

1. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności oraz naszkicuj wykres funkcji $f(x)$, jeśli:

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2},$$

$$(b) f(x) = \frac{\log_3(x^2)}{2 \log_3 x} \cdot (x^2 + x - 2),$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}.$$

2. Dla $x \in \mathbb{R}$ symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x . Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = [x]$ oraz $h(x) = x - [x]$.

3. Korzystając z definicji zbadaj parzystość funkcji:

$$(a) f(x) = x \cdot (2^x - 2^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(b) f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definicja:

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **parzysta**, jeśli $\forall x \in X [-x \in X \wedge f(-x) = f(x)]$.

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **nieparzysta**, jeśli $\forall x \in X [-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)]$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ i na tej podstawie podaj jej okres podstawowy, jeśli:

$$(a) f(x) = \sin(\pi x),$$

$$(b) f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|,$$

$$(c) f(x) = (\sin x + \cos x)^2.$$

5. Rozwiąż równanie/nierówność:

$$(a) \frac{\log_2 x - 1}{x^2 - x} \leq 0;$$

$$(b) 3 \log(x + 1) = \log(1 - x^2);$$

$$(c) 2^{|x|-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

6. Korzystając z definicji wykaż, że funkcja $f(x)$ jest różnowartościowa, jeśli

$$(a) f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(b) f(x) = \log_2 \left(\frac{x+1}{2-x} \right), \quad x \in (-1; 2).$$

Definicja:

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **różnowartościowa**, jeśli

$\forall x_1, x_2 \in X [f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$.

7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ oraz podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich, jeśli:

(a) $f(x) = \frac{1}{2^x+4}$,

(b) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1}$,

(c) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$,

(d) $f(x) = \cos x$, $x \in [-3\pi; -2\pi]$.