Analiza, Funkcje wielu zmiennych część 2

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Definicja

Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ punktu $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i istnieje granica właściwa

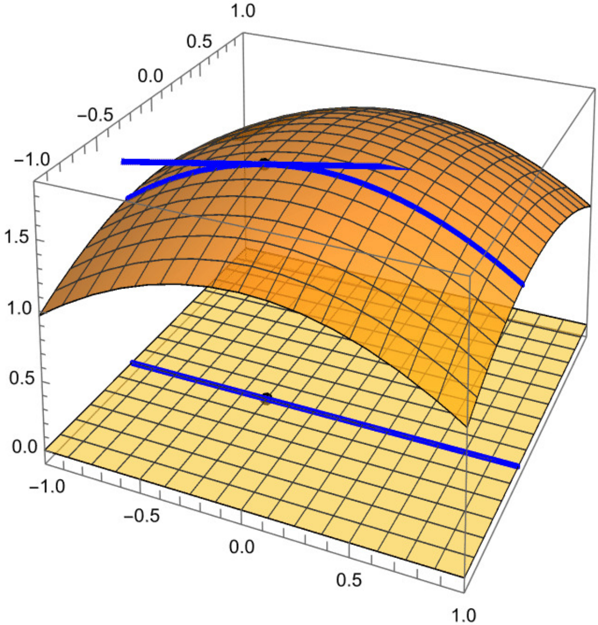
$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{\Delta x_i}$$

to tę granicę nazywamy *pochodną cząstkową* rzędu pierwszego funkcji f względem zmiennej x_i w punkcie a i oznaczamy:

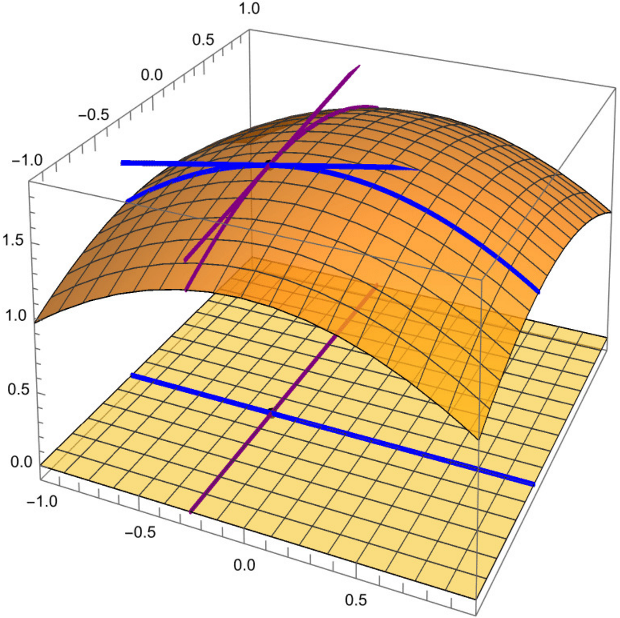
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a).$$

Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ to pochodna w punkcie a_i funkcji jednej zmiennej $x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Pochodne cząstkowe



Pochodne cząstkowe



Uwaga:

W definicji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ wszystkie zmienne poza x_i są stałe i w taki sam sposób traktuje się je przy obliczaniu pochodnych cząstkowych.

Uwaga:

W definicji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ wszystkie zmienne poza x_i są stałe i w taki sam sposób traktuje się je przy obliczaniu pochodnych cząstkowych.

Przykłady:

(1) $f(x,y,z) = x^2y^3 + e^{xy^2} + x \cdot \sin z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + e^{xy^2} \cdot y^2 + \sin z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + e^{xy^2} \cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \cos z$$

(2) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$$

(2) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$$

(3) $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

(4) Sprawdzić, czy funkcja $z = x \cdot \ln \frac{y}{x}$ spełnia równanie
$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$

$$z = x \cdot (\ln y - \ln x) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \ln x - 1 = \ln \frac{y}{x} - 1\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) + y \cdot \frac{x}{y} = x \ln \frac{y}{x} = z$$

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego

Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ istnieje dla każdego $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym to w zbiorze Ω określona jest nowa funkcja

$$\Omega \ni x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ istnieje dla każdego $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym to w zbiorze Ω określona jest nowa funkcja

$$\Omega \ni x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = f_{x_i x_j}(x)$ czyli

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego

Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ istnieje dla każdego $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym to w zbiorze Ω określona jest nowa funkcja

$$\Omega \ni x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = f_{x_i x_j}(x)$ czyli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego

Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ istnieje dla każdego $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym to w zbiorze Ω określona jest nowa funkcja

$$\Omega \ni x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = f_{x_i x_j}(x)$ czyli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

Stosujemy oznaczenie też $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$.

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Ogólnie: pochodną cząstkową rzędu pierwszego pochodnej cząstkowej rzędu $k-1$ funkcji f nazywamy *pochodną cząstkową rzędu* k tej funkcji czyli

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}(x)\right)$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Ogólnie: pochodną cząstkową rzędu pierwszego pochodnej cząstkowej rzędu $k-1$ funkcji f nazywamy *pochodną cząstkową rzędu* k tej funkcji czyli

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}(x)\right)$$

Stosujemy oznaczenie $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x)$ na k-krotną pochodną cząstkową po x_i oraz

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{j_1} \partial x_{i_2}^{j_2} \cdots \partial x_{i_m}^{j_m}}(x), \text{ gdzie } \sum_{l=1}^{m} j_l i_l = k,$$

na k-krotną pochodną cząstkową, gdzie j_l-krotnie rożniczkujemy po zmiennej x_{i_l} dla $l = 1, \cdots, m$.

Pochodna cząstkowa mieszana funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$ jest to pochodna cząstkowa rzędu $k \geqslant 2$, która nie jest pochodną cząstkową $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$, $i = 1, \dots, n$.

Pochodna cząstkowa mieszana funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest to pochodna cząstkowa rzędu $k \geqslant 2$, która nie jest pochodną cząstkową $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$, $i = 1, \ldots, n$.

Tw. (Schwarza)

Jeśli funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ ma w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ ciągłe pochodne mieszane rzędu $k \geqslant 2$ różniące się kolejnością różniczkowania względem zmiennych, to te pochodne mieszane są sobie równe.

W szczególności:
Jeśli $f \in C^2(D)$, to $\forall\,(x, y) \in D \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Pochodna cząstkowa mieszana funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest to pochodna cząstkowa rzędu $k \geqslant 2$, która nie jest pochodną cząstkową $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$, $i = 1, \ldots, n$.

Tw. (Schwarza)

Jeśli funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ ma w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ ciągłe pochodne mieszane rzędu $k \geqslant 2$ różniące się kolejnością różniczkowania względem zmiennych, to te pochodne mieszane są sobie równe.

W szczególności:
Jeśli $f \in C^2(D)$, to $\forall\, (x, y) \in D \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Uwaga: $f \in C^2(D)$ oznacza, że wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2 funkcji f są ciągłe.

Uwaga:

Ciągłość pochodnych w tw. Schwarza jest istotna, bo np. dla funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

pochodne mieszane są nieciągłe w $(0,0)$ i nie są sobie równe w tym punkcie:

Uwaga:

Ciągłość pochodnych w tw. Schwarza jest istotna, bo np. dla funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

pochodne mieszane są nieciągłe w $(0,0)$ i nie są sobie równe w tym punkcie:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6-y^6+9x^4y^2-9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

pochodne te nie są ciągłe w $(0,0)$, bo nie istnieją granice $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yx}(x,y)$

$$\left(\tfrac{1}{n},0\right) \to (0,0) : \quad f_{xy}\left(\tfrac{1}{n},0\right) = f_{yx}\left(\tfrac{1}{n},0\right) \to 1$$

$$\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \to (0,0) : \quad f_{xy}\left(0,\tfrac{1}{n}\right) = f_{yx}\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \to -1$$

$$\left(\tfrac{1}{n},0\right) \to (0,0)\ :\quad f_{xy}\left(\tfrac{1}{n},0\right) = f_{yx}\left(\tfrac{1}{n},0\right) \to 1$$

$$\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \to (0,0)\ :\quad f_{xy}\left(0,\tfrac{1}{n}\right) = f_{yx}\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \to -1$$

Wyznaczymy teraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y\,, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y\,, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Stąd:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Przykłady:

(1) Wyznaczyć pochodne drugiego rzędu funkcji

(a) $z(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$z_x = 3x^2 - 4xy\,, \quad z_y = -2x^2 + 6y$

$z_{xx} = 6x - 4y\,, \quad z_{xy} = z_{yx} = -4x\,, \quad z_{yy} = 6$

Przykłady:

(1) Wyznaczyć pochodne drugiego rzędu funkcji

(a) $z(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$z_x = 3x^2 - 4xy\,, \quad z_y = -2x^2 + 6y$

$z_{xx} = 6x - 4y\,, \quad z_{xy} = z_{yx} = -4x\,, \quad z_{yy} = 6$

(b) $u(x,y,t) = e^{xyt} \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$u_x = yte^{xyt}\,, \quad u_y = xte^{xyt}\,, \quad u_t = xye^{xyt}$

$u_{xx} = y^2t^2e^{xyt}\,, \quad u_{yy} = x^2t^2e^{xyt}\,, \quad u_{tt} = x^2y^2e^{xyt}$

$u_{xy} = u_{yx} = t(1+xyt)e^{xyt}\,, \quad u_{xt} = u_{tx} = y(1+xyt)e^{xyt}\,,$

$u_{yt} = u_{ty} = x(1+xyt)e^{xyt}$

(2) Sprawdzić, czy zachodzi równanie $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dla funkcji

(a) $z = \cos(ax - by)$

$z_x = -a\sin(ax - by)\,, \quad z_y = b\sin(ax - by)$

$z_{xy} = ab\cos(ax - by)\,, \quad z_{yx} = ab\cos(ax - by) \Rightarrow z_{xy} = z_{yx}$

(2) Sprawdzić, czy zachodzi równanie $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dla funkcji

(a) $z = \cos(ax - by)$

$z_x = -a\sin(ax - by)\,, \quad z_y = b\sin(ax - by)$

$z_{xy} = ab\cos(ax - by)\,, \quad z_{yx} = ab\cos(ax - by) \Rightarrow z_{xy} = z_{yx}$

(b) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}\,, \quad z_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$

$z_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,, \quad z_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow z_{xy} = z_{yx}$

(3) Sprawdzić, czy funkcja $z = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ spełnia równanie $2\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right) \cdot \left[-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x)$$

$$z \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}[\sin(2y - x)] = 2\cos(2y - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z_{xx} + z_{yx} = -2\cos(2y - x) + 2\cos(2y - x) = 0$$

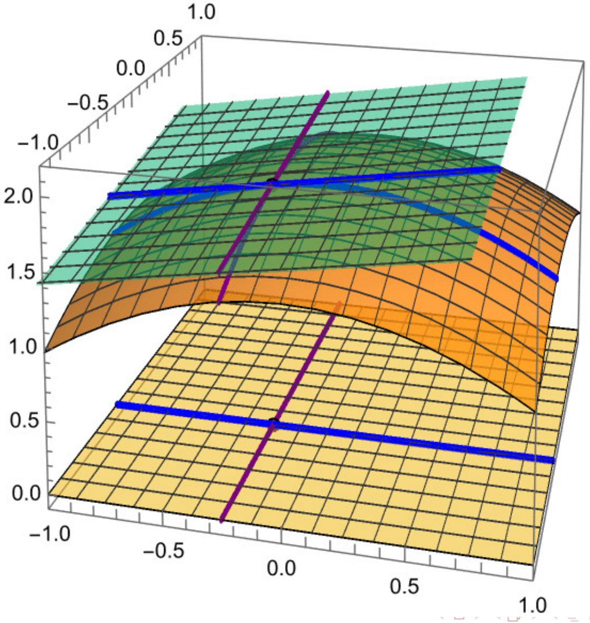
Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem otwartym, $(x_0, y_0) \in D$ i $f : D \to \mathbb{R}$.

Stwierdzenie

Załóżmy, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu f (powierzchni $z = f(x, y)$) w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Wtedy równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{1}$$

Płaszczyzna styczna do powierzchni $z = f(x, y)$



Dowód

Płaszczna styczna powinna zawierać proste styczne do wykresów funkcji $x \mapsto f(x, y_0)$ oraz $y \mapsto f(x_0, y)$. Są one dane wzorami

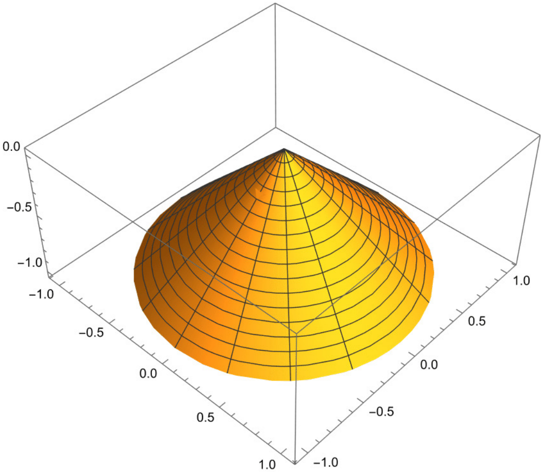
$$\begin{cases} y &= y_0 \\ z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= x_0 \\ z &= f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Jedyną płaszczyzną zawierającą obie proste jest (1).$\square$

Płaszczyzna styczna do powierzchni

Nie do każdej powierzchni istnieje płaszczyzna styczna. Niech $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. W punkcie $(0, 0, 0)$ nie ma płaszczyzny stycznej do tej powierzchni. Dlaczego? Zauważmy, że $f(x, 0) = -|x|$, $f(0, y) = -|y|$.



Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in D$ i $f : D \to \mathbb{R}$.

Definicja

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a jeśli istnieją pochodne cząstkowe $f_{x_i}(a)$ dla $i = 1, \cdots, n$ oraz

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i - a_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}} = 0. \tag{2}$$

Jeżeli funkcja f jest rózniczkowalna w a to wielkość $df(a) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) dx_i$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie a.
Jezeli funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $A \subset D$ jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru.

Różniczkowalność funkcji jednej zmiennej, a wielu zmiennych

Uwaga. Granicę (2) można zapisać następująco, gdzie $h = x - a = (h_1, \cdots, h_n)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}} = 0.$$

Niech $n = 1$ i $D \subset \mathbb{R}$ będzie podzbiorem otwartym, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a jeśli istnieje granica skończona $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Co jest równoważne temu, że $0 = \lim_{x \to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$. A to jest równoważne temu, że $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{|x-a|}$. Ostatnia równość jest dokładnie podstawieniem $n = 1$ do (2) w definicji rózniczkowalności funkcji n zmiennych .

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych (przykład)

Sprawdźmy, czy funkcja $f(x,y)=x^2-2y^2$ jest różniczkowalna w punkcie $(2,1)$. Wartość $f(2,1)=2$ Pochodne cząstkowe $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=-4y$. Stąd $f_x(2,1)=4$ i $f_y(2,1)=-4$. Musimy policzyć granicę przy $(u,v)\to(0,0)$ wyrażenia

$$\frac{f(2+u,1+v)-f(2,1)-f_x(2,1)u-f_y(2,1)v}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{(2+u)^2-2(1+v)^2-2-4u+4v}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$
$$\frac{u^2-2v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u^2+v^2-3v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u^2+v^2-3v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}-3\frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$
$$\sqrt{u^2+v^2}-3\frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=\sqrt{u^2+v^2}-3\sqrt{v^2}\frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\sqrt{u^2+v^2}=0$ oraz $0\le\sqrt{v^2}\frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\le\sqrt{v^2}\to 0$.

Stąd $\lim_{(u,v)\to(0,0)}\sqrt{v^2}\frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}=0$. Całe wyrażenie zbiega więc do 0 dla $(u,v)\to(0,0)$ co dowodzi różniczkowalności funkcji f w punkcie $(2,1)$.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych a ciągłość

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ będzie punktem wewnętrznym D.
Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a to f jest ciągła w a.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych a ciągłość

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ będzie punktem wewnętrznym D.
Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a to f jest ciągła w a.

Dowód: Niech

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i-a_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}} & \text{dla} \quad x \neq a \\ 0 & \text{dla} \quad x = a. \end{cases}$$

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych a ciągłość

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ będzie punktem wewnętrznym D.
Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a to f jest ciągła w a.

Dowód: Niech

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i-a_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}} & \text{dla} \quad x \neq a \\ 0 & \text{dla} \quad x = a. \end{cases}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w a więc $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ i funkcja ε jest ciągła w a.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych a ciągłość

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ będzie punktem wewnętrznym D.
Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a to f jest ciągła w a.

Dowód: Niech

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i-a_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}} & \text{dla} \quad x \neq a \\ 0 & \text{dla} \quad x = a. \end{cases}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w a więc $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ i funkcja ε jest ciągła w a.
Stąd $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \varepsilon(x)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$.
Więc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.$\square$

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ będzie punktem wewnętrznym D i $f : D \to \mathbb{R}$.
Jeżeli dla każdego $i = 1, \cdots, n$ pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ istnieją i są ciągłe to funkcja f jest różniczkowalna w a.

Przykład: $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$. $D_f = \mathbb{R}^2$.
Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\cos(x^2 + y^3)2x$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(x^2 + y^3)3y^2$ są ciągłe.
Stąd f jest różniczkowana w $\mathbb{R}^2$.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych (przykład)

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych (przykład)

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych (przykład)

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0) \to (0,0)$ $f_x((\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0) = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty.$

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0) \to (0,0)$ $f_x((\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0) = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty.$

Stąd f_x nie jest ciągła w $(0,0)$.

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych (przykład)

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0)\to(0,0)$ $f_x((\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty.$
Stąd f_x nie jest ciągła w $(0,0)$. Ze wględu na symetrię $f(x,y)=f(y,x)$ f_y też nie jest ciągła w $(0,0)$

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0) \to (0,0)$ $f_x((\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0) = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty$.
Stąd f_x nie jest ciągła w $(0,0)$. Ze względu na symetrię $f(x,y) = f(y,x)$ f_y też nie jest ciągła w $(0,0)$

$0 \leq \left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq$
$\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

Przykład funkcji różniczkowalnej w $(0,0)$, której pochodne cząstkowe nie są ciągłe:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0)\to(0,0)$ $f_x((\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty.$

Stąd f_x nie jest ciągła w $(0,0)$. Ze względu na symetrię $f(x,y)=f(y,x)$ f_y też nie jest ciągła w $(0,0)$

$0\leq\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq$
$\sqrt{x^2+y^2}\to 0$

Stąd $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ czyli f jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Gradient i pochodne kierunkowe

Niech funkcja f będzie funkcją różniczkowalną w $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definicja gradientu

Gradientem funkcji f w punkcie $a \in D$ nazywamy wektor

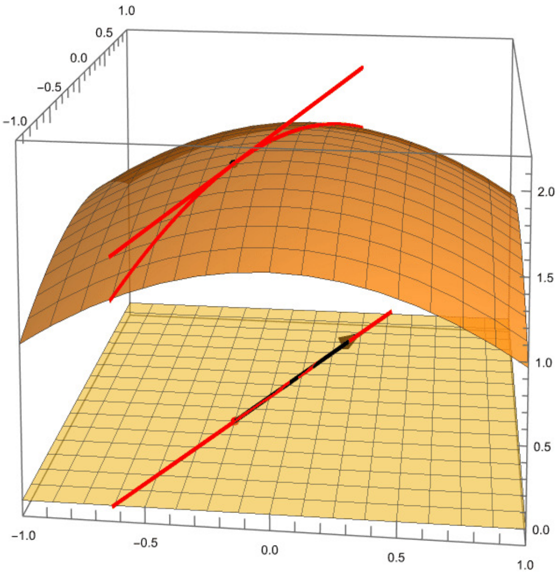
$$\mathrm{grad} f(a) = \nabla f(a) = (f_{x_1}(a), \cdots, f_{x_n}(a)).$$

Definicja pochodnej kierunkowej

Niech $v \in \mathbb{R}^n$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $a \in D$ w kierunku wektora v określamy następującym wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Pochodna kierunkowa



Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

Definicja

Iloczyn skalarny wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$ to liczba

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Jeśli wektory są prostopadłe to $v \cdot w = 0$.

Uwaga. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ to pochodna kierunkowa w kierunku wektora $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}$.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie a to istnieją pochodne kierunkowe w a w kierunku dowolnego wektora $v = (v_1, \cdots, v_n)$ i są równe

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = \nabla f \cdot v.$$

Dowód

Niech $v \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem . Funkcja f jest różniczkowalna w a więc istnieje granica

$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-\sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)tv_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (tv_i)^2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}} \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-t\sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)v_i}{t} =$

$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}} \left(\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)v_i\right) = 0.$

Stąd otrzymujemy, że $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)v_i$ czyli

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v.$$

□

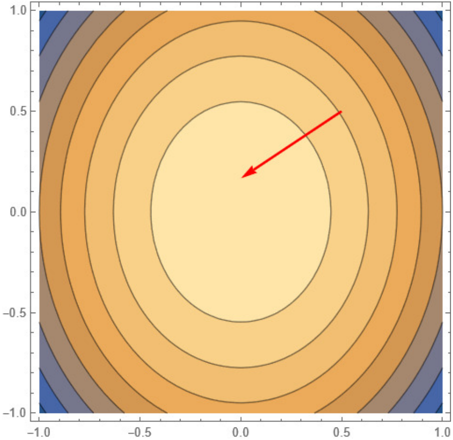
Własności gradientu

Twierdzenie

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w D i $a \in D$ oraz $\nabla f(a) \neq 0$. Wtedy

1. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie a, a jego długość określa bezwzględną wartośc tej zmiany.
2. Gradient jest prostopadły do poziomic funkcji f.

Własności gradientu



(1) Rozważmy wektory w R^2 o długości 1. Mają one postać $v = (\cos t, \sin t)$. Pochodna kierunkowa f w a w kierunku wektora v jest równa

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \sin t = g(t).$$

Policzmy

$$\frac{dg}{dt}(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(a) \sin t + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cos t = 0.$$

Stąd $\mathrm{tg}(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) / \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
Czyli $v = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|} = |\nabla f(a)|$.

dowód twierdzenia dla $n = 2$

(2) Niech $a = (a_1, a_2)$ i ciąg $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, y_n) \in f^{-1}(f(a))$ oraz $(x_n, y_n) \to a$. Wtedy $f(x_n, y_n) = f(a)$. Rozważmy granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n,y_n)-f(a)-f_x(a)(x_n-a_1)-f_y(a)(y_n-a_2)}{\sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2}} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{-\nabla f(a)\cdot(x_n-a_1,y_n-a_2)}{\sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2}} = 0$. Stąd wynika, że
$\lim_{n\to\infty} \nabla f(a) \cdot \frac{(x_n-a_1,y_n-a_2)}{|(x_n-a_1,y_n-a_2)|} = \nabla f(a) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-a_1,y_n-a_2)}{|(x_n-a_1,y_n-a_2)|} = 0.$
Ciąg $\frac{(x_n-a_1,y_n-a_2)}{|(x_n-a_1,y_n-a_2)|}$ zbiega do wektora stycznego w a do $f^{-1}(f(a))$ bo $(x_n, y_n) \in f^{-1}(f(a))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $(x_n, y_n) \to a$. Stąd $\nabla f(a)$ jest prostopadły do $f^{-1}(f(a))$ w a. □

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ oraz $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ oraz $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.
Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$.

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ oraz $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.
Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$. Wtedy dla $u \neq 0$
$\frac{df}{d(u,v)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tuv^3}{u^2+t^4v^6} = 0$

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ oraz $f(0,\frac{1}{n})=0\to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.
Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$. Wtedy dla $u\neq 0$ $\frac{df}{d(u,v)}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tuv^3}{u^2+t^4v^6}=0$ oraz dla $u=0$ $\frac{df}{d(0,v)}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t^3v^3}{t^7v^6}=0$

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ oraz $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$. Wtedy dla $u \neq 0$ $\frac{df}{d(u,v)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tuv^3}{u^2+t^4v^6} = 0$ oraz dla $u=0$ $\frac{df}{d(0,v)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t^3v^3}{t^7v^6} = 0$ czyli pochodnia kierunkowa w $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora istnieje i jest równa 0.

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ oraz $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$. Wtedy dla $u \neq 0$ $\frac{df}{d(u,v)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tuv^3}{u^2+t^4v^6} = 0$ oraz dla $u=0$ $\frac{df}{d(0,v)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t^3v^3}{t^7v^6} = 0$ czyli pochodnia kierunkowa w $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora istnieje i jest równa 0. Ale

$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^3}{(x^2+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ciągłość a pochodne kierunkowe

Przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie, a ma pochone kierunkowe w tym punkcie w dowolnym kierunku.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ oraz $f(0,\frac{1}{n})=0\to 0$. Stąd granica $f(x,y)$ w $(0,0)$ nie istnieje czyli f nie jest ciągła w $(0,0)$.
Niech (u,v) będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^2$. Wtedy dla $u\neq 0$
$\frac{df}{d(u,v)}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tuv^3}{u^2+t^4v^6}=0$ oraz
dla $u=0$ $\frac{df}{d(0,v)}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t^3v^3}{t^7v^6}=0$
czyli pochodnia kierunkowa w $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora istnieje i jest równa 0. Ale
$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy^3}{(x^2+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}$.
Stąd $\varepsilon(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})=\frac{n}{2\sqrt{\frac{1}{n^4}+1}}\to+\infty$, więc funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Przykłady

(1) Obliczyć gradient i pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = x^2 + 3xyz + yz^3$ w punkcie $(5,2,1)$ w kierunku wektora $(3,3,3)$

$\nabla f(x,y,z) = (2x + 3yz, 3xz + z^3, 3xy + 3yz^2)$

$\nabla f(5,2,1) = (16,16,36)$

$\frac{df}{d(3,3,3)}(5,2,1) = \nabla f(5,2,1) \cdot (3,3,3) = (16,16,36) \cdot (3,3,3) = 16 \cdot 3 + 16 \cdot 3 + 36 \cdot 3 = 204$

(2) Dla funkcji $f(x,y) = x^2 + xy$ i punktu $(2,1)$ znaleźć wektor, w kierunku którego szybkość wzrostu $f(x,y)$ w punkcie $(2,1)$ jest największa, napisać równania parametryczne półprostej wychodzącej z $(2,1)$ w tym kierunku.

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = (2x + y)|_{(2,1)} = 5\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = x|_{(2,1)} = 2$

$\nabla f(2,1) = (5,2)\,, \quad |\nabla f(2,1)| = \sqrt{29}$

$\{(x,y) : \ x = 2 + t \cdot 5\,, \ y = 1 + t \cdot 2\,, \ t \geqslant 0\}$

Pochodne funkcji złożonych

Tw. (o pochodnej funkcji złożonej dla $n = 2$)

Jeśli funkcje $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $t_0 \in (a, b)$, punkt $(x(t_0), y(t_0))$ jest punktem wewnętrznym $D \subset \mathbb{R}^2$ i funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w punkcie $(x(t_0), y(t_0))$, to funkcja złożona $z(t) = f(x(t), y(t))$ jest różniczkowalna w t_0 oraz

$$z'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0)$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$$

$$= \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$$

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$.

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Wtedy $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0)$.

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Wtedy $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0)$.

Z różniczkowalności f otrzymujemy
$z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, gdzie $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Wtedy $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0)$.

Z różniczkowalności f otrzymujemy

$z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, gdzie $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Dzieląc przez Δt otrzymujemy

$\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} =$

$$f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$$

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Wtedy $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0)$.
Z różniczkowalności f otrzymujemy
$z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, gdzie $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Dzieląc przez Δt otrzymujemy
$\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} =$
$f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$
Prechodząc do granicy $\Delta t \to 0$ mamy
$z'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$,

Dowód.

Niech $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Wtedy $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t_0)$.
Z różniczkowalności f otrzymujemy
$z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, gdzie $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Dzieląc przez Δt otrzymujemy
$\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} =$
$f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$
Prechodząc do granicy $\Delta t \to 0$ mamy
$z'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$,czyli

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

□

Przykłady:

(1) Obliczyć $\frac{dz}{dt}$ dla funkcji $z = f[x(t), y(t)]$ w $t_0 = 0$ dla funkcji $z = f(x, y) = x^2 + y \sin x$, gdzie $x = x(t) = 2t + \sinh t$, $y = y(t) = e^t - t^2$

$x_0 = x(t_0) = 0\,, \quad y_0 = y(t_0) = 1$

$f_x(x, y) = 2x + y \cos x\,, \quad f_x(0, 1) = 1$

$f_y(x, y) = \sin x\,, \quad f_y(0, 1) = 0$

$x'(t) = 2 + \cosh t\,, \quad x'(0) = 3$

$y'(t) = e^t - 2t\,, \quad y'(0) = 1$

$\Rightarrow z'(0) = f_x(0, 1) \cdot x'(0) + f_y(0, 1) \cdot y'(0) = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 3$

Sprawdzenie:

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = (2t + \sinh t)^2 + (e^t - t^2) \cdot \sin(2t + \sinh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) +$$
$$+(e^t - 2t) \cdot \sin(2t + \sinh t) + (e^t - t^2) \cdot \cos(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(0) = 3$$

Sprawdzenie:

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = (2t + \sinh t)^2 + (e^t - t^2) \cdot \sin(2t + \sinh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) +$$
$$+ (e^t - 2t) \cdot \sin(2t + \sinh t) + (e^t - t^2) \cdot \cos(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(0) = 3$$

(2) $f(x, y) = x^2 + y^2\,, \quad x(t) = e^t \cos t\,, \quad y(t) = e^t \sin t$

$$z'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t) = 2x \cdot (e^t \cos t)' + 2y \cdot (e^t \sin t)' =$$
$$= 2e^t \cos t(e^t \cos t - e^t \sin t) + 2e^t \sin t(e^t \sin t + e^t \cos t) = 2e^{2t}$$

Sprawdzenie:

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = (2t + \sinh t)^2 + (e^t - t^2) \cdot \sin(2t + \sinh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) +$$
$$+ (e^t - 2t) \cdot \sin(2t + \sinh t) + (e^t - t^2) \cdot \cos(2t + \sinh t) \cdot (2 + \cosh t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(0) = 3$$

(2) $f(x, y) = x^2 + y^2\,, \quad x(t) = e^t \cos t\,, \quad y(t) = e^t \sin t$

$$z'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t) = 2x \cdot (e^t \cos t)' + 2y \cdot (e^t \sin t)' =$$
$$= 2e^t \cos t(e^t \cos t - e^t \sin t) + 2e^t \sin t(e^t \sin t + e^t \cos t) = 2e^{2t}$$

Sprawdzenie:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 = e^{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi'(t) = 2e^{2t}$$

Pochodne wyższych rzędów, $n = 2$

Twierdzenie

Jeżeli funkcje $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$ są 2-krotnie różniczkowalne w $t_0 \in (a, b)$, punkt $(x(t_0), y(t_0))$ jest punktem wewnętrznym $D \subset \mathbb{R}^2$ i $f : D \to \mathbb{R}$ ma ciągłe 2-gie pochodne cząstkowe w $(x(t_0), y(t_0))$ to druga pochodna funkcji $z(t) = f(x(t), y(t))$ w t_0 jest równa $z''(t_0) =$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\Big|_{t_0}$$

Dowód: $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right) =$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \square$$

Pochodna funkcji złożonej

Przekształcenie $x = (x_1, \ldots, x_n) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne w $t \in (a, b)$ jeżeli $x_i : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w t dla każdego $i = 1, \cdots, n$.

Tw. (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeśli $x = (x_1, \ldots, x_n) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne w $t_0 \in (a, b)$, $x(t_0)$ jest punktem wewnętrznym D oraz $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x(t_0)$ to funkcja $z(t) = f(x(t))$ jest różniczkowalna w t_0 oraz

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t_0) = \nabla f(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t_0)), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t_0)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$$

Tw. (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej dla $n, m = 2$)

Jeśli funkcje $x, y : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $(u_0, v_0) \in D$, $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ jest punktem wewnętrznym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w (x_0, y_0) to funkcja $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ jest różniczkowalna w (u_0, v_0) oraz

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$\nabla z(u_0, v_0) = \nabla f(x_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} \nabla x(u_0, v_0) \\ \nabla y(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Niech $D \subset \mathbb{R}^m$. Przekształcenie $x = (x_1, \ldots, x_n) : D \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne w $a = (a_1, \cdots, a_m) \in D$ jeżeli $x_i : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w a dla każdego $i = 1, \cdots, n$.

Tw. (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Jeśli $x = (x_1, \ldots, x_n) : D \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne w $a \in D \subset \mathbb{R}^m$, $x(a)$ jest punktem wewnętrznym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x(a)$ to funkcja $z(u) = f(x(u))$ jest różniczkowalna w a oraz

$$\frac{\partial z}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(a)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(a) \text{ dla } j = 1, \cdots, m.$$

$$\nabla z(a) = \nabla f(x(a)) \cdot \begin{pmatrix} \nabla x_1(a) \\ \vdots \\ \nabla x_n(a) \end{pmatrix}.$$

Pochodne wyższych rzędów dla $n = 2$, $m = 2$

Załóżmy, że fukcje f, x, y są klasy C^2. Wtedy

Pochodne wyższych rzędów dla $n = 2$, $m = 2$

Załóżmy, że fukcje f, x, y są klasy C^2. Wtedy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

Pochodne wyższych rzędów dla $n = 2$, $m = 2$

Załóżmy, że fukcje f, x, y są klasy C^2. Wtedy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$.

Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta\,,\;\, y = r\sin\theta$.

$z(x, y) = z[x(r, \theta), y(r, \theta)]$

Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$.

$z(x,y) = z[x(r,\theta), y(r,\theta)]$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$.

$z(x,y) = z[x(r,\theta), y(r,\theta)]$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$.

$z(x,y) = z[x(r,\theta), y(r,\theta)]$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Przykłady:

(1) Przekształcić wyrażenie różniczkowe $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$z(x,y) = z[x(r,\theta), y(r,\theta)]$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Stąd:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$$
$$= r\cos\theta\left(\cos\theta \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$
$$= r \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

(2) Wyrazić $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ w zmiennych (u, v) : $u = x + y$, $v = x + 2y$

(2) Wyrazić $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ w zmiennych (u, v) : $u = x + y$, $v = x + 2y$

$z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$

(2) Wyrazić $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ w zmiennych (u, v) : $u = x + y$, $v = x + 2y$

$z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

(2) Wyrazić $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ w zmiennych (u, v) : $u = x + y$, $v = x + 2y$

$z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \cdot 2 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Uwaga:

Stosując zamianę zmiennych można uprościć wyrażenie różniczkowe (opisujące np. zjawisko fizyczne) lub opis obszaru, w którym rozpatrywane jest wyrażenie różniczkowe.

Uwaga:

Stosując zamianę zmiennych można uprościć wyrażenie różniczkowe (opisujące np. zjawisko fizyczne) lub opis obszaru, w którym rozpatrywane jest wyrażenie różniczkowe.

Przykład:
Dla danych $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i $R > 0$ obszar $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ to koło otwarte o środku w punkcie (a, b) i promieniu R.

Uwaga:

Stosując zamianę zmiennych można uprościć wyrażenie różniczkowe (opisujące np. zjawisko fizyczne) lub opis obszaru, w którym rozpatrywane jest wyrażenie różniczkowe.

Przykład:
Dla danych $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i $R > 0$ obszar $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ to koło otwarte o środku w punkcie (a, b) i promieniu R.

We współrzędnych (r, θ) : $x = a + r\cos\theta$, $y = b + r\sin\theta$ ma prostszy opis $r \in [0, R)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Opis koła otwartego

Koło otwarte $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$ we współrzędnych (r,θ) : $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$ ma prostszy opis $r\in[0,R)$, $\theta\in[0,2\pi)$.