ANMA

Z_{8-9}

1. Niech $f : [-a;\ a] \to \mathbb{R}$, gdzie $a > 0$, będzie funkcją ciągłą w $[-a;\ a]$. Wykaż, że:
   (a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\ \mathrm{dx}$,
   (b) jeśli f jest funkcją parzystą, to $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{dx}$,
   (c) jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

2. Nie obliczając całki zbadaj monotoniczność funkcji $F(x)$, jeśli:
   (a) $F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{dt}}{t^2 + 2t + 2}$,
   (b) $F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{dt}$.

3. Oblicz granicę:
   (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tg} t}\ \mathrm{dt}}{\int_0^{\mathrm{tg} x} \sqrt{\sin t}\ \mathrm{dt}}$,
   (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1)\mathrm{dt}}{x^2}$,
   (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_{e^x}^{e^{3x}} \frac{\mathrm{dt}}{\ln^3 t}}{e^{3x}}$.

4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:
   (a) $2y = -x^2, \quad 2x = -y^2$,
   (b) $y = \sin x, \quad y = \cos 2x$ i zawierającego w swym wnętrzu punkt $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

5. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru opisanego nierównościami:
   (a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sin x + \cos x$,
   (b) $0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \sin x \leqslant y \leqslant 2\sin x$.

6. Oblicz długość łuku krzywej:
   (a) $y = x\sqrt{x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$,
   (b) $y = \mathrm{ch} x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

7. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe I rodzaju:
   (a) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}\ \mathrm{dx}$,
   (b) $\int_{-\infty}^{0} e^x \cdot \cos x\ \mathrm{dx}$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{dx}$.

8. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe II rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{dx}$,

(b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{dx}$,

(c) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{dx}$.