

Analiza

Funkcje wielu zmiennych, cz. 1

Wojciech Domitrz

Slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

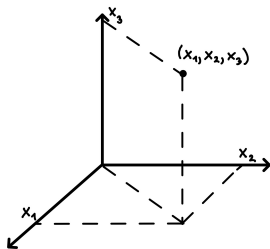
2026

Przestrzeń n -wymiarowa

Niech $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. **Przestrzenią n -wymiarową** nazywamy zbiór uporządkowanych układów n liczb rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Liczby $x_1, \dots, x_n$ są **współrzędnymi** punktu x . Kolejność współrzędnych ma znaczenie.



$\mathbb{R}$ utożsamiamy z prostą, $\mathbb{R}^2$ z płaszczyzną, a $\mathbb{R}^3$ ze zwykłą przestrzenią geometryczną.

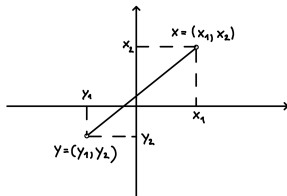
Odległość euklidesowa

Dla $x = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $y = (y_1, \dots, y_n)$ definiujemy

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Jest to odległość euklidesowa. W dwóch wymiarach:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$



$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Normą euklidesową wektora x nazywamy jego odległość od zera:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Odległość jest nieujemna, znika dokładnie dla $x = y$, jest symetryczna i spełnia nierówność trójkąta:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

W dalszych dowodach przydadzą się nierówności

$$|x_i - y_i| \leq \|x - y\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

Pierwsza wynika z pozostawienia jednego składnika sumy kwadratów. W drugiej każdy z n składników ograniczamy przez największy z nich.

Kula otwarta i sąsiedztwo punktu

Niech $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$.

Kula otwarta

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}.$$

Punkt x jest środkiem, a r promieniem kuli.

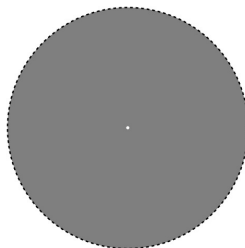
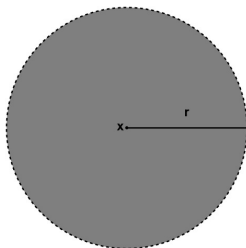
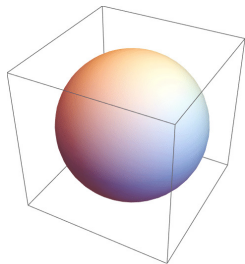
Sąsiedztwo, czyli kula bez środka

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < d(x, y) < r\} = B(x, r) \setminus \{x\}.$$

W tym wykładzie jako otoczenia punktu wystarczą kule otwarte. W ogólniejszej terminologii otoczeniem może być dowolny zbiór zawierający taką kulę.

Kula zawiera swój środek, a sąsiedztwo go nie zawiera. Żaden z tych zbiorów nie zawiera punktów odległych od środka dokładnie o r .

Kule w dwóch i trzech wymiarach



W $\mathbb{R}^2$ kula otwarta to wnętrze koła. Sąsiedztwo powstaje po usunięciu jego środka.

W $\mathbb{R}^3$ kula obejmuje punkty wewnątrz sfery. Widoczna na schemacie powierzchnia wyznacza brzeg; sama sfera nie jest kulą otwartą.

Na prostej mamy $B(x, r) = (x - r, x + r)$ oraz

$$S(x, r) = (x - r, x) \cup (x, x + r).$$

Punkty wewnętrzne i zbiór otwarty

Punkt wewnętrzny

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem wewnętrznym zbioru Z , jeśli

$$\exists r > 0 \quad B(x, r) \subset Z.$$

Ponieważ $x \in B(x, r)$, każdy punkt wewnętrzny należy do Z .

Wnętrzem zbioru Z , oznaczanym $\text{Int } Z$, nazywamy zbiór wszystkich jego punktów wewnętrznych.

Zbiór otwarty

Zbiór Z jest otwarty, gdy każdy jego punkt jest wewnętrzny, czyli

$$Z = \text{Int } Z.$$

Otwartość rozpatrujemy w podanej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Na przykład odcinek na osi może być otwarty względem tej osi, ale nie jest otwarty w całej płaszczyźnie.

Punkt brzegowy

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem brzegowym zbioru Z , jeśli każda kula o środku w x przecina zarówno Z , jak i jego dopełnienie:

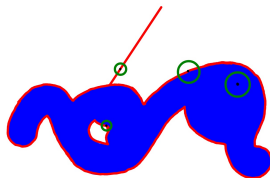
$$\forall r > 0 : \quad B(x, r) \cap Z \neq \emptyset, \quad B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus Z) \neq \emptyset.$$

Zbiór wszystkich punktów brzegowych oznaczamy przez ∂Z i nazywamy **brzegiem** Z .

Punkt brzegowy może należeć do zbioru, ale nie musi. O przynależności do brzegu decyduje zachowanie zbioru w każdym, nawet bardzo małym otoczeniu.

Punkt nie może być jednocześnie wewnętrzny i brzegowy: kula zawarta w Z nie przecina jego dopełnienia.

Wnętrze i brzeg: interpretacja



Punkty wewnętrzne

Punkty brzegowe

Wokół punktu wewnętrznego można znaleźć kulę leżącą w całości w zbiorze.
Wokół punktu brzegowego żadna kula nie mieści się w całości po jednej stronie brzegu.

Brzeg obejmuje także obwody otworów w zbiorze, a nie tylko jego zewnętrzny obrys.

Koło otwarte i koło domknięte

Rozważmy zbiory

$$Z_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad Z_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Mają to samo wnętrze i ten sam brzeg:

$$\text{Int } Z_1 = \text{Int } Z_2 = Z_1,$$

$$\partial Z_1 = \partial Z_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Jeśli $\|p\| < 1$, kula o promieniu $r = 1 - \|p\|$ i środku p mieści się w Z_1 , ponieważ $\|q\| \leq \|q - p\| + \|p\| < 1$.

Jeśli $\|p\| = 1$, w każdym otoczeniu p są punkty po obu stronach okręgu, np. $(1 - t)p$ i $(1 + t)p$ dla dostatecznie małego $t > 0$.

Z_1 jest otwarty i nie zawiera brzegu; Z_2 zawiera brzeg i jest domknięte. Definicję domkniętości podamy dalej.

Przykłady zbiorów otwartych

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ jest otwarty w $\mathbb{R}^2$.
- $H = \{(x, y, z) : z > 0\}$ jest otwarty w $\mathbb{R}^3$.
- Cała przestrzeń $\mathbb{R}^4$ jest otwarta w $\mathbb{R}^4$.

Dla punktu $p = (p_1, p_2, p_3) \in H$ wybierzmy $r = p_3 > 0$. Jeśli $q \in B(p, r)$, to

$$|q_3 - p_3| \leq \|q - p\| < p_3, \quad q_3 > 0.$$

Zatem $B(p, r) \subset H$.

W całej przestrzeni każda kula pozostaje w tej przestrzeni. Zbiór pusty również jest otwarty: nie zawiera punktu, który naruszałby warunek z definicji.

Otwartość nie oznacza ograniczoności. Półprzestrzeń H i $\mathbb{R}^4$ są nieograniczone.

Ograniczoność i liczba punktów

Zbiór $Z \subset \mathbb{R}^n$ jest **ograniczony**, jeśli

$$\exists r > 0 \quad Z \subset B(0, r).$$

Jeśli taki promień nie istnieje, zbiór jest **nieograniczony**.

Zbiór jest **skończony**, gdy ma skończenie wiele punktów. Zbiór pusty ma zero punktów, więc jest skończony. Zbiór **nieskończony** to zbiór, który nie jest skończony.

Dwa różne pojęcia

Każdy zbiór skończony jest ograniczony, ale zbiór ograniczony może mieć nieskończenie wiele punktów. Przykładem jest $[0, 1]$ lub koło jednostkowe.

Dla niepustego skończonego zbioru $Z = \{p_1, \dots, p_m\}$ wystarczy wybrać $r > \max_i \|p_i\|$. Dla zbioru pustego odpowiedni jest dowolny dodatni promień.

Krzywa i łuk zwykły

Niech $\alpha < \beta$. Ciągłe odwzorowanie

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

jest **parametryzacją krzywej**. Jej obraz to zbiór

$$L = \gamma([\alpha, \beta]) = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Łuk zwykły o różnych końcach

Jeśli γ jest różnowartościowa na **całym** $[\alpha, \beta]$, jej obraz nazywamy łukiem zwykłym. Jego końce to $\gamma(\alpha)$ i $\gamma(\beta)$.

Różnowartościowość oznacza, że krzywa nie przecina samej siebie i nie przechodzi ponownie przez żaden ze swoich punktów. Warunek musi obejmować również końce przedziału parametrów.

Krzywa zwykła zamknięta i znaczenie nazw

Krzywą zwykłą zamkniętą otrzymujemy, gdy

$$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$$

i jest to jedyne dopuszczone powtórzenie punktu: γ jest różnowartościowa na $[\alpha, \beta)$.

Przykładem jest okrąg

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Łuk o różnych końcach bywa nazywany **łukiem otwartym**, a krzywa o złączonych końcach **łukiem zamkniętym**.

Uwaga terminologiczna

„Otwarty” w nazwie łuku nie znaczy „otwarty jako podzbiór $\mathbb{R}^n$ ”. Na przykład odcinek z końcami jest łukiem o różnych końcach, ale jest zbiorem domkniętym.

Parametryzacja gładka i regularna

Parametryzację $\gamma = (x_1, \dots, x_n)$ nazywamy tutaj **gładką i regularną**, gdy współrzędne mają ciągłe pierwsze pochodne oraz

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \text{dla każdego } t \in [\alpha, \beta].$$

Równoważnie:

$$\|\gamma'(t)\|^2 = [x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2 > 0.$$

Na końcach stosujemy pochodne jednostronne i wymagamy ciągłego przedłużenia pochodnej z wnętrza przedziału.

Warunek $\gamma'(t) \neq 0$ oznacza niezerową prędkość ruchu po krzywej. Jest warunkiem dotyczącym parametryzacji; sama ciągłość lub istnienie pochodnych go nie gwarantuje.

W tym wykładzie „gładka” oznacza klasę C^1 . W innych tekstach słowo to może oznaczać klasę C^∞ .

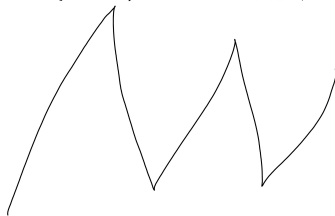
Krzywa kawałkami gładka

Krzywa jest **kawałkami gładka i regularna**, jeśli można podzielić jej przedział parametrów skończoną liczbą punktów

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$$

tak, aby na każdym $[t_{j-1}, t_j]$ parametryzacja była gładka i regularna. Cała parametryzacja pozostaje ciągła.

ŁUK (KRZYWA) KAWAŁKAMI GŁADKI



W punktach łączenia mogą występować narożniki: pochodne z obu stron nie muszą być równe. Nie wystarczy dowolna suma niepołączonych łuków; części muszą tworzyć rozpatrywaną krzywą.

Spójność i spójność łukowa

Zbiór Z jest **spójny**, jeśli nie można przedstawić go jako sumy dwóch rozłącznych, niepustych zbiorów otwartych względem Z .

„Otwarty względem Z ” oznacza zbiór postaci $Z \cap U$, gdzie U jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.

Spójność łukowa

Zbiór Z jest **łukowo spójny**, jeśli każde dwa punkty $u, v \in Z$ można połączyć ciągłą drogą $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$:

$$\gamma(0) = u, \quad \gamma(1) = v.$$

Spójność łukowa pociąga spójność, lecz dla dowolnych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ pojęcia te nie są równoważne.

Dla zbiorów **otwartych** w $\mathbb{R}^n$ spójność jest równoważna spójności łukowej. Punkty można wówczas łączyć nawet łamaną zawartą w zbiorze.

Obszar i łącznie punktów łamaną

Obszar

Niepusty, otwarty i spójny podzbiór $\mathbb{R}^n$ nazywamy obszarem.

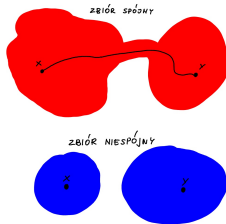
Dlaczego w obszarze można łączyć punkty łamaną? Ustalmy $p \in D$ i oznaczmy przez A zbiór punktów, do których można dojść z p łamaną leżącą w D . Mamy $p \in A$.

Jeśli $q \in A$, to pewna kula $B(q, r)$ mieści się w D . Każdy jej punkt można połączyć odcinkiem z q , a następnie z p . Zatem $B(q, r) \subset A$.

Jeśli $q \in D \setminus A$, taka kula nie może zawierać punktu A , bo wtedy również q byłby osiągalny. Stąd $B(q, r) \subset D \setminus A$.

Zbiory A i $D \setminus A$ są otwarte względem D . Spójność D i niepustość A dają $D \setminus A = \emptyset$. Każdy punkt D jest więc osiągalny.

Zbiór spójny i zbiór niespójny



W górnym przykładzie punkty można połączyć drogą pozostającą w zbiorze.
W dolnym dwie oddzielone części tworzą rozdzielanie zbioru.

Rysunek ilustruje proste sytuacje geometryczne. Dla dowolnych zbiorów rozstrzygają podane definicje, a nie sam wygląd szkicu.

Ciągi punktów w przestrzeni

Zapišmy kolejne wyrazy ciągu w postaci

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

a jego możliwą granicę jako $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Definicja zbieżności

$$x^{(k)} \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : d(x^{(k)}, a) < \varepsilon.$$

Dla każdej kuli o środku w a wszystkie dostatecznie późne wyrazy ciągu muszą leżeć w tej kuli.

Indeks w nawiasie oznacza numer wyrazu ciągu, a dolny indeks numer współrzędnej. Dzięki temu nie mylimy indeksowania z potęgowaniem.

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne:

- ❶ $x^{(k)} \rightarrow a$ w $\mathbb{R}^n$;
- ❷ $d(x^{(k)}, a) \rightarrow 0$;
- ❸ $x_i^{(k)} \rightarrow a_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

Równoważność 1 i 2. Odległość jest nieujemna, więc warunek $|d(x^{(k)}, a) - 0| < \varepsilon$ to dokładnie warunek z definicji zbieżności punktów.

Implikacja 2 $\Rightarrow$ 3. Dla każdej współrzędnej

$$0 \leq |x_i^{(k)} - a_i| \leq d(x^{(k)}, a).$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika $|x_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0$, czyli $x_i^{(k)} \rightarrow a_i$.

Dowód: od współrzędnych do punktów

Założmy, że $x_i^{(k)} \rightarrow a_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Chcemy wykazać $x^{(k)} \rightarrow a$.

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ i każdej współrzędnej istnieje N_i takie, że

$$k \geq N_i \implies |x_i^{(k)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Wybieramy jeden wspólny próg $N = \max(N_1, \dots, N_n)$. Dla $k \geq N$ wszystkie oszacowania zachodzą jednocześnie:

$$d(x^{(k)}, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - a_i|^2} < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

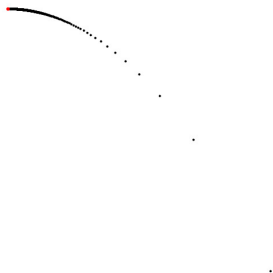
To kończy dowód. Istotne jest, że liczba współrzędnych jest skończona: możemy wybrać maksimum skończonej liczby progów.

Przykład ciągu na płaszczyźnie

$$x^{(k)} = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{k-1}{k} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, 1 - \frac{1}{k} \right) \longrightarrow (0, 1).$$

Obie współrzędne mają odpowiednie granice. Bezpośrednio:

$$d(x^{(k)}, (0, 1)) = \sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} \longrightarrow 0.$$



Punkt skupienia zbioru

Definicja

Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ jest punktem skupienia zbioru Z , jeśli każde jego sąsiedztwo zawiera punkt Z :

$$\forall r > 0 \quad S(a, r) \cap Z \neq \emptyset.$$

Równoważnie, dla każdego $r > 0$ istnieje $x \in Z$ takie, że

$$0 < d(x, a) < r.$$

Warunek $x \neq a$ jest istotny: sama obecność punktu a w zbiorze nie wystarcza.

Punkt skupienia może należeć do Z albo leżeć poza nim. Na przykład 0 jest punktem skupienia $\{1/k : k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$, choć nie należy do tego zbioru.

Zbiór pusty i każdy zbiór skończony nie mają punktów skupienia.

Ciągowa charakteryzacja punktu skupienia

Twierdzenie

a jest punktem skupienia Z wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $x^{(k)} \in Z \setminus \{a\}$ taki, że $x^{(k)} \rightarrow a$.

Od ciągu do punktu skupienia. Dla dowolnego $r > 0$ dostatecznie późny wyraz spełnia $d(x^{(k)}, a) < r$. Ponieważ $x^{(k)} \neq a$, należy do $S(a, r) \cap Z$.

Od punktu skupienia do ciągu. Dla każdego $k \geq 1$ wybieramy

$$x^{(k)} \in Z, \quad 0 < d(x^{(k)}, a) < \frac{1}{k}.$$

Takie punkty istnieją z definicji. Z nierówności i z $1/k \rightarrow 0$ otrzymujemy $d(x^{(k)}, a) \rightarrow 0$, a więc $x^{(k)} \rightarrow a$.

Wyrazy muszą być różne od a ; w tym sformułowaniu nie trzeba dodatkowo wymagać, aby były parami różne.

Punkt izolowany i zbiór domknięty

Punkt $a \in Z$ jest **izolowany**, jeśli nie jest punktem skupienia Z .

Równoważnie:

$$\exists r > 0 \quad B(a, r) \cap Z = \{a\}.$$

Zbiór domknięty

Zbiór Z jest domknięty, jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

Równoważnie: każdy zbieżny ciąg punktów Z ma granicę w Z . Jeśli granica nie należy do Z , jest jego punktem skupienia, co przeczy domkniętości.

Odwrotnie, każdy punkt skupienia jest granicą ciągu punktów Z , więc musi należeć do Z .

Przykłady zbiorów domkniętych:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \{(x, y) : y \geq 0\}.$$

Nierówności nieostre zachowują się przy przejściu do granicy współrzędnych. Domkniętość nie oznacza ograniczoności: półpłaszczyzna jest nieograniczona.

Domknięcie dowolnego zbioru Z definiujemy wzorem

$$\overline{Z} = \{a : \forall r > 0 \ B(a, r) \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Jest to suma Z i wszystkich jego punktów skupienia. Zachodzi

$$\partial Z = \overline{Z} \setminus \text{Int } Z.$$

Dla zbioru otwartego D mamy więc

$$\partial D = \overline{D} \setminus D, \quad \overline{D} = D \cup \partial D.$$

Punkty brzegu otwartego D są dokładnie jego punktami skupienia leżącymi poza D .

Domknięcie obszaru bywa tradycyjnie nazywane **obszarem domkniętym**. Ta osobna nazwa nie wymaga otwartości $\overline{D}$. Nie należy jej utożsamiać z definicją obszaru jako zbioru otwartego. Nie każdy zbiór domknięty jest domknięciem obszaru.

Funkcja, dziedzina i wykres

Funkcja rzeczywista wielu zmiennych jest odwzorowaniem

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n.$$

Każdemu punktowi dziedziny D przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą.

Gdy funkcję zadaje wzór bez dodatkowych ograniczeń, jej **dziedziną naturalną** jest zbiór punktów, dla których wszystkie działania we wzorze są określone i dają wartość rzeczywistą.

Dla dwóch zmiennych wykres ma postać

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

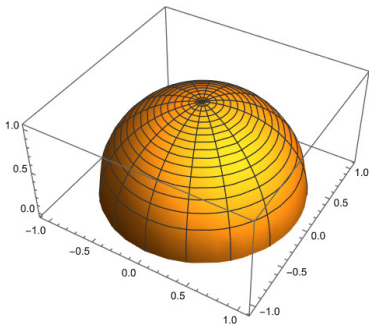
Dziedzina leży w płaszczyźnie, a wykres w przestrzeni trójwymiarowej.

Wykres dowolnej funkcji nie musi być gładką powierzchnią. Także dziedzina nie musi być obszarem: może nie być otwarta ani spójna.

Dziedzina i wykres: półsfera

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Warunek wynika z nieujemności wyrażenia pod pierwiastkiem. Wykres spełnia $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oraz $z \geq 0$.

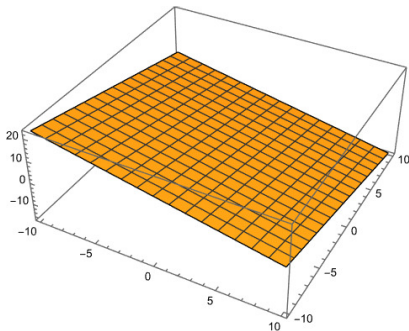


Dziedzina jest kołem domkniętym, a wykres górną półsferą wraz z równikiem. Wartości funkcji należą do $[0, 1]$.

Dziedzina i wykres: płaszczyzna

$$f(x, y) = 5 - x - y, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

We wzorze nie ma działań ograniczających dziedzinę. Równanie wykresu można zapisać jako $x + y + z = 5$.



Rysunek pokazuje tylko fragment nieograniczonej płaszczyzny. Funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, np. $f(5 - a, 0) = a$.

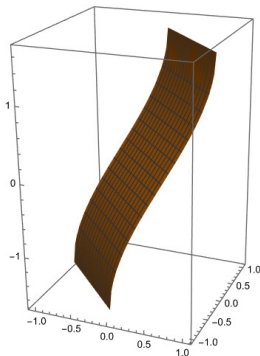
Dziedzina funkcji z arcusem sinusem

$$f(x, y) = \arcsin(x + y), \quad D_f = \{(x, y) : -1 \leq x + y \leq 1\}.$$

Argument arcusa sinusa musi należeć do $[-1, 1]$.

Dziedzina jest **nieograniczonym, domkniętym pasem** między prostymi $x + y = -1$ i $x + y = 1$, wraz z tymi prostymi.

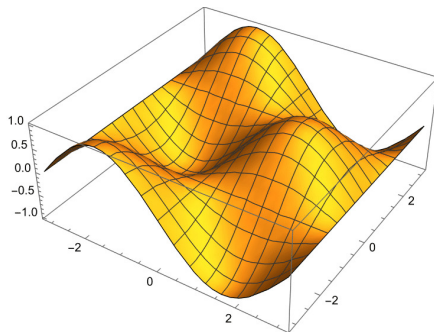
Nie jest otwarta, więc sama nie jest obszarem w przyjętym znaczeniu. Jej wnętrze opisuje warunek $-1 < x + y < 1$. Zbiór wartości to $[-\pi/2, \pi/2]$.



Iloczyn sinusa i cosinusa

$$f(x, y) = \sin x \cos y, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

Obie funkcje trygonometryczne są określone dla wszystkich argumentów rzeczywistych.



Ponieważ $|\sin x| \leq 1$ i $|\cos y| \leq 1$, mamy $|f(x, y)| \leq 1$. Funkcja jest ograniczona mimo nieograniczonej dziedziny.

Ograniczoność funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $\emptyset \neq A \subset D$.

Definicja

Funkcja f jest ograniczona na A , jeśli

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in A : \quad |f(x)| \leq M.$$

Jeden wspólny próg M musi ograniczać moduły wartości funkcji we wszystkich punktach A . Równoważnie, $-M \leq f(x) \leq M$ na całym A .

Ograniczoność funkcji i ograniczoność dziedziny to różne własności:

- $\sin x \cos y$ jest ograniczona na nieograniczonym $\mathbb{R}^2$;
- $1/(x^2 + y^2)$ jest nieograniczona na ograniczonym zbiorze $0 < x^2 + y^2 < 1$.

W drugim przykładzie wartości rosną bez ograniczenia, gdy punkty zbliżają się do zera.

Granica właściwa: definicja Cauchy'ego

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}^n$ niech będzie **punktem skupienia dziedziny** D .

Granica funkcji

Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą f w a , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Piszemy $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x) = g$ albo krótko $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$.

Badamy wszystkie punkty dziedziny dostatecznie bliskie a , z wyjątkiem samego a . Wartość $f(a)$ nie wpływa na granicę; funkcja może w ogóle nie być określona w a .

Jeden wybór δ musi działać dla wszystkich takich punktów, niezależnie od kierunku i sposobu zbliżania się do a .

Granica właściwa: kryterium Heinego

Przy tych samych założeniach zachodzi równoważność:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \left[\begin{array}{l} \text{dla każdego ciągu } x^{(k)} \in D \setminus \{a\} \\ x^{(k)} \rightarrow a \implies f(x^{(k)}) \rightarrow g. \end{array} \right.$$

Cauchy $\Rightarrow$ Heine. Dla danego ε wybieramy δ z definicji granicy. Zbieżny ciąg od pewnego miejsca leży w $S(a, \delta)$, więc $|f(x^{(k)}) - g| < \varepsilon$.

Heine $\Rightarrow$ Cauchy. Gdyby definicja Cauchy'ego nie zachodziła, istniałoby $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla każdego $k \geq 1$ można wybrać

$$x^{(k)} \in D, \quad 0 < \|x^{(k)} - a\| < 1/k, \quad |f(x^{(k)}) - g| \geq \varepsilon_0.$$

Wtedy $x^{(k)} \rightarrow a$, lecz $f(x^{(k)}) \not\rightarrow g$, wbrew założeniu.

Granice niewłaściwe

Nadal zakładamy, że a jest punktem skupienia D .

Granica równa $+\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < \|x - a\| < \delta \implies f(x) > M.$$

Granica równa $-\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < \|x - a\| < \delta \implies f(x) < m.$$

Wartości muszą przekraczać każdy próg we właściwą stronę dla **wszystkich** dostatecznie bliskich punktów dziedziny.

Sama nieograniczoność w pobliżu a nie wystarcza: funkcja może przyjmować bardzo duże wartości w jednym kierunku, a małe lub ujemne w innym.

Granice niewłaściwe a ciągi

Kryterium Heinego ma również wersję dla granic niewłaściwych:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall (x^{(k)}) \subset D \setminus \{a\} : \\ x^{(k)} \rightarrow a \implies f(x^{(k)}) \rightarrow +\infty.$$

Analogiczne stwierdzenie zachodzi z $-\infty$ zamiast $+\infty$.

Uzasadnienie. W kierunku od definicji do ciągów ustalamy próg M i stosujemy odpowiadające mu δ .

W przeciwną stronę: jeśli definicja granicy $+\infty$ zawodzi, istnieje próg M_0 i ciąg punktów spełniający

$$0 < \|x^{(k)} - a\| < 1/k, \quad f(x^{(k)}) \leq M_0.$$

Taki ciąg przeczy kryterium Heinego. Dla $-\infty$ odwracamy nierówności.

Granica dwóch zmiennych: znaczenie zapisu

Zapis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = g$$

oznacza granicę względem odległości

$$\|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Współrzędne zbliżają się do celu jednocześnie, ale mogą robić to z różnymi prędkościami. Jedna z nich może nawet być cały czas równa swojej wartości granicznej, jeśli takie punkty należą do dziedziny.

Do **wykazania braku granicy** wystarczą dwa dopuszczalne ciągi, dla których wartości funkcji mają różne granice.

Do **wykazania istnienia granicy** nie wystarcza sprawdzenie kilku prostych lub krzywych. Potrzebne jest uzasadnienie obejmujące wszystkie punkty dziedziny, np. wspólne oszacowanie albo dowód dla dowolnego ciągu.

Przykład 1: oszacowanie modułu

Rozważmy

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^4} \sin y}{2x^2 + 3y^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Mamy $\sqrt[3]{x^4} = |x|^{4/3}$ oraz $|\sin y| \leq |y|$. Ponadto

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0 \implies 2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

Stąd, dla $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq |x|^{1/3} \frac{|xy|}{2x^2 + 3y^2} \\ &\leq |x|^{1/3} \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |x|^{1/3}. \end{aligned}$$

Prawa strona dąży do zera, więc

$$\boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0}.$$

Przykład 1: jawny wybór delty

Niech $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ponieważ $|x| \leq r$, wcześniejsze oszacowanie daje

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}r^{1/3}.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wybieramy

$$\delta = (2\varepsilon)^3.$$

Jeżeli $(x, y) \in D$ i $0 < r < \delta$, to

$$|f(x, y) - 0| \leq \frac{1}{2}r^{1/3} < \frac{1}{2}\delta^{1/3} = \varepsilon.$$

To jest pełny dowód z definicji Cauchy'ego: wskazano δ i sprawdzono warunek dla każdego punktu dziedziny w odpowiednim sąsiedztwie.

Użyte oszacowanie $|\sin y| \leq |y|$ obowiązuje dla obu znaków y .

Przykład 2: suma wyrazów znikających

Chcemy obliczyć

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2}.$$

Niech $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $(0, 0)$. Wtedy $x_k \rightarrow 0$ i $y_k \rightarrow 0$, a

$$\frac{x_k^3 + y_k^3}{x_k^2 + 2y_k^2} = x_k \frac{x_k^2}{x_k^2 + 2y_k^2} + y_k \frac{y_k^2}{x_k^2 + 2y_k^2}.$$

Współczynniki są ograniczone:

$$0 \leq \frac{x_k^2}{x_k^2 + 2y_k^2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{y_k^2}{x_k^2 + 2y_k^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Każdy iloczyn dąży do zera, więc suma także. Ponieważ ciąg był dowolny, z kryterium Heinego otrzymujemy granicę $\boxed{0}$.

Przykład 3: dwa różne wyniki

Dla $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, określonej poza $(0, 0)$, wybierzmy dwa ciągi:

$$p_k = (1/k, 1/k) \rightarrow (0, 0), \quad q_k = (1/k, 0) \rightarrow (0, 0).$$

Oba leżą w dziedzinie i omijają punkt graniczny. Tymczasem

$$f(p_k) = \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2}, \quad f(q_k) = \frac{0}{1/k^2} = 0.$$

Granice wartości są różne, więc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ nie istnieje.}$$

Pierwszy ciąg zbliża się po prostej $y = x$, drugi po osi x . Gdyby istniała granica funkcji, oba wyniki musiałyby być takie same.

Przykład 4: granica nieskończona

Badamy $f(x, y) = 1/|xy|$ na dziedzinie $D = \{(x, y) : xy \neq 0\}$. Z $2|xy| \leq x^2 + y^2$ wynika

$$\frac{1}{|xy|} \geq \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

Niech $M \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Wybierzmy

$$\delta = \frac{1}{|M| + 1} > 0.$$

Jeśli $(x, y) \in D$ oraz $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, to

$$\frac{1}{|xy|} \geq \frac{2}{x^2 + y^2} > 2(|M| + 1)^2 > M.$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla każdego rzeczywistego M . Zatem

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ xy \neq 0}} \frac{1}{|xy|} = +\infty.$$

Punkty osi nie należą do dziedziny i nie są brane pod uwagę.

Przykład 5: działania na granicach

$$f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{x+2y}, \quad D = \{(x, y) : x+2y \neq 0\}.$$

Dla dowolnego ciągu $(x_k, y_k) \in D \setminus \{(2, 1)\}$ zbieżnego do $(2, 1)$ mamy

$$x_k - y_k \rightarrow 1, \quad x_k + 2y_k \rightarrow 4.$$

Ciągłość funkcji wykładniczej daje $e^{x_k - y_k} \rightarrow e$. Ponieważ granica mianownika jest niezerowa, wolno zastosować twierdzenie o granicy ilorazu:

$$\frac{e^{x_k - y_k}}{x_k + 2y_k} \longrightarrow \frac{e}{4}.$$

Stąd

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x-y}}{x+2y} = \frac{e}{4}.$$

Punkty ciągu należą do dziedziny. Dodatnia granica mianownika zapewnia także, że od pewnego miejsca mianownik jest dodatni i oddalony od zera.

Przykład 6: tangens i usuwalny iloraz

Rozważamy $\tan(xy)/y$ na dziedzinie

$$D = \{(x, y) : y \neq 0, \cos(xy) \neq 0\}.$$

W dostatecznie małym otoczeniu $(3, 0)$ mamy $2 < x < 4$. Dla punktów dziedziny jest więc $xy \neq 0$ i wolno zapisać

$$\frac{\tan(xy)}{y} = x \frac{\tan(xy)}{xy}.$$

Ponieważ $x \rightarrow 3$, $xy \rightarrow 0$ oraz

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \frac{1}{\cos u} = 1,$$

otrzymujemy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = 3.$$

Równość z ilorazem przez xy stosujemy tylko tam, gdzie jego mianownik jest niezerowy.

Przykład 7: iloraz zależny od drogi

Niech

$$f(x, y) = \frac{x}{x + y}, \quad D = \{(x, y) : x + y \neq 0\}.$$

Wybierzmy ciągi leżące w D :

$$p_k = (0, 1/k) \rightarrow (0, 0), \quad q_k = (1/k, 1/k) \rightarrow (0, 0).$$

Wówczas

$$f(p_k) = 0, \quad f(q_k) = \frac{1}{2}.$$

Z kryterium Heinego wynika brak granicy w $(0, 0)$.

Nie wolno wybierać ciągu leżącego na prostej $x + y = 0$, ponieważ tam funkcja nie jest określona. Kontrprzykładowe ciągi zawsze muszą należeć do dziedziny.

Granice iterowane: najpierw jedna zmienna

W granicy iterowanej najpierw ustalamy jedną zmienną, a względem drugiej wykonujemy przejście graniczne. Na przykład

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right].$$

Drugą kolejność prowadzi do

$$\lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right].$$

Wewnętrzna granica musi istnieć dla ustalonych wartości zmiennej zewnętrznej w odpowiednim sąsiedztwie. Dopiero wtedy można utworzyć funkcję g i badać jej granicę.

Dla przejrzystości rozpatrujemy dalej funkcje określone co najmniej dla $0 < |x - a| < r$ i $0 < |y - b| < s$, gdzie $r, s > 0$. Mogą być określone również na prostych $x = a$ lub $y = b$.

Kolejność przechodzenia do granicy

Na schemacie najpierw przesuwamy się poziomo, czyli przechodzimy z x do a przy ustalonym y .

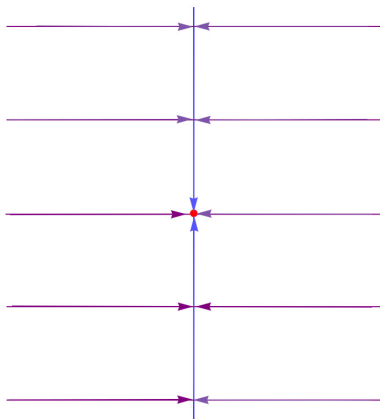
Powstaje funkcja

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

Następnie przechodzimy z y do b , co odpowiada pionowej strzałce:

$$\lim_{y \rightarrow b} h(y).$$

To nie jest to samo wymaganie co jednoczesna granica we wszystkich kierunkach.



Równe granice iterowane nie wystarczają

Dla $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ granica w $(0, 0)$ nie istnieje, co wykazaliśmy za pomocą dwóch ciągów.

Dla każdego ustalonego $x \neq 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

Podobnie, dla każdego ustalonego $y \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

Obie granice iterowane istnieją i są równe. Nie gwarantuje to granicy dwóch zmiennych: podejście po $y = x$ nadal daje $1/2$.

Granica istnieje mimo oscylacji

Niech

$$f(x, y) = (x + y) \cos \frac{1}{x}, \quad D = \{(x, y) : x \neq 0\}.$$

Dla każdego punktu dziedziny:

$$|f(x, y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ostatnia nierówność wynika z $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Prawa strona dąży do zera, więc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + y) \cos \frac{1}{x} = 0.$$

Dla ustalonego $x \neq 0$ najpierw możemy przejść z y do zera:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x \cos \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

Ta kolejność granicy iterowanej daje zatem również 0.

Dlaczego druga granica iterowana nie istnieje?

Ustalmy teraz $y \neq 0$. Rozważamy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \cos \frac{1}{x}.$$

Wyberzmy dwa ciągi dodatnie:

$$x_k = \frac{1}{2\pi k}, \quad \tilde{x}_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}.$$

Wówczas $\cos(1/x_k) = 1$ i $\cos(1/\tilde{x}_k) = -1$, więc

$$f(x_k, y) = x_k + y \rightarrow y, \quad f(\tilde{x}_k, y) = -(\tilde{x}_k + y) \rightarrow -y.$$

Ponieważ $y \neq 0$, granice są różne. Wewnętrzna granica względem x nie istnieje dla żadnego takiego y , więc nie można utworzyć

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right].$$

Dla $y = 0$ wewnętrzna granica istnieje, ale jeden punkt nie wystarcza do granicy zewnętrznej.

Związek granicy wspólnej i iterowanej

Zakładamy, że f jest określona co najmniej dla $0 < |x - a| < r$,
 $0 < |y - b| < s$ oraz że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}.$$

Jeśli dla każdego x z pewnego sąsiedztwa a istnieje skończona granica

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x,y),$$

to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Analogiczny wniosek zachodzi po zamianie ról zmiennych.

Konsekwencje

Jeśli granica wspólna i granica iterowana istnieją, są równe. Różne granice iterowane wykluczają granicę wspólną. Równość granic iterowanych sama jej nie zapewnia.

Istnienie granicy wspólnej nie zapewnia istnienia granic wewnętrznych; pokazał to przykład z $\cos(1/x)$.

Dowód zgodności granic

Niech $\varepsilon > 0$. Z istnienia granicy wspólnej wybieramy $\delta > 0$ tak, aby

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon/2.$$

Zmniejszamy δ , jeśli potrzeba, aby pozostać w prostokącie dziedziny i w zakresie istnienia g .

Ustalmy $0 < |x-a| < \delta/2$. Dla $0 < |y-b| < \delta/2$ odległość od (a,b) jest mniejsza niż $\delta/\sqrt{2} < \delta$. Zatem

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon/2.$$

Przechodząc z y do b przy ustalonym x , dostajemy

$$|g(x) - L| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Ten sam próg $\delta/2$ działa dla wszystkich takich x , co dowodzi $g(x) \rightarrow L$. Nieostra nierówność po przejściu do granicy jest wystarczająca dzięki zapasowi $\varepsilon/2$.

Ciągłość w punkcie dziedziny

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $a \in D$.

Definicja Cauchy'ego

Funkcja f jest ciągła w a , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Równoważne kryterium Heinego

Dla każdego ciągu $x^{(k)} \in D$:

$$x^{(k)} \rightarrow a \implies f(x^{(k)}) \rightarrow f(a).$$

W odróżnieniu od granicy wymagamy $a \in D$ i porównujemy wartości z konkretną liczbą $f(a)$. Nie wykluczamy punktu $x = a$ ani wyrazów ciągu równych a .

Równoważność definicji dowodzi się tak jak dla granic: przy zaprzeczeniu warunku Cauchy'ego wybiera się punkty w kulach o promieniach $1/k$.

Ciągłość na zbiorze i względem dziedziny

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest **ciągła na D** , jeśli jest ciągła w każdym punkcie D . Wszystkie punkty i ciągi używane w definicji należą do D .

Dla $A \subset D$ trzeba odróżniać dwa stwierdzenia:

- f jest ciągła w każdym punkcie A względem całej dziedziny D ;
- ograniczenie $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe, czyli badamy wyłącznie punkty należące do A .

Pierwsze stwierdzenie pociąga drugie. Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Przykład na prostej: $f(0) = 0$ i $f(x) = 1$ dla $x \neq 0$. Ograniczenie do $A = \{0\}$ jest ciągłe, lecz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest ciągła w 0.

W twierdzeniach o funkcji na zbiorze domkniętym wystarczy ciągłość jej ograniczenia do tego zbioru; nie trzeba definiować funkcji poza nim.

Ciągłość a granica i punkty izolowane

1. Punkt skupienia. Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia D , to

$$f \text{ jest ciągła w } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Warunki z definicji różnią się tylko dopuszczeniem $x = a$. W tym punkcie nierówność $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ zachodzi automatycznie.

2. Punkt izolowany. Jeśli $a \in D$ jest izolowany, wybieramy $r > 0$ takie, że $B(a, r) \cap D = \{a\}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć $\delta = r$: jedynym sprawdzanym punktem jest a .

Zatem każda funkcja jest ciągła w każdym izolowanym punkcie swojej dziedziny.

Granicy w naszym znaczeniu nie definiujemy tam bez założenia punktu skupienia. W przeciwnym razie warunek na sąsiedztwie mógłby być pusty i nie wyznaczałby jednej liczby.

Ciągłość funkcji zbudowanych ze znanych wzorów

Sumy, różnice i iloczyny funkcji ciągłych są ciągłe. Iloraz jest ciągły w punktach, w których mianownik jest niezerowy. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe, jeśli jest określone.

Stąd

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{1 + \sin^2 x + y^2}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}^2$: licznik i mianownik są ciągłe, a mianownik jest co najmniej równy 1.

Podobnie

$$g(x, y, z) = \frac{\sin(x + y)}{1 + e^{xy} + z^2}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}^3$, ponieważ $1 + e^{xy} + z^2 > 0$ wszędzie.

Przy stosowaniu reguły ilorazu sprawdzenie mianownika jest częścią uzasadnienia, a nie dodatkowym założeniem domyślnym.

Nieciągłość ilorazu w trzech zmiennych

Niech

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Dwa ciągi zbieżne do zera dają różne wyniki:

$$f(1/k, 1/k, 1/k) = \frac{2/k^2}{3/k^2} = \frac{2}{3},$$

$$f(1/k, 0, 0) = \frac{0}{1/k^2} = 0.$$

Granica w $(0, 0, 0)$ nie istnieje. Funkcja nie jest więc ciągła w tym punkcie, mimo że przypisano jej tam wartość 0.

Żadna zmiana samej wartości w zerze nie zapewni ciągłości, ponieważ nie usunie sprzeczności między tymi dwiema granicami. Poza zerem funkcja jest ciągła jako iloraz z dodatnim mianownikiem.

Ciągłość na dziedzinie bez punktu zerowego

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Na D wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Pierwiastek i odwrotność są ciągłe w użytym zakresie, więc f jest ciągła w każdym punkcie D .

Nie oznacza to ograniczoności. Dla $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ mamy

$$x^2 + 3y^2 \leq 3r^2, \quad f(x, y) \geq \frac{1}{\sqrt{3}r} \rightarrow +\infty.$$

Funkcji nie można przedłużyć w sposób ciągły do zera przez przypisanie skończonej wartości.

Samo 0 nie jest jednak punktem dziedziny wyjściowej funkcji. Jej ciągłość na D jest w pełni zgodna z takim zachowaniem przy brzegu dziedziny.

Oscylacje uniemożliwiają ciągłe przedłużenie

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 3, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Wyberzmy, dla $k \geq 1$,

$$p_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}, 0 \right), \quad q_k = \left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2k\pi}} \right).$$

Oba ciągi dążą do $(0, 0)$, lecz

$$f(p_k) = \sin(k\pi) = 0, \quad f(q_k) = \sin(\pi/2 + 2k\pi) = 1.$$

Granica nie istnieje, więc funkcja jest nieciągła w zerze. Nie pomogłoby zastąpienie liczby 3 żadną inną liczbą. Poza zerem funkcja jest ciągła.

Nieciągłość spowodowana jedną wartością

$$f(x, y) = \begin{cases} 5 - x - y, & (x, y) \neq (1, 2), \\ 1, & (x, y) = (1, 2). \end{cases}$$

W sąsiedztwie $(1, 2)$ funkcja ma ten sam wzór co ciągła funkcja $5 - x - y$.
Zatem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 5 - 1 - 2 = 2.$$

Ponieważ $f(1, 2) = 1$, granica nie jest równa wartości funkcji. Funkcja nie jest ciągła w $(1, 2)$.

Tym razem granica istnieje. Zastąpienie wartości $f(1, 2)$ liczbą 2 usunęłoby nieciągłość. Jest to **nieciągłość usuwalna**.

W każdym innym punkcie funkcja jest ciągła, ponieważ można wybrać otoczenie omijające $(1, 2)$.

Twierdzenie

Jeżeli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $a \in D$ i $f(a) \neq 0$, to istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego $x \in D \cap B(a, r)$ liczby $f(x)$ i $f(a)$ mają ten sam znak.

Dowód. W definicji ciągłości wybierzmy

$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0.$$

W odpowiednio małej kuli zachodzi $|f(x) - f(a)| < |f(a)|/2$.

- Jeśli $f(a) > 0$, to $f(x) > f(a) - |f(a)|/2 = f(a)/2 > 0$.
- Jeśli $f(a) < 0$, to $f(x) < f(a) + |f(a)|/2 = f(a)/2 < 0$.

Warunek jest lokalny i dotyczy punktów dziedziny. Dla $f(a) = 0$ nie ma takiego wniosku: przykładowo $f(x) = x$ zmienia znak przy zerze.

Ograniczoność i osiągnięcie ekstremów

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie **niepusty, domknięty i ograniczony**, a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas f jest ograniczona i istnieją $u, v \in K$ takie, że

$$f(u) = \min_{x \in K} f(x) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$f(v) = \max_{x \in K} f(x) = \sup_{x \in K} f(x).$$

W $\mathbb{R}^n$ zbiory domknięte i ograniczone są zwarte. W dowodzie wykorzystamy ich ciągową własność: każdy ciąg punktów K ma podciąg zbieżny do punktu K .

Istnienie zbieżnego podciągu wynika z twierdzenia Bolzana–Weierstrassa, a przynależność jego granicy do K z domkniętości.

Nie zakładamy, że K jest obszarem lub że jest spójny.

Weierstrass: dlaczego funkcja jest ograniczona?

Założmy przeciwnie, że ciągła funkcja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest ograniczona. Dla każdego $k \geq 1$ możemy wtedy wybrać $x^{(k)} \in K$ takie, że

$$|f(x^{(k)})| > k.$$

Z ciągowej własności K istnieje podciąg $x^{(k_j)}$ zbieżny do pewnego $a \in K$.

Ciągłość daje

$$f(x^{(k_j)}) \longrightarrow f(a) \in \mathbb{R}.$$

Każdy zbieżny ciąg liczbowy jest ograniczony. Tymczasem

$$|f(x^{(k_j)})| > k_j \longrightarrow +\infty,$$

co jest sprzecznością. Zatem f jest ograniczona na K .

Z ograniczoności i niepustości zbioru wartości istnieje skończony kres górny

$$M = \sup_{x \in K} f(x).$$

Z definicji kresu dla każdego $k \geq 1$ wybieramy $x^{(k)} \in K$ takie, że

$$M - \frac{1}{k} < f(x^{(k)}) \leq M.$$

Wobec tego $f(x^{(k)}) \rightarrow M$. Wybieramy podciąg $x^{(k_j)} \rightarrow v \in K$. Z ciągłości:

$$f(x^{(k_j)}) \rightarrow f(v), \quad \text{a zarazem } f(x^{(k_j)}) \rightarrow M.$$

Jednoznaczność granicy daje $f(v) = M$: kres górny jest maksimum.

Stosując ten sam argument do $-f$, otrzymujemy punkt $u \in K$, w którym f osiąga kres dolny. To kończy dowód twierdzenia.

Dlaczego założenia Weierstrassa są istotne?

- **Brak domkniętości.** Na $K = (0, 1)$ funkcja $f(x) = x$ jest ciągła i ograniczona, ale nie osiąga kresów 0 i 1.
- **Brak ograniczoności zbioru.** Na domkniętym $K = \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest ciągła, lecz nieograniczona.
- **Brak ciągłości.** Na $K = [0, 1]$ określmy $f(0) = 0$ i $f(x) = 1/x$ dla $x > 0$. Zbiór jest domknięty i ograniczony, a funkcja nieograniczona.

Niepustość jest potrzebna, aby można było wskazać punkty osiągnięcia minimum i maksimum.

Są to przykłady pokazujące, że założeń nie można usuwać z ogólnego twierdzenia. Konkretna funkcja może osiągać ekstrema także w sytuacji, w której nie wszystkie założenia są spełnione.

Własność Darboux wzdłuż drogi

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. Załóżmy, że $u, v \in D$ można połączyć ciągłą drogą $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, gdzie $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$.

Twierdzenie o wartości pośredniej

Jeśli $f(u) < \mu < f(v)$, to istnieje $t_0 \in (0, 1)$ takie, że

$$f(\gamma(t_0)) = \mu.$$

Zatem szukany punkt $x_0 = \gamma(t_0)$ leży na drodze łączącej u i v .

Dowód. Funkcja jednej zmiennej $h = f \circ \gamma$ jest ciągła na $[0, 1]$ i spełnia $h(0) = f(u)$, $h(1) = f(v)$. Z twierdzenia o wartości pośredniej dla funkcji jednej zmiennej wynika istnienie t_0 .

W szczególności można użyć łuku zwykłego. Różnowartościowość drogi nie jest potrzebna w tym dowodzie.

Wartości pośrednie na zbiorze spójnym

Ogólniej: jeśli K jest spójny i $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, to $f(K)$ jest przedziałem. Funkcja przyjmuje każdą wartość pomiędzy dowolnymi dwiema swoimi wartościami.

Dowód. Niech $f(u) < \mu < f(v)$ dla $u, v \in K$. Załóżmy, że f nigdzie nie przyjmuje wartości μ . Wtedy

$$A = \{x \in K : f(x) < \mu\}, \quad B = \{x \in K : f(x) > \mu\}$$

są rozłączne, niepuste i mają sumę równą K .

Są też otwarte względem K : ciągłość zapewnia, że ścisła nierówność zachowuje się w dostatecznie małym otoczeniu danego punktu.

Otrzymaliśmy rozdzielenie K , sprzeczne ze spójnością. Wobec tego istnieje $x_0 \in K$ takie, że $f(x_0) = \mu$.

Nie trzeba zakładać, że cały zbiór jest łukowo spójny.

Domknięcie ograniczonego obszaru

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym, ograniczonym obszarem, a $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą.

Wniosek

Funkcja przyjmuje na $\overline{D}$ wszystkie wartości od minimum do maksimum:

$$f(\overline{D}) = [m, M], \quad m = \min_{\overline{D}} f, \quad M = \max_{\overline{D}} f.$$

Uzasadnienie. Domknięcie $\overline{D}$ jest niepuste, domknięte i ograniczone. Z twierdzenia Weierstrassa istnieją $u, v \in \overline{D}$ z $f(u) = m$ i $f(v) = M$.

Dla $m < \mu < M$ wybieramy ciągi $u_k, v_k \in D$ zbieżne odpowiednio do u, v . Ciągłość daje, dla dostatecznie dużego k ,

$$f(u_k) < \mu < f(v_k).$$

Punkty u_k, v_k łączymy drogą w obszarze D i stosujemy własność Darboux. Wartości m, M są już osiągnięte w u, v .

Osiąganie ekstremów a wartości pośrednie

Weierstrass zapewnia ekstrema na dowolnym niepustym zbiorze domkniętym i ograniczonym. Do przyjmowania wszystkich wartości pomiędzy nimi potrzebna jest dodatkowa własność, np. spójność zbioru.

Rozważmy

$$K = [-2, -1] \cup [1, 2], \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2, -1], \\ 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Funkcja jest ciągła względem dziedziny K , a K jest domknięty i ograniczony. Minimum wynosi -1 , maksimum 1 , lecz funkcja nie przyjmuje wartości 0 .

Zbiór K nie jest spójny. Dlatego nie można przenosić wniosku o pełnym przedziale wartości na każdy zbiór domknięty i ograniczony.

Dla domknięcia obszaru poprzedni dowód wykorzystał łączenie punktów wewnątrz obszaru i ciągłość przy jego brzegu.