INFORMATYKA - SEMESTR 1

ANALIZA. ZESTAW 11.

Zad. 1. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz pochodną kierunkową f w kierunku wektora $[\cos t, \sin t]$ w punkcie $(x,y) \neq (0,0)$. Dla jakiej wartości t pochodna kierunkowa przyjmuje wartości ekstremalne?

Zad. 2. Przekształcić wyrażenie różniczkowe

a) $u_x^2 + u_y^2$ wprowadzając zmienne $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

b) $(x+y)f_x - (x-y)f_y$ wprowadzając zmienne $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Zad. 3. Wykazać, że funkcja $u(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, gdzie $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ spełnia równanie

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$$

Zad. 4. Wykazać, że równanie

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$$

określa w pewnym otoczeniu punktu $x = 0$ dokładnie jedną ciągłą funkcję uwikłaną spełniającą warunek $y(0) = 1$. Obliczyć $y'(0)$, $y''(0)$ oraz $y'''(0)$. Co możemy powiedzieć o lokalnym zachowaniu funkcji $y(x)$ w otoczeniu 0?

Zad. 5. Wykazać z definicji różniczkowalność funkcji $f(x,y) = x^3 - 2xy$ w punkcie $(1,1)$. Policzyć gradient f w tym punkcie i pochodną kierunkową w kierunku wektora $[-1,2]$. Określić kierunek największego wzrostu funkcji w tym punkcie. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,1,-1)$.

Zad. 6. Policzyć $\frac{\partial}{\partial u} f_x(u^3 - 4vu, v^2 - 2uv^3)$, gdzie $f(x,y)$ jest funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$.

Zad. 7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = -1 - 8x + x^2 - 12y + 4xy + 8y^2 - 28z + 6xz + 8yz + 11z^2.$$

Zad. 8. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji
a) $f(x,y) = x + \frac{4}{3}x^3 + 4xy + 2y^2$ na zbiorze domkniętym obraniczonym

prostymi $x = 0$, $y = -1$, $x + y = 3$,
b) $h(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na kole domkniętym o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1.