

INFORMATYKA - SEMESTR 1

ANALIZA. ZESTAW 8-9.

ANMA

Z_{8-9}

1. Niech $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a > 0$, będzie funkcją ciągłą w $[-a; a]$. Wykaż, że:

(a) $\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] \, dx,$

(b) jeśli f jest funkcją parzystą, to $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx,$

(c) jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$

2. Nie obliczając całki zbadaj monotoniczność funkcji $F(x)$, jeśli:

(a) $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2},$

(b) $F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$

3. Oblicz granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt},$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1) dt}{x^2},$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{e^x}^{e^{3x}} \frac{dt}{\ln^3 t}}{e^{3x}}.$

4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

(a) $2y = -x^2, \quad 2x = -y^2,$

(b) $y = \sin x, \quad y = \cos 2x$ i zawierającego w swym wnętrzu punkt $(0; \frac{1}{2}),$

(c) $r = 3 \sin(2\phi), \phi \in [0, \pi/2],$

(d) $r^2 = 4 \cos(2\phi), \phi \in [-\pi/4, \pi/4]$.

5. Oblicz długość łuku krzywej:

(a) $y = x\sqrt{x}$ dla $0 \leq x \leq 1$,

(b) $y = \operatorname{ch} x$ dla $0 \leq x \leq 1$,

(c) $x(t) = a \cos(t), y(t) = a \sin(t), z(t) = b t$ dla $t \in [0, 2\pi]$, gdzie stałe $a, b > 0$.

6. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru opisanego nierównościami:

(a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \sin x + \cos x$,

(b) $0 \leq x \leq \pi, \quad \sin x \leq y \leq 2 \sin x$.

7. Oblicz pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX krzywej opisanej równaniem :

(a) $y = \sqrt{x}, x \in [0, 2]$,

(b) $x(t) = t^3, y(t) = t^2, t \in [0, 1]$.

8. Korzystając ze wzoru na pole powierzchni obrotowej wyprowadź wzór na pole kuli o promieniu R .

9. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe I rodzaju:

(a) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$,

(b) $\int_{-\infty}^0 e^x \cdot \cos x dx$,

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$.

10. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe II rodzaju:

(a) $\int_1^e \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$,

(b) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$,

(c) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$.