Paul Erdős i *“Dowody z Księgi”*

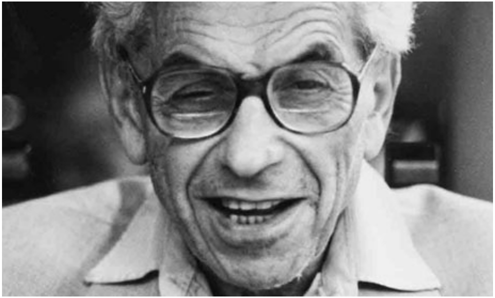
Antoni Kijowski, Michał Król, Krzysztof Kwiatkowski

Faculty of Mathematics and Information Science
Warsaw University of Technology

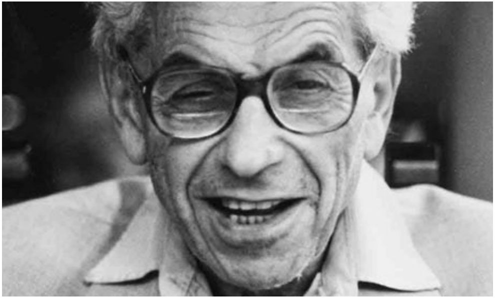
Warsaw, 9 January 2013

Dowody z Księgi to książka z dowodami matematycznymi napisana przez Martina Aignera i Guntera M. Zieglera. Jest dedykowana matematykowi Paulowi Erdősowi, który często nawiązywał do *Księgi*, w której według niego Bóg gromadził najdoskonalsze dowody twierdzeń matematycznych.

Paul Erdős

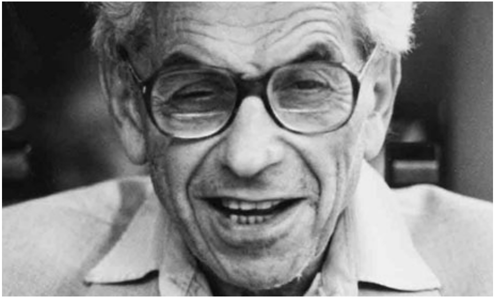


Paul Erdős



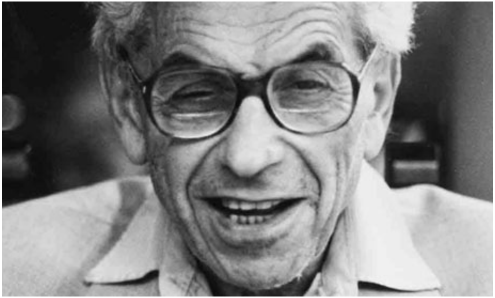
-Urodzony 26 Marca 1913 w Budapeszcie, zmarły 20 września 1996 w Warszawie.

Paul Erdős



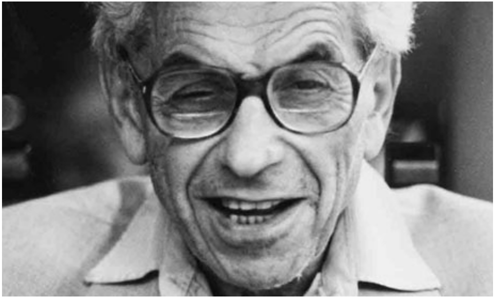
-Urodzony 26 Marca 1913 w Budapeszcie, zmarły 20 września 1996 w Warszawie.
-Jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku.

Paul Erdős



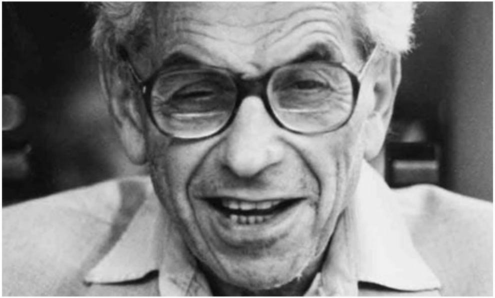
-Urodzony 26 Marca 1913 w Budapeszcie, zmarły 20 września 1996 w Warszawie.
-Jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku.
-Zrobił doktorat w 1934 w Budapeszcie.

Paul Erdős



-Urodzony 26 Marca 1913 w Budapeszcie, zmarły 20 września 1996 w Warszawie.
-Jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku.
-Zrobił doktorat w 1934 w Budapeszcie.
-Wykładał na wielu uniwersytetach, miedzy innymi w Menchesterze, Princeton czy Notre Dame.

Paul Erdős



-Urodzony 26 Marca 1913 w Budapeszcie, zmarły 20 września 1996 w Warszawie.
-Jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku.
-Zrobił doktorat w 1934 w Budapeszcie.
-Wykładał na wielu uniwersytetach, miedzy innymi w Menchesterze, Princeton czy Notre Dame.
-Członek U.S. National Academy of Science oraz UK Royal Society

Paul Erdős

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.
Głównie zajmował się:

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.
Głównie zajmował się:
-teorią liczb

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.
Głównie zajmował się:
-teorią liczb
-teorią grafów

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.
Głównie zajmował się:
-teorią liczb
-teorią grafów
-kombinatoryką

Paul Erdős

Autor ponad 1500 artykułów z koncepcji matematyki.
Głównie zajmował się:
-teorią liczb
-teorią grafów
-kombinatoryką

W książce można znaleźć 32 dowody twierdzeń z:

W książce można znaleźć 32 dowody twierdzeń z:

Teorii liczb, Geometrii, Analizy, Kombinatoryki oraz Teorii Grafów.

“Dowody z Księgi”

W książce można znaleźć 32 dowody twierdzeń z:

Teorii liczb, Geometrii, Analizy, Kombinatoryki oraz Teorii Grafów.

Nie są to wszystkie dowody z Księgi, ale jedynie kilka przykładów wybranych przez autorów, którzy pragnęli, aby była ona dostępna dla każdego, nie tylko dla matematyków. Do zrozumienia tych dowodów wystarczy odrobina algebry liniowej, analizy matematycznej i teorii liczb oraz elementarne pojęcia z matematyki dyskretnej. Erdős sam dołożył wiele sugestii do książki, ale zmarł przed jej publikacją.

Teraz przedstawimy bardzo ciekawy dowód twierdzenia z analizy matematycznej, zaczerpnięty oczywiście z *Księgi*

Teraz przedstawimy bardzo ciekawy dowód twierdzenia z analizy matematycznej, zaczerpnięty oczywiście z *Księgi*

Twierdzenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dowód

Dowód polega na dwukrotnym obliczeniu (różnymi sposobami) całki podwójnej

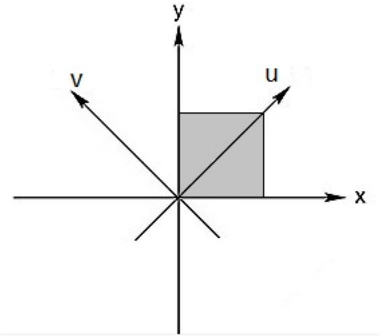
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx\, dy$$

Rozwińmy $\frac{1}{1-xy}$ w szereg geometryczny.

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n dx\, dy = \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

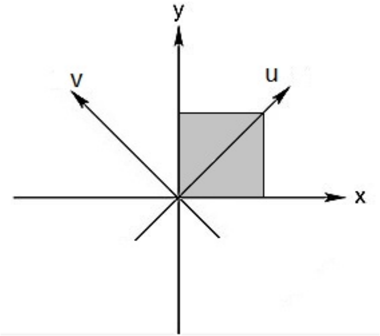
Drugi sposób obliczenia I polega na zamianie zmiennych:



obrót o 45^o prowadzi do zmiennych

$$u = \frac{y+x}{\sqrt{2}}, v = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

Drugi sposób obliczenia I polega na zamianie zmiennych:



obrót o 45^o prowadzi do zmiennych

$$u = \frac{y+x}{\sqrt{2}}\,,\ v = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

lub inaczej

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}\,,\ y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

Podstawiając nowe zmienne, otrzymujemy

$$1 - xy = 1 - \frac{u^2 - v^2}{2}$$

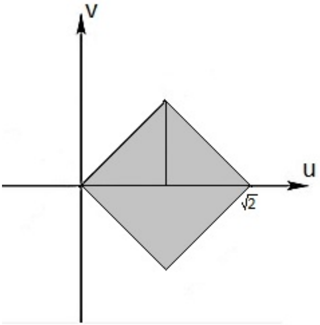
Podstawiając nowe zmienne, otrzymujemy

$$1 - xy = 1 - \frac{u^2 - v^2}{2}$$

a zatem

$$\frac{1}{1 - xy} = \frac{2}{2 - u^2 + v^2}$$

Nowy obszar całkowania, jak i funkcja, którą należy scałkować, są symetryczne względem osi u, musimy sięc jedynie obliczyć całkę po górnej połowie obszaru, którą dzielimy na dwie części:



$$I = 4\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int_{0}^{u}\frac{2}{2-u^2+v^2}dv\right)du + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{2}-u}\frac{2}{2-u^2+v^2}dv\right)du$$

$$I = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{u} \frac{2}{2-u^2+v^2} dv \right) du + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{2}{2-u^2+v^2} dv \right) du$$

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

otrzymujemy

$$I = 4 \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du +$$

$$+4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du$$

Pierwszą całkę obliczymy korzystając z podstawienia:

Pierwszą całkę obliczymy korzystając z podstawienia:

$$u = \sqrt{2}\sin\theta$$

Przedział $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ odpowiada wartościom $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$

Pierwszą całkę obliczymy korzystając z podstawienia:

$$u = \sqrt{2}\sin\theta$$

Przedział $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ odpowiada wartościom $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$

$$du = \sqrt{2} cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{2 - u^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - sin^2\theta} = \sqrt{2} cos\theta$$

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du =$$

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{2} cos\theta} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right) \sqrt{2}\cos\theta d\theta =$$

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{2} cos\theta} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right) \sqrt{2}\cos\theta d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

W drugiej całce korzystamy z podstawienia $u = \sqrt{2}\cos 2\theta$. Granice całkowania $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ trzeba zmienić na $\frac{\pi}{6} \geq \theta \geq 0$
Otrzymujemy $du = -2\sqrt{2}\sin 2\theta d\theta$
$\sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - cos^2 2\theta} = \sqrt{2}\sin 2\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta$
$\sqrt{2} - u = \sqrt{2}(1 - \cos 2\theta) = 2\sqrt{2} sin^2\theta$

W drugiej całce korzystamy z podstawienia $u = \sqrt{2}\cos 2\theta$. Granice całkowania $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ trzeba zmienić na $\frac{\pi}{6} \geq \theta \geq 0$
Otrzymujemy $du = -2\sqrt{2}\sin 2\theta d\theta$
$\sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-cos^2 2\theta} = \sqrt{2}\sin 2\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta$
$\sqrt{2} - u = \sqrt{2}(1-\cos 2\theta) = 2\sqrt{2}sin^2\theta$

A zatem $4\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du =$

$$4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta} \arctan\left(\frac{2\sqrt{2}sin^2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)\sin 2\theta d\theta = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} 2\theta d\theta =$$

$$4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{6}$$

Dodając obie całki, otrzymujemy:

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dodając obie całki, otrzymujemy:

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

W ostateczności dostajemy:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Twierdzenie

Dla każdej konfiguracji n niewspółliniowych punktów płaszczyzny istnieje linia prosta, która przechodzi przez dokładnie dwa z tych punktów.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem n ($n \geq 3$) niewspółliniowych punktów płaszczyzny. Wtedy zbiór $\mathcal{L}$ wszystkich prostych, które przechodzą przez co najmniej dwa punkty zbioru $\mathcal{P}$, zawiera co najmniej n prostych.

Twierdzenie

Niech X będzie zbiorem n-elementowym, $n \geq 3$. Załóżmy, że $A_1, ...A_m$ są podzbiorami właściwymi X, takimi, że dla każdego $a, b \in X$ istnieje dokładnie jeden zbiór A_i zawierający je. Wówczas $m \geq n$.

To koniec!
Dziękujemy za uwagę ;)