Analiza, Funkcje wielu zmiennych

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

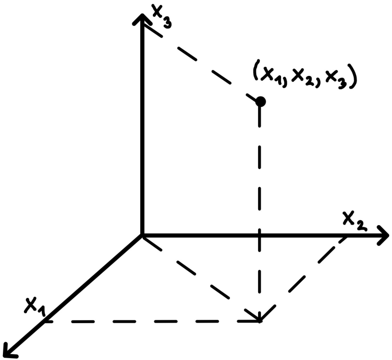
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

Definicja

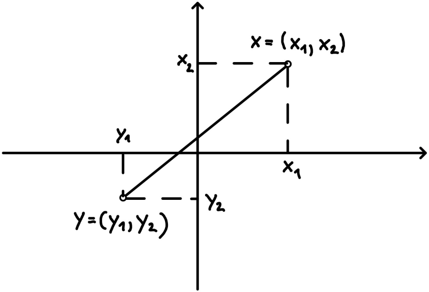
Przestrzenią n-wymiarową $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych układów liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ dla } k = 1, \ldots, n\}$$



Odległość (euklidesowa) $d(x,y)$ między punktami $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ w $\mathbb{R}^n$ zadana jest wzorem:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots (x_n - y_n)^2}$$



$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

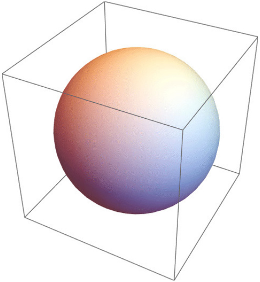
Kula i sąsiedztwo w $\mathbb{R}^n$

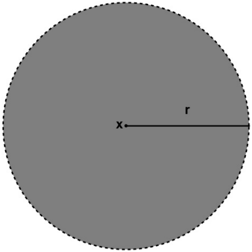
Wtedy *kula* o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ (otoczenie x) o promieniu r:

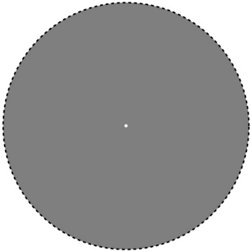
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

i *sąsiedztwo* o środku w x o promieniu r:

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < d(x, y) < r\} = B(x, r) \setminus \{x\}$$







Punkty brzegowe i wewnętrzne zbioru

Definicja

Punkt x nazywamy *punktem brzegowym* zbioru $Z \subset \mathbb{R}^n$ ($x \in Z$ lub $x \notin Z$), jeśli w każdym jego otoczeniu znajduje się zarówno punkt zbioru Z, jak i punkt, który do Z nie należy.
Brzeg ∂Z zbioru Z jest to zbiór wszystkich punktów brzegowych tego zbioru.

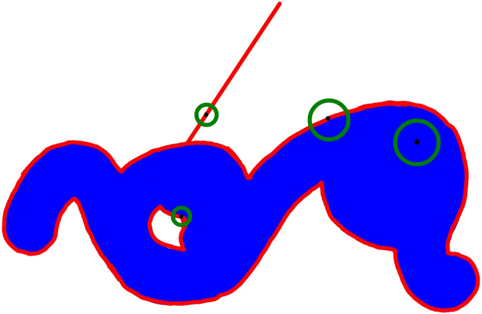
Definicja

Punkt x nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru $Z \subset \mathbb{R}^n$, jeśli punkt ten należy do zbioru Z wraz z pewnym swoim otoczeniem, tzn.

$$\exists\, r > 0 \quad B(x, r) \subset Z.$$

Wnętrzem $Int\, Z$ zbioru Z nazywamy zbiór wszyskich punktów wewnętrznych tego zbioru.
Zbiór Z jest *otwarty* jeżeli $Z = Int\, Z$.

Punkty brzegowe i wewnętrzne zbioru



Punkty wewnętrzne

Punkty brzegowe

Przykłady:

(1)

$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,

$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \partial Z_1 = \partial Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Przykłady:

(1)
$Z_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
$Z_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \partial Z_1 = \partial Z_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(2)
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $\mathbb{R}^4$ -
- zbiory otwarte

Przykłady:

(1)
$Z_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
$Z_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \partial Z_1 = \partial Z_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(2)
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $\mathbb{R}^4$ -
- zbiory otwarte

Definicje

Zbiór Z nazywamy:
ograniczonym jeśli $\exists\, r > 0 \quad Z \subset B(0,r)$,
nieograniczonym jeśli nie jest ograniczony,
skończonym, jeśli składa się ze skończonej liczby punktów,
nieskończonym, jeśli nie jest ani skończony ani pusty.

Definicja

Łukiem zwykłym (krzywą zwykłą) L w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t) \quad \wedge \quad t \in [\alpha, \beta]\}$$

gdzie funkcje $x_1(t), \dots, x_n(t)$ są określone i ciągłe w przedziale $[\alpha, \beta]$ i różnym wartościom $t \in (\alpha, \beta)$ odpowiadają różne punkty łuku L.

Definicja

Łukiem zwykłym (krzywą zwykłą) L w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t) \quad \wedge \quad t \in [\alpha, \beta]\}$$

gdzie funkcje $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ są określone i ciągłe w przedziale $[\alpha, \beta]$ i różnym wartościom $t \in (\alpha, \beta)$ odpowiadają różne punkty łuku L.

Łuk nazywamy *otwartym* gdy $(x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha)) \neq (x_1(\beta), \ldots, x_n(\beta))$.

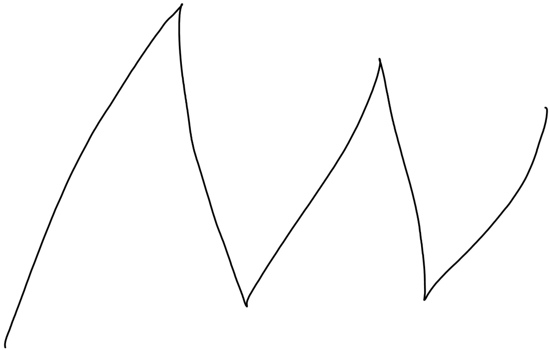
Łuk nazywamy *zamkniętym* gdy $(x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha)) = (x_1(\beta), \ldots, x_n(\beta))$.

Łuk nazywamy *gładkim (regularnym)*, gdy funkcje $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ mają ciągłe pochodne w $[\alpha, \beta]$ i

$$\forall\, t \in [\alpha, \beta] \qquad [x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2 > 0$$

Łuk nazywamy *kawałkami gładkim*, gdy jest sumą skończonej liczby łuków gładkich.

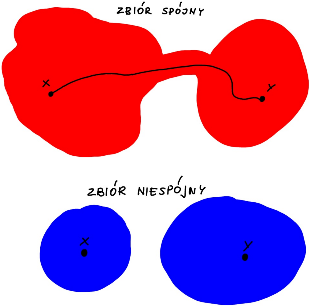
ŁUK (KRZYWA) KAWAŁKAMI GŁADKI



Zbiory spójne, obszary

Definicje

Zbiór $Z \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *spójnym*, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć łukiem zwykłym całkowice w nim zawartym.
Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*.



Ciągi w $\mathbb{R}^n$

Niech $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$

Ciągi w $\mathbb{R}^n$

Niech $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$

Definicja

Granicą ciągu (x_k) jest x_0 jeśli
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_\varepsilon \;\; \forall k > k_\varepsilon \quad d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Granicę oznaczamy symbolem $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ lub $x_k \to x_0$

Ciągi w $\mathbb{R}^n$

Niech $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$

Definicja

Granicą ciągu (x_k) jest x_0 jeśli $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_\varepsilon \;\; \forall\, k > k_\varepsilon \quad d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Granicę oznaczamy symbolem $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ lub $x_k \to x_0$

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne:

1. $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$,
2. $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_0) = 0$,
3. $\forall\, i = 1, \ldots n \qquad \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$.

Dowód

(1) $\iff$ (2) Z definicji zbieżności ciągu liczbowego $(d(x_k, x_0))$ do 0 otrzymujemy

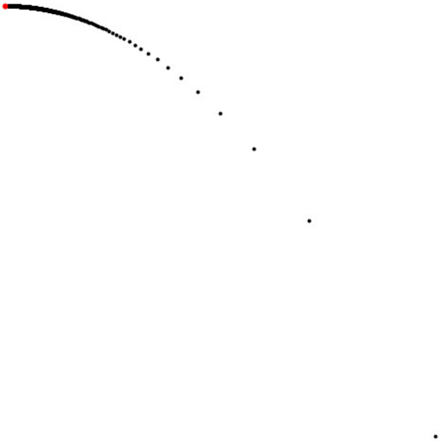
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_\varepsilon \ \ \forall\, k > k_\varepsilon \quad |d(x_k, x_0)| < \varepsilon.$$

Ale $d(x_k, x_0) \geq 0$. Stąd zbieżność $(d(x_k, x_0))$ do 0 jest równoważna zbieżności (x_k) do x_0.
(2) $\iff$ (3) Zauważmy, że

$$\forall i = 1, \cdots, n \, \forall k \in \mathbb{N} \; 0 \leq |x_i^k - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j^k - x_j^0)^2} = d(x_k, x_0).$$

Z twierdzenia o trzech ciągach mamy, że jeżeli $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_0) = 0$ to $\forall\, i = 1, \ldots n \quad \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$. Z drugiej strony jeśli dla każdego $i = 1, \cdots n$ $x_i^k \to x_i^0$ to $d(x_k, x_0) \to 0$. $\square$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{k-1}{k}\right) \to (0,1)$$



Definicja

Punkt x_0 nazywamy *punktem skupienia* zbioru Z ($\emptyset \neq Z \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in Z \vee x_0 \notin Z$), jeśli w każdym jego sąsiedztwie znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru Z.

Definicja

Punkt x_0 nazywamy *punktem skupienia* zbioru Z ($\emptyset \neq Z \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in Z \vee x_0 \notin Z$), jeśli w każdym jego sąsiedztwie znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru Z.

Twierdzenie

Punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru Z

$$\iff \exists (x_k) \subset Z, \, x_k \neq x_0 \qquad x_k \to x_0$$

Definicja

Punkt x_0 nazywamy *punktem skupienia* zbioru Z $(\emptyset \neq Z \subset \mathbb{R}^n,\ x_0 \in Z\ \vee\ x_0 \notin Z)$, jeśli w każdym jego sąsiedztwie znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru Z.

Twierdzenie

Punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru Z $\iff\ \exists (x_k) \subset Z,\ x_k \neq x_0 \qquad x_k \to x_0$

Dowód:

$\Leftarrow$: Jeśli taki ciąg istnieje $x_k \to x_0$, to z definicji x_0 jest punktem skupienia zbioru Z.

$\Rightarrow$: Jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru Z, to
$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \exists\, x_k \in Z \qquad 0 < d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$
i wtedy x_0 jest granicą ciągu x_k. $\square$

Definicja

Punkt $P \in Z$, który nie jest punktem skupienia zbioru Z nazywamy *punktem izolowanym (odosobnionym)* zbioru Z.

Definicja

Punkt $P \in Z$, który nie jest punktem skupienia zbioru Z nazywamy *punktem izolowanym (odosobnionym)* zbioru Z.

Definicja

Zbiór *domknięty* jest to zbiór, do którego należą wszystkie jego punkty skupienia.

Definicja

Punkt $P \in Z$, który nie jest punktem skupienia zbioru Z nazywamy *punktem izolowanym (odosobnionym)* zbioru Z.

Definicja

Zbiór *domknięty* jest to zbiór, do którego należą wszystkie jego punkty skupienia.

np.: $\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}\,,\ \ \{(x,y) : y \geqslant 0\}$

Definicja

Punkt $P \in Z$, który nie jest punktem skupienia zbioru Z nazywamy *punktem izolowanym (odosobnionym)* zbioru Z.

Definicja

Zbiór *domknięty* jest to zbiór, do którego należą wszystkie jego punkty skupienia.

np.: $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\{(x, y) : y \geqslant 0\}$

Jeśli zbiór Z jest obszarem, to jego brzeg składa się ze wszystkich punktów skupienia zbioru Z, które do tego zbioru nie należą.

Obszar D wraz z brzegiem nazywamy *obszarem domkniętym* i oznaczamy $\overline{D}$.

Obszar D wraz z brzegiem nazywamy *obszarem domkniętym* i oznaczamy $\overline{D}$.

Uwaga:

Geometrycznie każdy układ wartości (x, y) można przedstawić jako punkt płaszczyzny, a funkcję 2 - zmiennych $z = f(x, y)$ jako pewną powierzchnię w $\mathbb{R}^3$.

Obszarem określoności (dziedziną) funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów, w których funkcja przyjmuje określoną wartość rzeczywistą.

Przykłady:

(1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Przykłady:

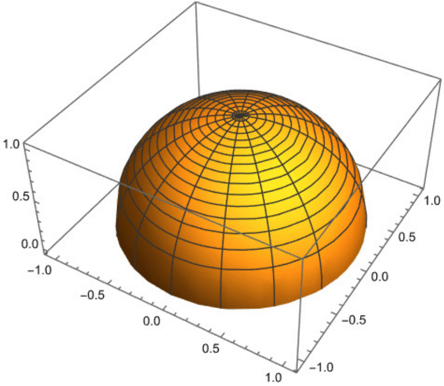
(1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$D_f : \; 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 \leqslant 1$

Przykłady:

(1) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$D_f: \; 1-x^2-y^2 \geqslant 0 \iff x^2+y^2 \leqslant 1$

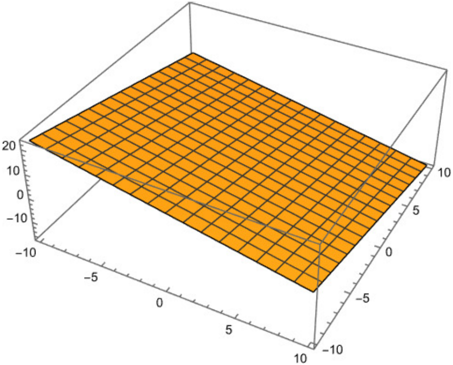


(2) $f(x, y) = 5 - x - y$

(2) $f(x,y) = 5 - x - y$
$D_f = \mathbb{R}^2$

(2) $f(x,y) = 5 - x - y$

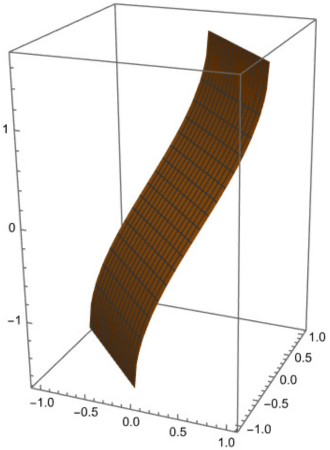
$D_f = \mathbb{R}^2$



(3) $z = f(x, y) = \arcsin(x + y)$

(3) $z = f(x, y) = \arcsin(x + y)$
$D_f: \; -1 \leqslant x + y \leqslant 1 \Rightarrow$ dziedziną jest obszar w $\mathbb{R}^2$ ograniczony prostymi równoległymi $x + y + 1 = 0$ i $x + y - 1 = 0$.

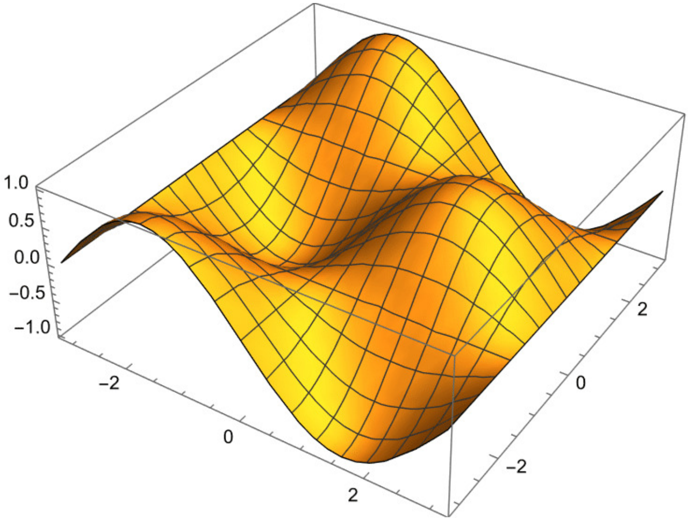
(3) $z = f(x, y) = \arcsin(x + y)$
D_f : $-1 \leqslant x + y \leqslant 1 \Rightarrow$ dziedziną jest obszar w $\mathbb{R}^2$ ograniczony prostymi równoległymi $x + y + 1 = 0$ i $x + y - 1 = 0$.



(4) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$

(4) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$
$D_f = \mathbb{R}^2$.

(4) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$
$D_f = \mathbb{R}^2$.



Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ograniczona* w zbiorze $A \subset D$, $A \neq \emptyset$, jeśli

$$\exists\, M > 0 \;\; \forall\, x \in A \qquad |f(x)| \leqslant M$$

Granice właściwe

Załóżmy, że $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ jest punktem skupienia dziedziny D funkcji f.

Granica (def. Cauchy'ego)

Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g (oznaczenie $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$) jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D$$

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica (def. Heinego)

Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g jeśli

$$\forall\, (x_k) \subset D,\; x_k \neq x_0$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = g$$

Granice niewłaściwe

Granice niewłaściwe (def. Cauchego)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ jeśli

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x \in D 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jeśli

$$\forall\, m \in \mathbb{R}\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x \in D 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < m.$$

Granice niewłaściwe (def. Heinego)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ jeśli

$$\forall\, (x_k) \subset D \setminus \{x_0\} \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty.$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jeśli

$$\forall\, (x_k) \subset D \setminus \{x_0\} \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = -\infty$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ $(x, y) \in D_f$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ to punkt skupienia D.
Oznaczenia granicy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ $(x, y) \in D_f$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ to punkt skupienia D.
Oznaczenia granicy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

Przykłady:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin y}{2x^2+3y^2} = 0$

$\left| \frac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin y}{2x^2+3y^2} \right| \leqslant \sqrt[3]{|x|} \cdot \frac{|x|\cdot|y|}{2x^2+3y^2} \leqslant \sqrt[3]{|x|} \cdot \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt[3]{|x|} < \varepsilon$

bo: $\sin x \leqslant x$, $\;(|x| - |y|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+2y^2} = 0$

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)\,,\ (x_n, y_n) \neq (0,0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$\Rightarrow \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+2y_n^2} = x_n \cdot \frac{x_n^2}{x_n^2+2y_n^2} + y_n \cdot \frac{y_n^2}{x_n^2+2y_n^2} \to 0\,, \quad n \to \infty$

jako iloczyny ciągów ograniczonych i ciągów dążących do 0.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+2y^2} = 0$

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)\,,\ (x_n, y_n) \neq (0,0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$\Rightarrow \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+2y_n^2} = x_n \cdot \frac{x_n^2}{x_n^2+2y_n^2} + y_n \cdot \frac{y_n^2}{x_n^2+2y_n^2} \to 0\,, \quad n \to \infty$

jako iloczyny ciągów ograniczonych i ciągów dążących do 0.

(3) Granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ nie istnieje,

bo z definicji Heinego istnieją dwa ciągi $(x_n', y_n') \to (0,0)$ i $(x_n'', y_n'') \to (0,0)$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n'', y_n'')$$

$$(0,0) \neq \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$$

$$(0,0) \neq \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2/n^2} = 0$$

$(0,0) \neq (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$

$(0,0) \neq (\frac{1}{n}, 0) \to (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2/n^2} = 0$

(4) Pokazać, że $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{|xy|} = +\infty$

Jeśli $xy \neq 0$, tzn. $(x,y) \in D$, to

$\frac{1}{|xy|} \geqslant \frac{2}{x^2+y^2} > 2(|M|+1)^2 > M$, bo

$(|x| - |y|)^2 \geqslant 0 \iff \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

gdy

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{|M|+1}$

więc

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \frac{1}{|M|+1} > 0 \quad \forall\, (x,y) \in D$$

$$0 < d((0,0),(x,y)) < \delta \Rightarrow \frac{1}{|xy|} > M$$

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \frac{1}{|M|+1} > 0 \quad \forall\, (x,y) \in D$$

$$0 < d((0,0),(x,y)) < \delta \Rightarrow \frac{1}{|xy|} > M$$

(5) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x-y}}{x+2y} = \frac{e}{4}\,, \quad D = \{(x,y) : x + 2y \neq 0\}$

$$\forall\, x_k = (x_k, y_k)\,, \quad (x_k, y_k) \neq (2,1) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (2,1) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = 2 \ \wedge\ \lim_{k\to\infty} y_k = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{e^{x_k - y_k}}{x_k + 2y_k} = \frac{e}{4}$$

korzystamy tutaj z tw. o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych i z tw. o wprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłej

(6) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(3,0)} x \cdot \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3$

bo

$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u} = 1$

dla $xy = u \quad \wedge \quad xy \to 0 \iff u \to 0$

(6) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(3,0)} x \cdot \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3$

bo

$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u} = 1$

dla $xy = u \quad \wedge \quad xy \to 0 \iff u \to 0$

(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ - granica nie istnieje, bo:

$(0, \frac{1}{n}) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$

Granice iterowane

Definicja

Jeśli istnieją liczby

$$\lim_{x\to x_0}\Big[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big] \quad \vee \quad \lim_{y\to y_0}\Big[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big]$$

to nazywany je *granicami iterowanymi* funkcji $f(x,y)$

Granice iterowane

Definicja

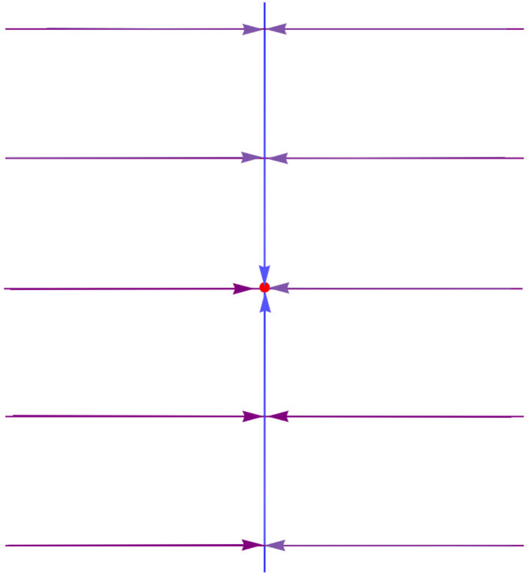
Jeśli istnieją liczby

$$\lim_{x\to x_0}\Big[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big] \quad \vee \quad \lim_{y\to y_0}\Big[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big]$$

to nazywany je *granicami iterowanymi* funkcji $f(x,y)$

Uwaga: Istnienie granicy i granic iterowanych jest niezależne.

Granice iterowane



Przykłady:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - granica podwójna nie istnieje

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

granice iterowane istnieją.

Przykłady:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - granica podwójna nie istnieje

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

granice iterowane istnieją.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$ - granica podwójna istnieje, bo niech $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Wtedy $0 \le |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \le |x_n+y_n| \to 0 \;\Rightarrow\; |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \to 0 \Rightarrow\; (x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n} \to 0$.

Przykłady:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - granica podwójna nie istnieje

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

granice iterowane istnieją.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$ - granica podwójna istnieje, bo niech $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Wtedy $0 \le |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \le |x_n+y_n| \to 0 \;\Rightarrow\; |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \to 0 \Rightarrow\; (x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n} \to 0$.

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} + y\cos\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

Przykłady:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - granica podwójna nie istnieje

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

granice iterowane istnieją.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$ - granica podwójna istnieje, bo niech $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Wtedy $0 \leq |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \leq |x_n+y_n| \to 0 \ \Rightarrow\ |(x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n}| \to 0 \Rightarrow\ (x_n+y_n)\cos\frac{1}{x_n} \to 0$.
$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} + y\cos\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$
$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} + y\cos\frac{1}{x}\right)\right]$ - granica iterowana nie istnieje, bo nie istnieje granica drugiego składnika funkcji.

Twierdzenie

Jeśli istnieje granica podwójna $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ i co najmniej jedna z granic iterowanych $\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,y)]$ lub $\lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0} f(x,y)]$, to granica podwójna jest równa tej granicy iterowanej.

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Definicja Cauchy'ego

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Definicja Cauchy'ego

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definicja Heinego

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 jeśli

$$\forall\, (x_k) \subset D \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Definicja Cauchy'ego

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definicja Heinego

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 jeśli

$$\forall\, (x_k) \subset D \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Definicja

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ciągła w zbiorze* A, $\emptyset \neq A \subset D \subset \mathbb{R}^n$, jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie.

Stwierdzenie

(1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia dziedziny D funkcji f, to f jest ciągła w x_0 $\iff$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(2) Jeśli x_0 jest punktem izolowanym dziedziny D funkcji f, to f jest ciągła w x_0.

Stwierdzenie

(1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia dziedziny D funkcji f, to f jest ciągła w $x_0 \iff$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(2) Jeśli x_0 jest punktem izolowanym dziedziny D funkcji f, to f jest ciągła w x_0.

Przykłady:

(1) Funkcje $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{1+\sin^2 x + y^2}$, $g(x,y,z) = \frac{\sin(x+y)}{1+e^{xy}+z^2}$ są ciągłe w $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ odpowiednio.

(2) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

nie jest ciągła w $(0,0,0)$, bo nie istnieje granica $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$:

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0,0)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{2}{3}$

$(\frac{1}{n}, 0, 0) \to (0,0,0)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

(2) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}\,, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0\,, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

nie jest ciągła w $(0,0,0)$, bo nie istnieje granica $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$:

$$\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \to (0,0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\tfrac{1}{n}, 0, 0\right) \to (0,0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

(3) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,, \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Funkcja jest ciągła w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 3, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Funkcja jest nieciągła w $(0,0)$, bo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ nie istnieje:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}, 0\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 3, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Funkcja jest nieciągła w $(0,0)$, bo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ nie istnieje:

$\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}, 0\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} 5 - x - y, & (x,y) \neq (1,2) \\ 1, & (x,y) = (1,2) \end{cases}$

Funkcja jest nieciągła w $(1,2)$, bo

$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 2 \neq f(1,2)$.

Tw. (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}\,,\ D \subset \mathbb{R}^n$ jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że $\forall\, x \in D \cap Q(x_0, r)$ wartość funkcji $f(x)$ ma taki sam znak jak $f(x_0)$.

Własności funkcji ciągłych

Tw. (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że $\forall\, x \in D \cap Q(x_0, r)$ wartość funkcji $f(x)$ ma taki sam znak jak $f(x_0)$.

Tw. (Weierstrassa)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym $\bar{A}$, $\emptyset \neq A \subset \bar{A} \subset D \subset \mathbb{R}^n$, to jest w tym zbiorze ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy, tzn.

$$\exists\, u, v \in \bar{A} \qquad f(u) = \inf_{x \in \bar{A}} f(x)\,, \quad f(v) = \sup_{x \in \bar{A}} f(x)$$

Tw. (Darboux)

Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze D, $u, v \in D$, $f(u) < \mu < f(v)$, i istnieje łuk zwykły L zawarty w D o końcach u, v, to istnieje punkt $x_0 \in L \subset D$ taki, że $f(x_0) = \mu$.

W szczególności:

Jeśli funkcja jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $\bar{D}$ oraz $\inf_{x \in \bar{D}} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup_{x \in \bar{D}} f(x)$, to $\exists\, x_0 \in \bar{D} \quad f(x_0) = \mu$.