ANMA

Z_3

1. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x)$ w każdym punkcie należącym do jej dziedziny. W przypadku punktu nieciągłości określ jej rodzaj.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{dla} \quad x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi) \cup (\pi;\ 2\pi), \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \{0,\ \pi\}. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

2. Dla jakiej wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$, jeśli:

   $$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1, \\ \log_a x & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-4}\right)} & \text{dla} \quad x > 4. \end{cases}$$

3. Wykaż, że równanie $e^x - 2\cos x = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(0;\ 1)$.

4. Wykaż, że równanie $\ln x + 2x = 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

5. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnij, że równanie $x^x = 3$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $(1;\ 2)$.

6. Oblicz korzystając z definicji $f'(x)$, gdy $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$, $x \neq -\frac{2}{3}$.

7. Zbadaj istnienie $f'(0)$, gdy:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$ w przypadku, gdy $k = 1$ oraz $k = 2$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x} & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$

8. Oblicz, zakładając że istnieje, pochodną funkcji:

   (a) $f(x) = x^{\cos(2x)}$,

   (b) $g(x) = \log_x(\operatorname{arctg} x)$,

   (c) $h(x) = \sqrt[x]{1+x}$.