André Bloch

MARTA BALCERZAK, OLEKSANDRA OVCHARENKO, ADRIAN KRZYŻANOWSKI

KRÓTKI KURS HISTORII MATEMATYKI, 2024/25, MINI PW

Kim był André Bloch?

- Matematyk francuski pochodzenia żydowskiego;
- Pracował w dziedzinie analizy zespolonej;
- Spędził większość życia w szpitalu psychiatrycznym;
- Jest najbardziej znany z twierdzenia Blocha.

Życiorys

Dzieciństwo i młodość

- Urodził się 20 listopada 1893 r. w Besançon.
- Ojciec był zegarmistrzem.
- Był najstarszym z trzech braci.
- André i jego brat Georges ukończyli tę samą klasę liceum. Ze wspomnień ich nauczyciela Georgesa Valirona:

"André już wtedy wykazywał zainteresowanie abstrakcyjnymi właściwościami, do których później wniósł tak istotny wkład. Jednak rzadko się odzywał i nie przejmował się przygotowaniami do egzaminów [...] Georges był na szczycie klasy i wyraźnie najlepszy na egzaminach pisemnych. André był ostatni w mojej jedenastoosobowej klasie."

Studia

- Dostał się na École Polytechnique zdając egzamin ustny prowadzony przez Ernesta Vessiota.
- Rozpoczął studia w 1913 r. razem z bratem Georgesem.

I wojna światowa

- Po wybuchu I wojny światowej obaj bracia zostali powołani do wojska.
- André pełnił służbę jako podporucznik artylerii.
- Obaj bracia zostali ranni podczas służby: André spadł z góry punktu obserwacyjnego podczas niemieckiego bombardowania, natomiast Georges został ranny w głowę i i stracił wzrok w jednym oku.
- Georges został zwolniony ze służby i powrócił do studiów w 1917 r.
- André nie został zwolniony ze służby, jednak dostał urlop zdrowotny.

Zabójstwo

- 17 listopada 1917 r. podczas rodzinnego posiłku André zabił nożem swojego brata Georgesa oraz swoich wujka i ciocię.
- Po morderstwu krzycząc wybiegł na ulicę i został aresztowany bez stawiania oporu.

Szpital psychiatryzcny

- Został umieszczony w szpitalu psychiatrycznym Saint-Maurice (tzw. Maison de Charenton).
- Był wzorowym pacjentem.
- Ze wspomnień psychiatry Henri Baruka:

„Codziennie przez czterdzieści lat ten człowiek siedział przy biurku w małym korytarzu prowadzącym do jego pokoju nie ruszając się z miejsca, poza posiłkami, aż do wieczora. Swoje dni spędzał pisząc algebraiczne lub matematyczne symbole na skrawkach papieru lub zanurzał się w lekturze i dopiskach do książek matematycznych [...]".

Szpital psychiatryczny

- Ze wspomnień psychiatry Henri Baruka:

„[...] O szóstej trzydzieści zamykał swoje zeszyty i książki, jadł kolację, a potem natychmiast wracał do swojego pokoju, rzucał się na łóżko i spał aż do następnego poranka. Podczas gdy inni pacjenci nieustannie domagali się odzyskania wolności, on był całkowicie zadowolony badając swoje równania i na bieżąco prowadząc swoją korespondencję."

- Pracował w wielu dziedzinach matematyki; zajmował się teorią funkcji, geometrią, teorią liczb, równaniami algebraicznymi i kinematyką.
- Prowadził korespondencję z Jacquesem Hadamardem, Georgem Pólyą oraz z Henrim Cartanem.

Dlaczego popełnił morderstwo?

- Bloch wyjaśnial morderstwo w taki sposób:

"To kwestia logiki matematycznej. W mojej rodzinie byli ludzie chorzy psychicznie, a dokładniej po stronie matki. To rzecz naturalna, że cała gałąź musiała zostać zniszczona. Rozpocząłem swoją pracę w czasie słynnego posiłku, ale nigdy nie miałem okazji jej dokończyć."

- Według Henriego Baruka, Bloch cierpiał na *"chorobliwy racjonalizm"*.
- Zabójstwo mogło zostać spowodowane raną wojenną Blocha, ponieważ uszkodzona została jego kora przedczołowa.
- …Albo w rodzinie Blocha rzeczywiście byli ludzie chorzy psychicznie.

Ostatnie lata

- Używał pseudonimów publikując swoje artykuły w czasie II wojny światowej; podpisywał się jako René Binaud oraz Marcel Segond.
- Po rozwoju białaczki w sierpniu 1948 r. został przyjęty na operację do szpitala Saint-Anne.
- Zmarł 11 listopada 1948 r. w Paryżu.
- Tuż przed śmiercią Académie des Sciences przyznała mu Nagrodę Becquerela.

Osiągnięcia matematyczne

Twierdzenie Blocha

Niech f będzie funkcją analityczną w obszarze zawierającym domknięty dysk $D = \{z : |z| < 1\}$ i taka, że $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Wówczas istnieje dysk $S \subset D$, w którym f jest 1-1 i $f(S)$ zawiera dysk o promieniu $\frac{1}{72}$.

Twierdzenie Blocha

Lematy

Lemat 1.1
Niech f będzie funkcją analityczną w obszarze $D = \{z : |z| < 1\}$ i niech $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ oraz $|f(z)| \leqslant M\ \forall z \in D$. Wówczas $M \geqslant 1$ i $f(D) \supset B(0, \frac{1}{6M})$.

Lemat 1.2
Niech g będzie analityczna w $B(0, R)$, $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \mu > 0$ i $|g(z)| \leqslant M$ $\forall z$. Wówczas $g(B(0, R)) \supset B(0, \frac{R^2\mu^2}{6M})$.

Lematy

Lemat 1.3

Niech f będzie analityczna w dysku $B(a, r)$ tak, że $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$ $\forall z \in B(a, r)$, $z \neq a$. Wówczas f jest 1-1.

Lemat Schwarza zmodyfikowany

Niech g będzie funkcją holomorficzną w $D = \{z : |z| \leqslant R\}$, $|g(z)| \leqslant A$ $\forall z \in D$ i $g(0) = 0$. Wówczas $|g(z)| \leqslant \frac{A|z|}{R}$.

Dowód twierdzenie Blocha
Niech $K(r) = max\{|f'(z)| : |z| = r\}$ i niech $h(r) = (1-r)K(r)$. Łatwo zauważyć, że $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $h(0) = 1$, $h(1) = 0$.
Niech $r_0 = sup\{r : h(r) = 1\}$, wtedy $h(r_0) = 1$, $r_0 < 1$ i $h(r) < 1$, jeśli tylko $r > r_0$.
Wybierzmy a tak, aby $|a| = r_0$ i $|f'(a)| = K(r_0)$. Wtedy:

$$|f'(a)| = \tfrac{1}{1-r_0}. \star$$

Teraz jeśli $|z-a| < \frac{1}{2}(1-r_0) := \rho_0$, $|z| < \frac{1}{2}(1+r_0)$; to ponieważ $r_0 < \frac{1}{2}(1+r_0)$, z definicji r_0 wynika, że:

$$\begin{gathered}|f'(z)| \leqslant K(\tfrac{1}{2}(1+r_0)) = \\ = h(\tfrac{1}{2}(1+r_0))[1-\tfrac{1}{2}(1+r_0)]^{-1} < \\ < [1-\tfrac{1}{2}(1+r_0)]^{-1} = \tfrac{1}{\rho_0} \star\star\end{gathered}$$

dla $|z-a| < \rho_0$. Z $\star$ i $\star\star$ wynika:

$$\begin{gathered}|f'(z) - f'(a)| \leqslant |f'(z)| + |f'(a)| < \\ < \tfrac{1}{\rho_0} + \tfrac{1}{1-r_0} = \tfrac{3}{2\rho_0}\end{gathered}$$

Dowód

Dowód - ciąg dalszy

Z lematu Schwarza otrzymujemy, że:

$$|f'(z) - f'(a)| < \tfrac{3|z-a|}{2\rho_0^2}$$

dla $z \in B(a, \rho_0)$. Stąd jeśli $z \in S := B(a, \frac{1}{3}\rho_0)$, to:

$$|f'(z) - f'(a)| < \tfrac{1}{2\rho_0} = |f'(a)|.$$

Z lematu 1.3 wynika, że f jest 1-1 w S.

Dowód - ciąg dalszy

Teraz wystarczy pokazać, że $f(S)$ zawiera dysk o promieniu $\frac{1}{72}$. Zdefiniujmy $g : B(0, \frac{1}{3}\rho_0) \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z+a) - f(a)$. Wtedy $g(0) = 0$, $|g'(0)| = |f'(a)| = \frac{1}{2\rho_0}$. Jeśli $z \in B(0, \frac{1}{3}\rho_0)$, to odcinek $\gamma = [a, z+a]$ leży w $S \subset B(a, \rho_0)$. Więc z $\star\star$:

$$|g(z)| = |\int_\gamma f'(w)\,dw| \leqslant$$
$$\leqslant |z|\frac{1}{\rho_0} < \frac{1}{3}.$$

Z lematu 1.2 wynika, że:

$$g(B(0, \tfrac{1}{3}\rho_0)) \supset B(0, \sigma),$$

gdzie:

$$\sigma = \frac{(\frac{1}{3}\rho_0)^2(\frac{1}{2\rho_0})^2}{6(\frac{1}{3})} = \frac{1}{72}.$$

Z definicji g otrzymujemy, że:

$$f(S) \supset B(f(a), \tfrac{1}{72}).$$

Definicja
Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji analitycznych w obszarze zawierającym domknięty dysk $D = \{z : |z| < 1\}$ i takimi, że $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ niech $\beta(f)$ będzie supremum wszystkich r takich, że istnieje dysk $S \subset D$, w którym f jest 1-1 i taki, że $f(S)$ zawiera dysk o promieniu r. (Więc z tw. Blocha $\beta(f) \geqslant \frac{1}{72}$). Stała Blocha jest liczbą zdefiniowaną następująco:

$$B = inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Z twierdzenia Blocha $B \geqslant \frac{1}{72}$. Dokładna jej wartość nie jest znana, jednak szacuje się, że:

$$0.4332 \approx \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times 10^{-14} \leqslant B \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \approx 0.47186$$

Stała Blocha

Definicja
Przestrzeń funkcji holomorficznych zdefiniowanych na otwartym dysku jednostkowym w płaszczyźnie zespolonej takich, że $(1-|z|^2)|f'(z)|$ jest ograniczona, nazywamy przestrzenią Blocha (ozn. $\mathcal{B}$).

Jest to przestrzeń Banacha z normą:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|$$

Jest ona nazywana normą Blocha, a elementy tej przestrzeni funkcjami Blocha.

Przestrzeń Blocha

- ❑ Analiza geometrycznych cech funkcji holomorficznych
- ❑ Funkcje Blocha jako rozwiązania równań różniczkowych, spełniających określone własności geometryczne
- ❑Badanie obrazów funkcji Blocha
- ❑Modele fizyczne, układy dynamiczne

Zastosowania przestrzeni Blocha

- **Reguła Blocha** (Bloch's principle): Każdy wynik, w którym występuje rzeczywista nieskończoność, można zawsze uważać za prawie bezpośrednią konsekwencję wyniku w kategoriach skończonych.

- Podobieństwa między różnymi dziedzinami matematyki sugerują istnienie głębszej, wspólnej struktury.

Rozważania filozoficzne

- Tw. Blocha jako "lokalna" wersja tw. Valirona

Twierdzenie Valirona
Jeśli f jest niestałą funkcją całkowitą, to istnieje dysk D o dowolnie dużym promieniu i funkcja analityczna ϕ w D taka, że $f(\phi(z)) = z$ dla $z \in D$.

- Uogólnienie tw. Picarda, udowodnione po śmierci Blocha, zapoczątkowanie badania krzywych holomorficznych.

Przykłady zastosowania reguły Blocha

Bloch (wspólnie z Polya) zajął się analizą pierwiastków wielomianów o współczynnikach losowych. Interesował się przede wszystkim:

- ❑ Rozkładem pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej.
- ❑ Wpływem właściwości współczynników na rozmieszczenie pierwiastków.

Nie formułował szczegółowych wyników, jednak jego roważania dały początek nowej dziedzinie matematyki.

Analiza pierwiastków wielomianów

- **Koncentracja pierwiastków przy dużym stopniu:**
Pierwiastki losowych wielomianów z niezależnymi współczynnikami często zbliżają się do pewnej struktury geometrycznej, jak okrąg jednostkowy lub inne krzywe algebraiczne.
- **Lokalne zachowanie pierwiastków:**
Rozkład pierwiastków w małych skalach jest związany z naturą rozkładu współczynników.
- **Rzeczywiste pierwiastki:**
Dla wielomianów o współczynnikach z rozkładu normalnego Bloch rozważał asymptotyczną liczbę rzeczywistych pierwiastków, co później zostało dokładnie opracowane przez innych badaczy, takich jak Kac i Edelman.

Wyniki zapoczątkowane przez Blocha

Źródła

- John J. O'Connor, Edmund F. Robertson. *Andre Bloch*. *MacTutor History of Mathematics Archive.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bloch/
- John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*.
- J.M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke. *On Bloch functions and normal functions*.