badana całka jest **bezwzględnie zbieżna**, a więc także zbieżna.

Przykład zbieżności warunkowej

Aby zilustrować różnicę obu pojęć, rozważmy

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dla skończonego $T > 1$ całkowanie przez części daje

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^T - \int_1^T \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos T}{T} - \int_1^T \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Mamy $\cos T/T \rightarrow 0$, a całka z $\cos x/x^2$ jest bezwzględnie zbieżna, ponieważ

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Prawa strona ma więc skończoną granicę. To dowodzi zbieżności I .

Dlaczego zbieżność jest warunkowa?

Dla każdego całkowitego $k \geq 1$ i $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ mamy $1/x \geq 1/((k+1)\pi)$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{2}{(k+1)\pi}.\end{aligned}$$

Sumując po $k = 1, \dots, N$, otrzymujemy

$$\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty,$$

ponieważ szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Całka z $|\sin x|/x$ jest zatem rozbieżna, podczas gdy całka z $\sin x/x$ jest zbieżna. Oznacza to **zbieżność warunkową**.

Wartość główna na całej prostej

Niech f będzie całkowna Riemanna na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym. Jeżeli istnieje skończona granica, definiujemy

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

Jest to wartość główna Cauchy'ego, oznaczana także $P \int$ lub $\text{P.V.} \int$.

Jeżeli zwykła całka niewłaściwa na całej prostej jest zbieżna, to jej wartość główna istnieje i jest jej równa: można dodać skończone granice obu całek połówkowych.

Implikacja odwrotna nie zachodzi. Wartość główna wymaga symetrycznego obcinania przedziału i może wykorzystywać znoszenie się dwóch rozbieżnych wkładów.

Sinus: rozbieżność całki

Badamy całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$. Już prawa całka połówkowa jest rozbieżna, ponieważ

$$\int_0^T \sin x \, dx = [-\cos x]_0^T = 1 - \cos T.$$

Ta funkcja nie ma granicy dla $T \rightarrow \infty$:

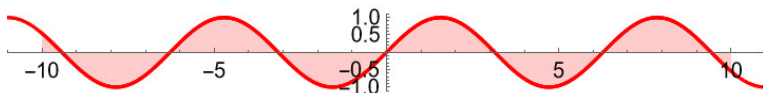
$$T = 2n\pi \implies 1 - \cos T = 0,$$

$$T = (2n + 1)\pi \implies 1 - \cos T = 2.$$

Dwa ciągi argumentów dążące do nieskończoności dają różne granice wartości. W konsekwencji całka niewłaściwa na całej prostej jest rozbieżna.

Nie zapisujemy jej jako sumy dwóch istniejących liczb, ponieważ wymagane całki połówkowe nie są zbieżne.

Sinus: wartość główna



Dla każdego skończonego $T > 0$, dzięki nieparzystości sinusa,

$$\begin{aligned}\int_{-T}^T \sin x \, dx &= [-\cos x]_{-T}^T \\ &= -\cos T + \cos(-T) = 0.\end{aligned}$$

Zatem

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = 0.$$

Symetryczne wkłady znoszą się dla każdego T , chociaż żadna połowa nie ma skończonej granicy. Istnienie wartości głównej nie oznacza zbieżności całki niewłaściwej.

Funkcja wymierna: rozbieżność

Niech $f(x) = (2x + 1)/(x^2 + 1)$. Funkcją pierwotną jest

$$F(x) = \ln(x^2 + 1) + \arctan x.$$

Na prawym półprzedziale:

$$\int_0^T f(x) dx = \ln(T^2 + 1) + \arctan T \longrightarrow +\infty.$$

Na lewym półprzedziale:

$$\int_S^0 f(x) dx = -\ln(S^2 + 1) - \arctan S \longrightarrow -\infty \quad (S \rightarrow -\infty).$$

Całka na całej prostej jest **rozbieżna**. Nie wolno sumować tych granic jako $+\infty - \infty$ i przypisywać takiemu wyrażeniu wartości liczbowej.

Funkcja wymierna: wartość główna

Dla skończonego T symetrycznie obcięta całka jest równa

$$\begin{aligned}\int_{-T}^T \frac{2x+1}{x^2+1} dx &= [\ln(x^2+1) + \arctan x]_{-T}^T \\ &= \ln(T^2+1) - \ln(T^2+1) \\ &\quad + \arctan T - \arctan(-T) \\ &= 2 \arctan T \longrightarrow \pi.\end{aligned}$$

Zatem

$$\boxed{\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \pi.}$$

Składnik $2x/(1+x^2)$ jest nieparzysty i na $[-T, T]$ daje 0. Składnik $1/(1+x^2)$ ma zwykłą zbieżną całkę równą π .

Cosinus: brak wartości głównej

Całka $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx$ jest rozbieżna, ponieważ

$$\int_0^T \cos x \, dx = \sin T$$

nie ma granicy przy $T \rightarrow \infty$.

Symetryczne obcięcie również nie daje granicy:

$$\int_{-T}^T \cos x \, dx = [\sin x]_{-T}^T = 2 \sin T.$$

Dla $T = \pi/2 + 2n\pi$ otrzymujemy 2, a dla $T = 3\pi/2 + 2n\pi$ otrzymujemy -2 .
Dlatego

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx \quad \text{nie istnieje.}$$

Całka rozbieżna może mieć wartość główną, ale jej istnienie wymaga osobnego sprawdzenia.

Osobliwość przy prawym końcu

Niech $a < b$, $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i $f \in R[a, c]$ dla każdego $a < c < b$. Funkcja może być nieograniczona przy b .

Całka niewłaściwa II rodzaju

Jeżeli istnieje skończona granica, przyjmujemy

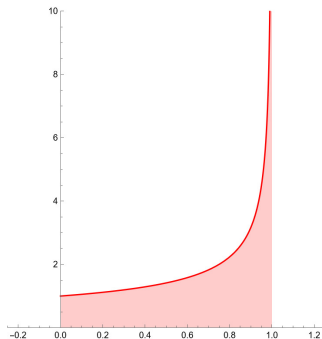
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Wówczas całka jest zbieżna. Granica nieskończona lub brak granicy oznacza rozbieżność.

Nieograniczoność przy b oznacza, że nie można ograniczyć funkcji w dowolnie małym lewostronnym sąsiedztwie tego punktu.

Wartość $f(b)$ nie jest potrzebna: wszystkie całki przed przejściem do granicy omijają koniec b .

Całka II rodzaju: interpretacja



Dla funkcji nieujemnej pole obszaru do punktu $c < b$ jest skończone.
Następnie przesuwamy c do końca przedziału.

Nieograniczony wzrost wysokości wykresu nie przesądza o rozbieżności:
decyduje granica pól $\int_a^c f(x) dx$.

Osobliwość przy lewym końcu

Niech $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $f \in R[d, b]$ dla każdego $a < d < b$. Jeżeli f jest nieograniczona przy a , definiujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow a^+} \int_d^b f(x) dx,$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona.

Takie samo przejście graniczne można stosować, gdy funkcja jest tylko nieokreślona na końcu przedziału. Jeżeli po uzupełnieniu wartości w tym punkcie otrzymujemy funkcję całkowalną Riemanna, granica daje jej zwykłą całkę.

W szczególności samo pominięcie jednej wartości funkcji nie musi oznaczać rzeczywistej osobliwości nieograniczonej.

Osobliwość wewnątrz przedziału

Jeżeli $c \in (a, b)$ jest punktem osobliwym, badamy **oddzielnie** obie strony:

$$I_- = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx, \quad I_+ = \lim_{v \rightarrow c^+} \int_v^b f(x) dx.$$

Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice istnieją i są skończone. Jej wartość wynosi wtedy $I_- + I_+$.

Jeżeli osobliwości występują na obu końcach, wybieramy zwykły punkt $c \in (a, b)$ i tak samo badamy niezależnie całki $\int_a^c f$ oraz $\int_c^b f$.

Przy kilku osobliwościach lub przy połączeniu obu rodzajów niewłaściwości dzielimy przedział tak, aby sprawdzić każdy problematyczny koniec osobno. Zbieżność wszystkich części jest konieczna.

Całka potęgowa w pobliżu zera

Badamy $J_\alpha = \int_0^1 x^{-\alpha} dx$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dla $\alpha \neq 1$ i $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Jeżeli $\alpha < 1$, to $\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0$, więc

$$J_\alpha = \boxed{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Jeżeli $\alpha > 1$, to $\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow \infty$. Licznik dąży do $-\infty$, mianownik jest ujemny, zatem całka rozbiega się do $+\infty$.

Całka potęgowa: wykładnik równy jeden

Dla $\alpha = 1$ liczymy osobno:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

Zatem

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha < 1.$$

Warto odróżnić trzy sytuacje:

- $0 < \alpha < 1$: funkcja jest nieograniczona przy 0, lecz całka jest zbieżna;
- $\alpha \geq 1$: całka jest rozbieżna;
- $\alpha \leq 0$: funkcja ma ciągłe przedłużenie do 0, więc po uzupełnieniu wartości można użyć całki właściwej.

Dla $\alpha = 0$ przyjmujemy w zerze wartość 1, a dla $\alpha < 0$ wartość 0.

Ten sam wzorec, różne końce

Warunek zbieżności całki potęgowej zależy od tego, który koniec przedziału sprawdzamy:

Całka	Warunek zbieżności	Wartość
$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx$	$\alpha > 1$	$\frac{1}{\alpha - 1}$
$\int_0^1 x^{-\alpha} dx$	$\alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha}$

W szczególności $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} dx$ nie jest zbieżna dla żadnego rzeczywistego α .

Rzeczywiście, po podziale w 1 zbieżność części przy zerze wymaga $\alpha < 1$, a zbieżność części w nieskończoności wymaga $\alpha > 1$. Warunki te nie mogą zachodzić jednocześnie.

Osobliwość wewnętrzna: pierwiastek

Obliczamy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$. Jedyny punkt osobliwy to 0. Po lewej $|x| = -x$, po prawej $|x| = x$:

$$\begin{aligned} I_- &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \int_{-1}^u \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{u \rightarrow 0^-} [-2\sqrt{-x}]_{-1}^u \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} (2 - 2\sqrt{-u}) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_+ &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_v^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{v \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_v^1 \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{v}) = 2. \end{aligned}$$

Obie granice są skończone, więc

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = I_- + I_+ = 4.}$$

Symetria ułatwia rachunek, ale zbieżność każdej części jest wymagana niezależnie.

Dwie osobliwości na końcach

W całce $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx$ osobliwe są oba końce. Dzielimy przedział w 0:

$$\begin{aligned} I_- &= \lim_{u \rightarrow -1^+} \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow -1^+} [\arcsin x]_u^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \\ I_+ &= \lim_{v \rightarrow 1^-} \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{v \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^v \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Obie całki są zbieżne, zatem

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.}$$

W granicy korzystamy z ciągłości funkcji $\arcsin$ na $[-1, 1]$, mimo że jej pochodna jest nieograniczona przy końcach.

Podstawienie przy osobliwym końcu

Obliczamy $I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$. Osobliwość występuje przy $x = 2$.

Najpierw ustalamy $0 < c < 2$ i podstawiamy $x = 2 \sin t$ w całce właściwej. Wtedy

$$dx = 2 \cos t dt, \quad 0 \leq t \leq \theta_c = \arcsin(c/2) < \frac{\pi}{2}.$$

Na tym przedziale $\cos t > 0$, więc

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\theta_c} \frac{8 \sin^3 t}{2 \cos t} 2 \cos t dt \\ &= 8 \int_0^{\theta_c} \sin^3 t dt. \end{aligned}$$

Gdy $c \rightarrow 2^-$, mamy $\theta_c \rightarrow \pi/2$. Funkcja $8 \sin^3 t$ jest ciągła do końca, zatem

$$I = 8 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt.$$

Podstawienie: obliczenie wartości

Otrzymaną całkę właściwą obliczamy przez $u = \cos t$:

$$du = -\sin t \, dt, \quad t = 0 \leftrightarrow u = 1, \quad t = \pi/2 \leftrightarrow u = 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} I &= 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt \\ &= -8 \int_1^0 (1 - u^2) \, du = 8 \int_0^1 (1 - u^2) \, du \\ &= 8 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = 8 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{16}{3}}. \end{aligned}$$

Skrócenie czynnika $\cos t$ wykonaliśmy dla $t < \pi/2$, gdzie nie jest on zerowy. Dopiero później przeszliśmy do końca przedziału, używając ciągłego przedłużenia uproszczonej funkcji.

Podstawienie a rodzaj całki

Podstawienie może zamienić całkę niewłaściwą na właściwą. Nie zwalnia to jednak z uzasadnienia przejścia do granicy. W poprzednim przykładzie pozwoliła na nie ciągłość nowej funkcji podcałkowej na przedziale domkniętym.

Możliwa jest też sytuacja odwrotna. Dla $0 < \varepsilon < 1$ w całce z funkcji 1 podstawiamy $x = e^{-t}$:

$$\int_{\varepsilon}^1 1 \, dx = \int_{-\ln \varepsilon}^0 (-e^{-t}) \, dt = \int_0^{-\ln \varepsilon} e^{-t} \, dt.$$

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$, górna granica po prawej dąży do ∞ , a więc

$$\int_0^1 1 \, dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = 1.$$

Ta sama wartość została przedstawiona raz jako całka właściwa, a raz jako niewłaściwa.

Porównanie przy skończonym końcu

Niech $f, g \in R[a, c]$ dla każdego $c \in (a, b)$ i niech

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (a \leq x < b).$$

Wtedy:

- zbieżność $\int_a^b g(x) dx$ pociąga zbieżność $\int_a^b f(x) dx$;
- rozbieżność $\int_a^b f(x) dx$ pociąga rozbieżność $\int_a^b g(x) dx$.

Uzasadnienie. Funkcja $F(c) = \int_a^c f(x) dx$ jest niemalejąca. Jeśli całka z g jest zbieżna i ma wartość L , to $0 \leq F(c) \leq \int_a^c g \leq L$. Monotoniczność i ograniczoność dają skończoną granicę przy $c \rightarrow b^-$.

Nie trzeba zakładać, że obie funkcje są nieograniczone. Wystarczy też, by porównanie zachodziło w dostatecznie małym lewostronnym sąsiedztwie b .

Kryterium ilorazowe przy osobliwości

Niech $f, g \in R[a, c]$ dla każdego $c \in (a, b)$, a funkcje będą dodatnie dostatecznie blisko b . Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < \infty,$$

to całki $\int_a^b f$ i $\int_a^b g$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód opiera się na tym samym oszacowaniu co w nieskończoności: dostatecznie blisko b ,

$$\frac{K}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3K}{2}g(x).$$

Stosujemy kryterium porównawcze w obu kierunkach; pozostały fragment przedziału daje całkę właściwą.

Dla osobliwości przy a używamy granicy $x \rightarrow a^+$ i całkowalności na każdym $[d, b]$, $a < d < b$. Funkcje nie muszą być ujemne przy lewym końcu. Jeśli obie są ujemne, stosujemy kryterium do $-f$ i $-g$.

Zbieżność bezwzględna przy osobiwości

Definicje są takie same jak dla całek I rodzaju:

- **zbieżność bezwzględna:** całka $\int_a^b |f(x)| dx$ jest zbieżna;
- **zbieżność warunkowa:** całka z f jest zbieżna, a całka z $|f|$ jest rozbieżna.

Zakładamy całkowność Riemanna na każdym przedziale domkniętym omijającym osobiwość. Przy kilku osobiwościach wszystkie wymagane części badamy osobno.

Twierdzenie

Zbieżność bezwzględna całki niewłaściwej II rodzaju pociąga jej zbieżność.

Uzasadnienie jest identyczne jak wcześniej: $0 \leq f_+, f_- \leq |f|$, więc porównanie daje zbieżność całek z obu części. Następnie używamy $f = f_+ - f_-$ i odejmujemy dwie skończone granice.

Nie wolno nazywać całki warunkowo zbieżną wyłącznie na podstawie rozbieżności całki z $|f|$.

Oscylacje przy zerze: oszacowanie

Pokażemy bezwzględną zbieżność

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Funkcja jest ciągła na każdym $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$. Dla $0 < x \leq 1$:

$$0 \leq \left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ponieważ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2,$$

kryterium porównawcze daje zbieżność całki z wartości bezwzględnej, a więc również samej całki.

Coraz szybsze oscylacje sinusa nie przeszkadzają w tym dowodzie: kontrolujemy całą wartość bezwzględną prostą funkcją potęgową.

Przykład warunkowy przy zerze

Dla porównania całka $\int_0^1 \sin(1/x)/x \, dx$ jest warunkowo zbieżna. Dla $0 < \varepsilon < 1$ podstawiamy $t = 1/x$, $dx = -dt/t^2$:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin(1/x)}{x} \, dx &= \int_{1/\varepsilon}^1 t \sin t \left(-\frac{dt}{t^2} \right) \\ &= \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} \, dt.\end{aligned}$$

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$, otrzymujemy całkę $\int_1^{\infty} \sin t/t \, dt$, której zbieżność wykazaliśmy wcześniej.

To samo podstawienie dla wartości bezwzględnej daje

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\sin(1/x)|}{x} \, dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{|\sin t|}{t} \, dt \longrightarrow \infty.$$

Pokazuje to także, dlaczego nieudane oszacowanie przez rozbieżną funkcję $1/x$ nie dowodzi rozbieżności samej całki.

Logarytm cotangensa: przygotowanie

Badamy $\int_0^{\pi/6} \ln(\cot x) dx$.

Na $(0, \pi/6]$ funkcja jest ciągła, a $\cot x \geq \sqrt{3} > 1$, zatem $f(x) = \ln(\cot x) > 0$. Jedyny problematyczny punkt to 0.

Dla małych dodatnich x mamy $\cot x \sim 1/x$, dlatego wybieramy

$$g(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

Ponieważ $\pi/6 < 1$, funkcja g jest dodatnia na całym rozpatrywanym przedziale. Sprawdzimy:

- 1 granicę $f(x)/g(x)$ przy $x \rightarrow 0^+$;
- 2 zbieżność całki z g .

To pozwoli zastosować kryterium ilorazowe przy lewym końcu.

Logarytm cotangensa: granica ilorazu

Oba logarytmy dążą do $+\infty$. Obliczamy ich pochodne:

$$\frac{d}{dx} \ln(\cot x) = \frac{1}{\cot x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\sin x \cos x},$$

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(1/x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x \cos x} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \right) = 1. \end{aligned}$$

Granica jest skończona i dodatnia, więc obie całki mają ten sam charakter zbieżności.

Całka z logarytmu przy zerze

Niech $A = \pi/6$. Dla $0 < \varepsilon < A$:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^A \ln \frac{1}{x} dx &= [-x \ln x + x]_{\varepsilon}^A \\ &= A - A \ln A + \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon.\end{aligned}$$

Wyrażenie $\varepsilon \ln \varepsilon$ dąży do 0. Można to uzasadnić regułą de l'Hospitala:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\varepsilon) = 0.$$

Stąd

$$\int_0^{\pi/6} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \ln \frac{\pi}{6} < \infty.$$

Kryterium ilorazowe daje zbieżność całki z $\ln(\cot x)$. Jest ona także bezwzględnie zbieżna, ponieważ funkcja jest dodatnia.

Logarytm sinusa: okolica zera

Badamy bezwzględną zbieżność $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$. Na $(0, 1/2]$ funkcje

$$f(x) = -\ln(\sin x), \quad g(x) = -\ln x$$

są dodatnie. Korzystając z reguły de l'Hospitala,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x / \sin x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1. \end{aligned}$$

Całka porównawcza jest zbieżna:

$$\int_0^{1/2} (-\ln x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1 + \ln 2}{2}.$$

Zatem $\int_0^{1/2} [-\ln(\sin x)] dx$ jest zbieżna.

Logarytm sinusa: cały przedział

Na pozostałym odcinku $[1/2, \pi/2]$ funkcja $\ln(\sin x)$ jest ciągła, ponieważ $\sin x > 0$. Jej całka na tym odcinku jest właściwa i skończona.

Ponadto dla $0 < x \leq \pi/2$ zachodzi $0 < \sin x \leq 1$, więc

$$\ln(\sin x) \leq 0, \quad |\ln(\sin x)| = -\ln(\sin x).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin x)| dx &= \int_0^{1/2} [-\ln(\sin x)] dx \\ &\quad + \int_{1/2}^{\pi/2} [-\ln(\sin x)] dx < \infty. \end{aligned}$$

Pierwsza część jest zbieżna na podstawie porównania przy zerze, a druga dzięki ciągłości. Całka $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ jest więc **bezwzględnie zbieżna**.

Wartość główna przy osobliwości

Niech $a < c < b$, a funkcja f będzie całkowalna Riemanna na przedziałach $[a, c - \varepsilon]$ i $[c + \varepsilon, b]$ dla każdego

$$0 < \varepsilon < \min(c - a, b - c).$$

Jeśli istnieje skończona granica, definiujemy

$$\text{PV} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Jest to wartość główna Cauchy'ego przy osobliwości w c .

Usuwanie z obu stron punktu c przedziały o **tej samej długości** ε . W zwykłej całce niewłaściwej obie strony muszą mieć skończone granice oddzielnie; w wartości głównej badamy jedną granicę sumy.

Zbieżność całki a wartość główna

Jeżeli obie całki przy osobliwości są zbieżne, czyli

$$I_- = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx \in \mathbb{R}, \quad I_+ = \lim_{v \rightarrow c^+} \int_v^b f(x) dx \in \mathbb{R},$$

to można w szczególności przyjąć $u = c - \varepsilon$ i $v = c + \varepsilon$. Wówczas granica sumy jest sumą granic:

$$\text{PV} \int_a^b f(x) dx = I_- + I_+ = \int_a^b f(x) dx.$$

Zatem zbieżność całki niewłaściwej pociąga istnienie równej jej wartości głównej.

Odwrotność jest fałszywa: symetryczne odcięcia mogą spowodować znoszenie rozbieżności. Wykażemy to dla funkcji $1/x$ na $[-1, 1]$.

Funkcja jeden przez x: rozbieżność

Punkt 0 jest osobliwością wewnętrzną. Dla $0 < \varepsilon < 1$:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = [\ln |x|]_{-1}^{-\varepsilon} = \ln \varepsilon \longrightarrow -\infty,$$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

Żadna z wymaganych całek połówkowych nie jest zbieżna. Dlatego

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \text{ jest rozbieżna.}$$

Nie można zastosować wzoru $[\ln |x|]_{-1}^1$ do całego przedziału: funkcja $1/x$ nie jest na nim ciągła ani całkowna Riemanna, a w środku przedziału występuje osobliwość.

Funkcja jeden przez x: wartość główna

Przy jednakowym odcięciu po obu stronach zera dla każdego $0 < \varepsilon < 1$ zachodzi

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln \varepsilon - \ln \varepsilon = 0.$$

Zatem

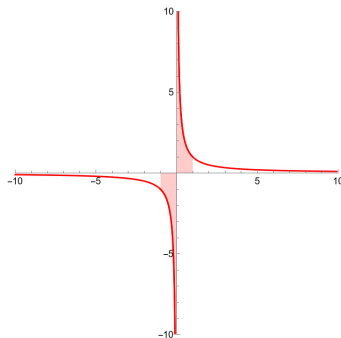
$$\boxed{\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.}$$

Znaczenie symetrii widać przy różnych odcięciach $\varepsilon_-, \varepsilon_+ > 0$:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_-} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_+}^1 \frac{dx}{x} = \ln \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}.$$

Jeżeli $\varepsilon_- = \lambda \varepsilon_+$, gdzie $\lambda > 0$, granica wynosi $\ln \lambda$. Bez ustalenia symetrycznego odcięcia nie otrzymujemy jednej wspólnej wartości.

Symetryczne znoszenie wkładów



Wykres $1/x$ jest nieparzysty. Wkłady z $[-1, -\varepsilon]$ i $[\varepsilon, 1]$ mają przeciwne znaki i równe wartości bezwzględne.

Ich suma ma wartość główną 0, lecz pola po każdej stronie rosną bez ograniczenia. To wyjaśnia, dlaczego wartość główna istnieje, a zwykła całka niewłaściwa jest rozbieżna.