

1. Zbadaj istnienie granicy podwójnej $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$, jeśli:

$$(a) f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2 + 2y^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(b) f(x,y) = \frac{x + y - 2}{x^2 + y^2 - 2}, \quad (x_0, y_0) = (1, 1),$$

$$(c) f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(d) f(x,y) = \frac{x - xy}{2x^2 + (y - 1)^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 1).$$

2. Oblicz, jeśli istnieją, pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, jeśli:

$$(a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(3x^2 + y^2)}{x^3}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

$$(b) f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3},$$

$$(c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0, y_0) oraz istnienie pochodnych cząstkowych w tym punkcie, jeśli:

$$(a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(b) f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

4. Zbadaj istnienie i ciągłość pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0, 0)$, jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

5. Wyznacz, o ile istnieją, ekstrema właściwe funkcji $f(x,y)$, jeśli:

$$(a) f(x,y) = \ln(2xy) - 2x^2 - y^2,$$

$$(b) f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy},$$

$$(c) f(x,y) = (2x + y^2)e^x,$$

$$(d) f(x,y) = 2x^2 - x^3y^2 - \ln x,$$

6. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x,y) = xy^2$.