Fraktale

Julia Gałat, Aleksandra Idczak, Maria Krawczyk, Oliwia Wojtkowiak

Matematyka i Analiza Danych, Krótki kurs historii matematyki, 2024/25,
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej

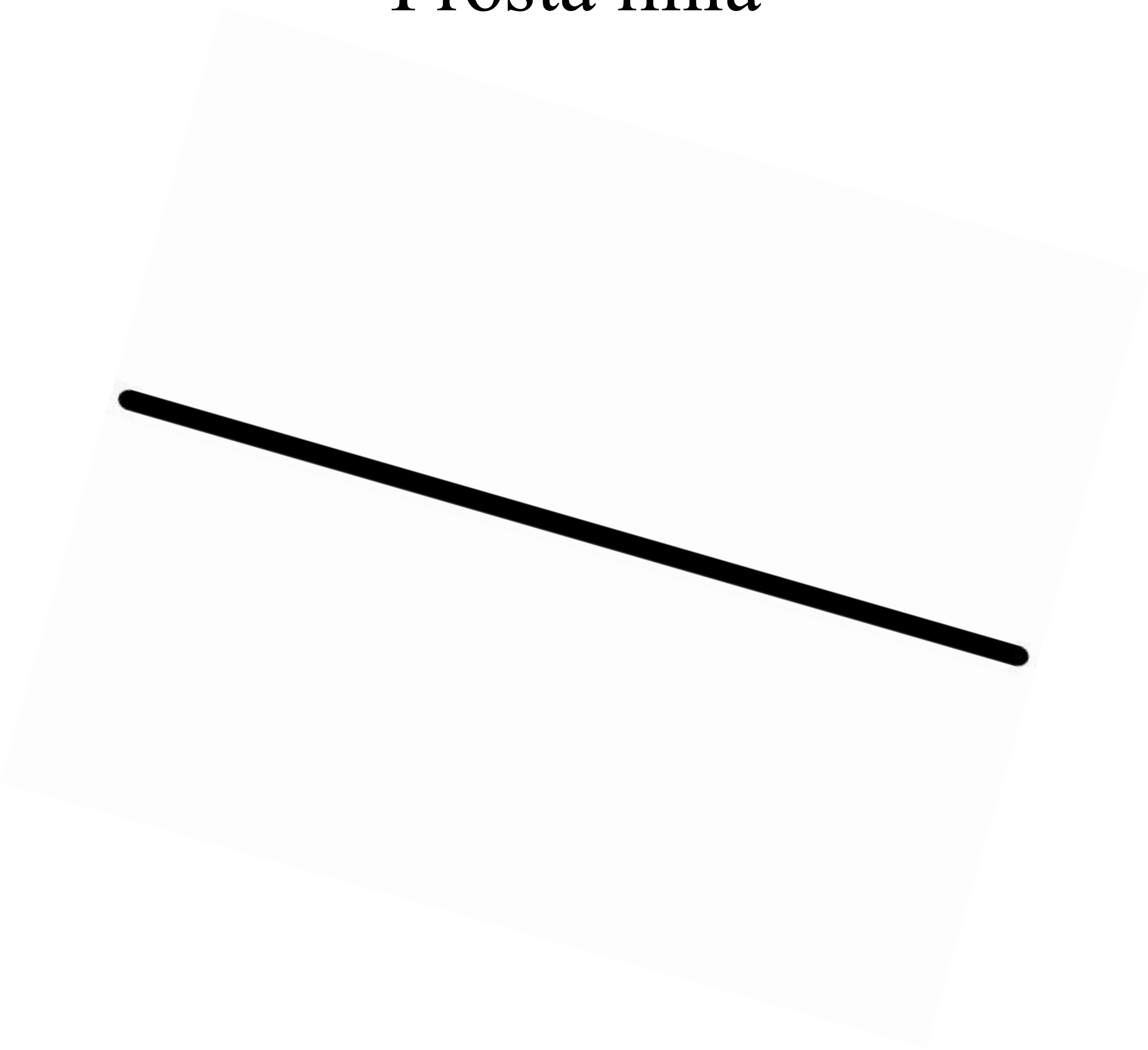
Czym są fraktale?
Znaczenie nazwy i definicja

- Nazwa pochodzi od łacińskiego słowa *fractus* – złamany, cząstkowy, ułamkowy
- Ta nazwa odnosi się do faktu, że fraktale często mają niecałkowity wymiar Hausdorffa
- Oznacza zwykle obiekt samopodobny lub „nieskończenie złożony” (ukazujący coraz bardziej złożone detale przy nieograniczonym powiększeniu).

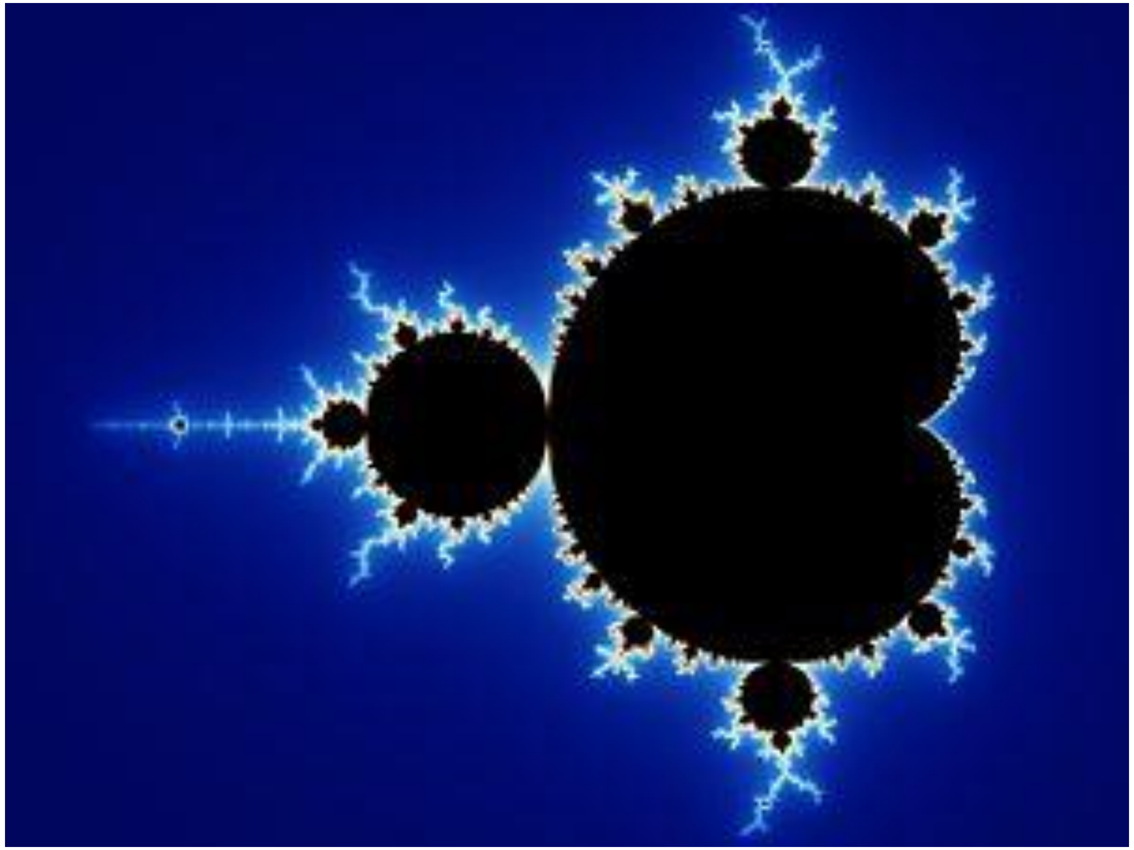
Według uczonych ciężko podać jednorodną definicję fraktali. Zatem fraktal określa się jako zbiór, który posiada wszystkie poniższe charakterystyki albo przynajmniej ich większość:

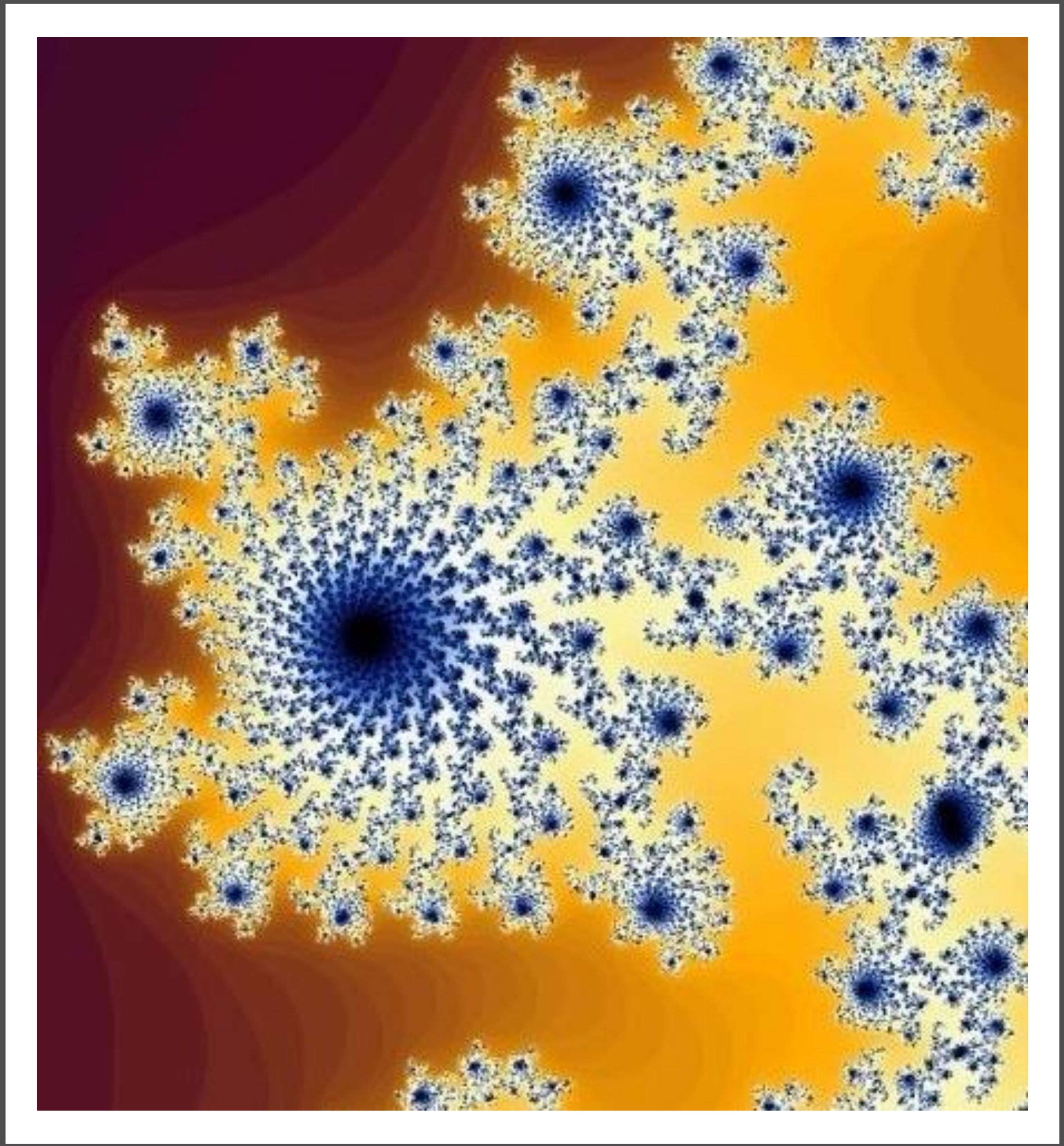
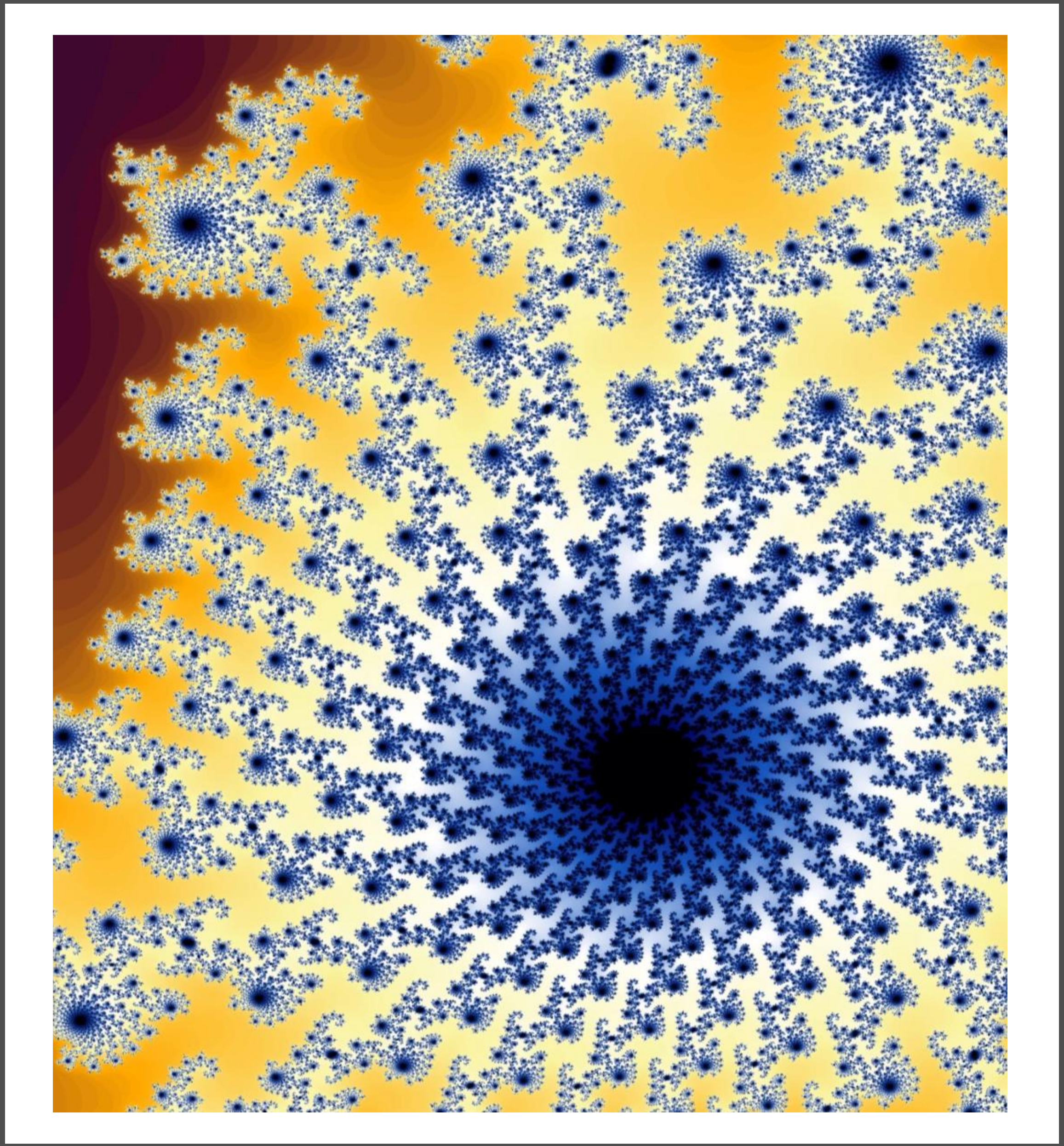
- jest samopodobny,
- ma *naturalny* („poszarpany”, „kłębiasty” itp.) wygląd,
- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- ciężko opisać tę strukturę w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jego wymiar Hausdorffa jest większy niż jego wymiar topologiczny,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną.

Prosta linia



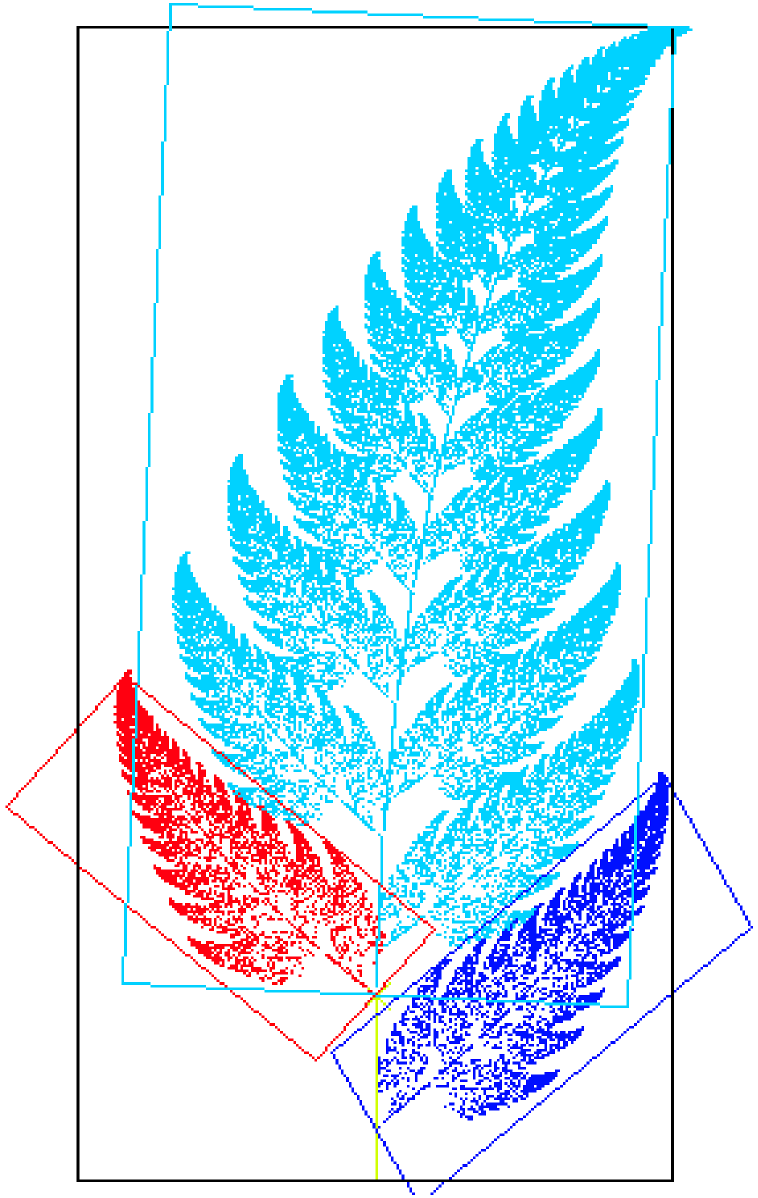
Zbiór Mandelbrota



Właściwości fraktali

- Fraktale są samopodobne,
- Mogą być samoafiniczne, czyli część zbioru może być obrazem całości przez pewne przekształcenie afiniczne,
- Niektóre fraktale są zbiorami o mierze Lebesgue'a równej zero,
- Określa się dla nich wymiar fraktalny (wymiar samopodobieństwa), zazwyczaj inny od topologicznego. Wymiar fraktalny pozwala określić, jak "gęsta" jest struktura w różnych skalach,
- Mogą być powiększane do dowolnie dużych rozmiarów, a z każdym powiększeniem pojawiają się nowe szczegóły, które są zgodne z ogólną strukturą obiektu.
- Mają złożoną geometrię



Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Przekszta%C5%82cenie_afiniczne

Miara fraktali, czyli wymiar fraktalny

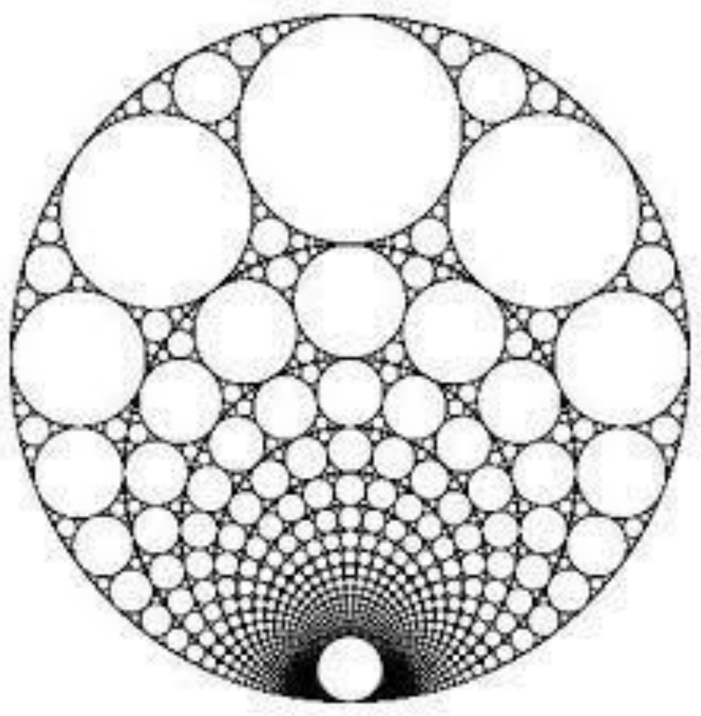
Wymiar fraktalny określa rzeczywistą miarę fraktala.

Jeśli przedmiot w całej wielkości zawiera N samopodobnych kopii siebie wielkości s, to jego wymiar Ds samopodobieństwa wyrażony jest przez równanie:

$$Ns^{Ds} = 1$$

Można je przekształcić do postaci

$$Ds = \frac{log(N)}{log(\frac{1}{s})}$$



Metody generowania fraktali

- **IFS - Iterated Function System:**

  Jest to algorytmiczny sposób generowania fraktali samopodobnych oparty na zastosowaniu układów iteracyjnych funkcji. IFS składa się ze zbiór funkcji służących do przekształcania płaszczyzny wielowymiarowej. Każda z funkcji jest postaci:

$$w_i(x, y) = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

  Gdzie:

  - $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ to współczynniki opisujące przekształcenie
  - i to indeks funkcji w układzie

- **Rekurencyjna zależność punktów przestrzeni zespolonej**

  Dla każdego punktu p określa się pewien ciąg $z_n(p)$. Od zbieżności tego ciągu zależy, czy punkt należy do zbioru (fraktala). Ciąg określa się wzorem rekurencyjnym:

$$z_0(p) = f(p)$$
$$z_{n+1}(p) = g(z_n)$$

  Od postaci funkcji f i g zależy rodzaj fraktala.

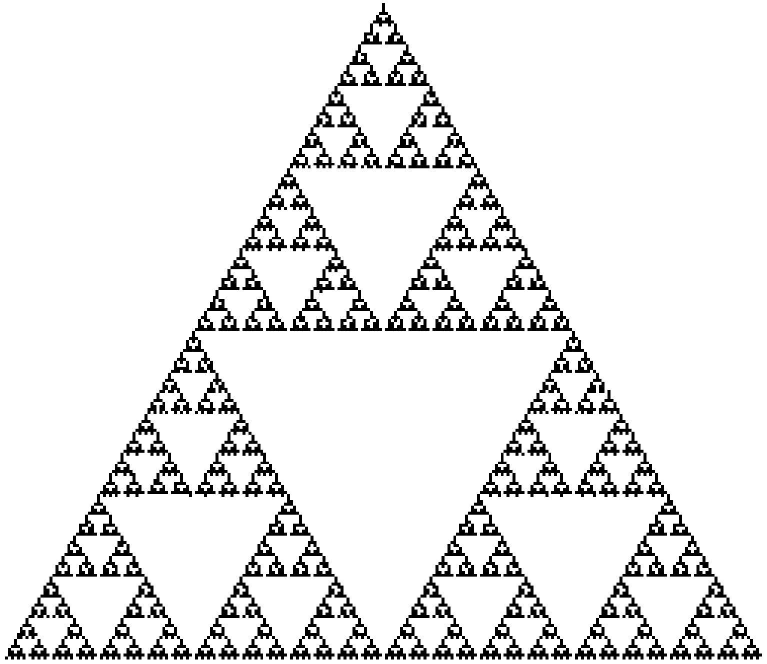
Przykłady fraktali generowanych metodą IFS:

Trójkąt Sierpińskiego

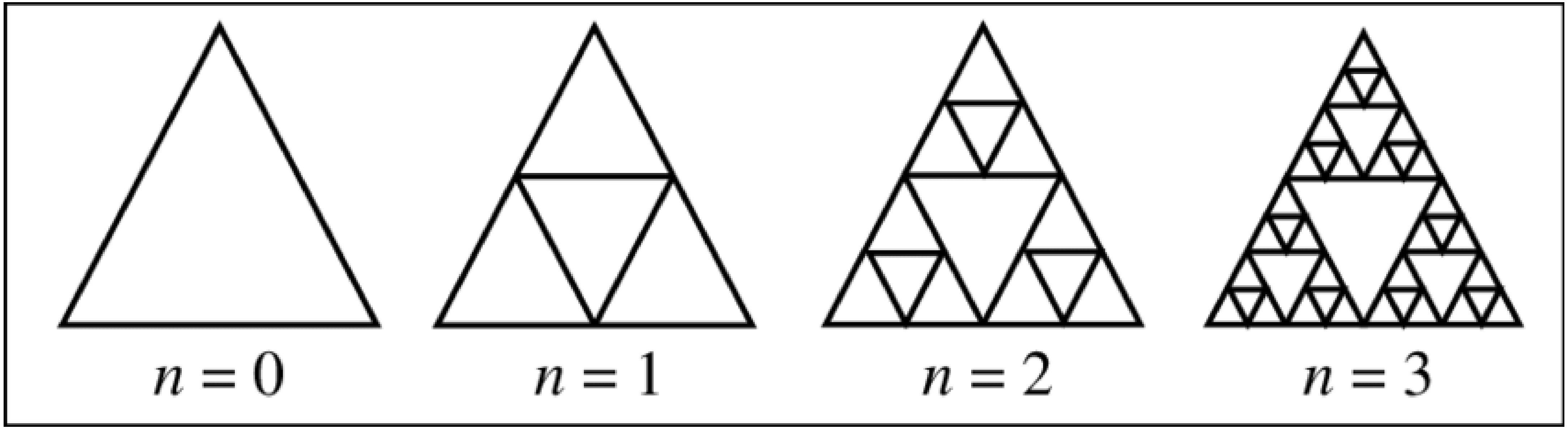
Proces tworzenia trójkąta Sierpińskiego można opisać następująco:

- Zacznij od trójkąta równobocznego.
- Podziel na mniejsze trójkąty: Znajdź środki boków i połącz je, dzieląc duży trójkąt na 4 mniejsze trójkąty.
- Usuń środkowy trójkąt.
- Powtórz proces: Dla każdego pozostałego trójkąta zastosuj tę samą operację podziału i usunięcia środkowego fragmentu.
- Kontynuuj iteracje w nieskończoność.

Efektem jest fraktalna figura złożona z nieskończonej liczby mniejszych trójkątów, samopodobna na każdym poziomie.



Źródło: https://pages.mini.pw.edu.pl/~kaczmarskik/MiNIwykladу/fraktale/Trojkat/trojkat.html



Źródło: https://www.researchgate.net/publication/264872595_Calculation_Methods_of_the_Length_Area_and_Volume_of_Iterated_Function_System_Fractals

Paproć Barnsleya

Proces powstawania Paproci Barnsleya wygląda następująco:

- Zdefiniuj funkcje przekształceń: Określ 4 macierze liniowe z różnymi współczynnikami skalowania, przesuwania i rotacji, z przypisanymi prawdopodobieństwami wyboru.
- Wybierz punkt początkowy: Zacznij od dowolnego punktu w przestrzeni, np. (x_0, y_0) .
- Iteruj przekształcenia:
  - Losowo wybierz jedną z funkcji według przypisanych prawdopodobieństw.
  - Zastosuj wybraną funkcję do bieżącego punktu, aby uzyskać nowy punkt.
- Powtarzaj: Iteruj proces wiele razy (setki tysięcy lub więcej), rysując każdy nowy punkt na ekranie.

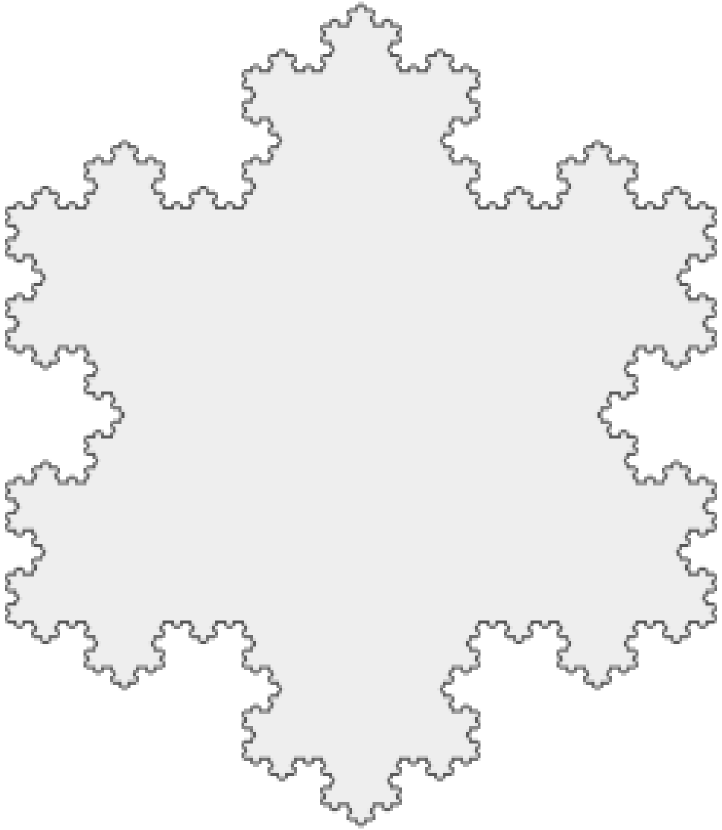
Źródło:https://webcms3.cse.unsw.edu.au/static/uploads/course/COMP9021/15s2/58bcb7ac7ca54778a113a5875aaaf40ddf7d829a6507e306a6516c17c7bc34c4/Barnsley_Fern.pdf

Śnieżynka Kocha

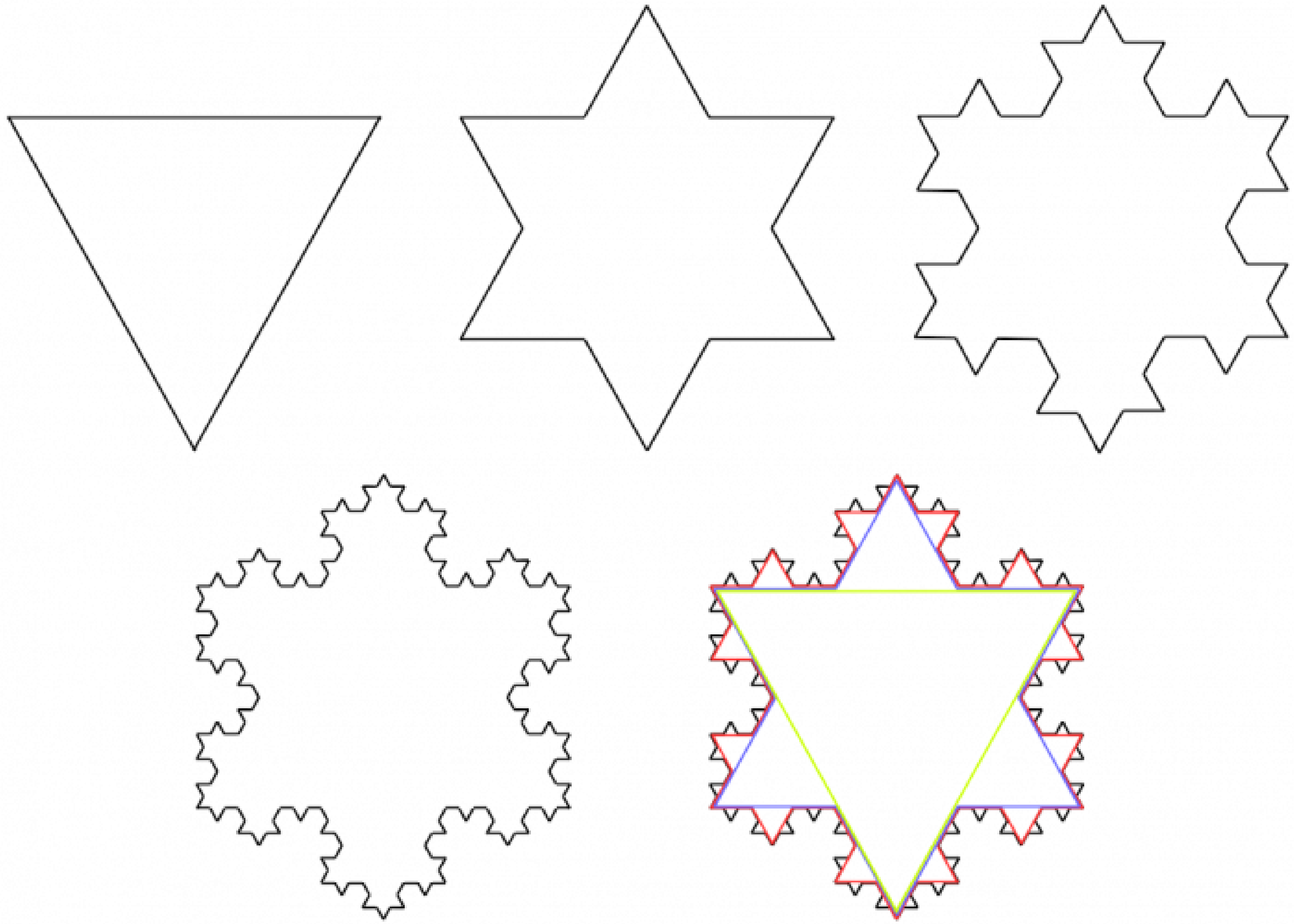
Śnieżynka Kocha powstaje poprzez iteracyjny proces na trójkącie równobocznym:

- Zacznij od trójkąta równobocznego.
- Podziel każdy bok na trzy równe części.
- Zastąp środkowy odcinek "zagiętym" fragmentem w kształcie trójkąta równobocznego skierowanego na zewnątrz.
- Powtórz proces dla wszystkich nowo powstałych boków.

Każda iteracja zwiększa liczbę boków i złożoność kształtu. W nieskończoności uzyskuje się fraktal – śnieżynkę Kocha, która ma nieskończony obwód,



Źródło:https://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa_Kocha#/media/Plik:Koch_Snowflake_7th_iteration.svg



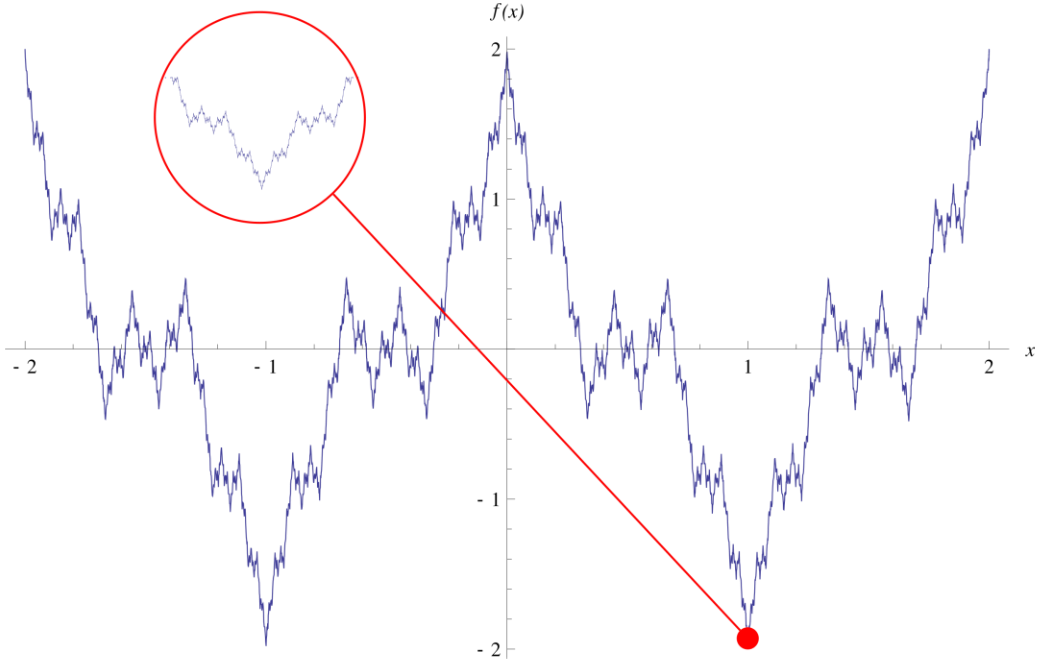
Źródło: https://nrich.maths.org/problems/koch-snowflake

Historia fraktali

- 1872 – Funkcja Weierstrassa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

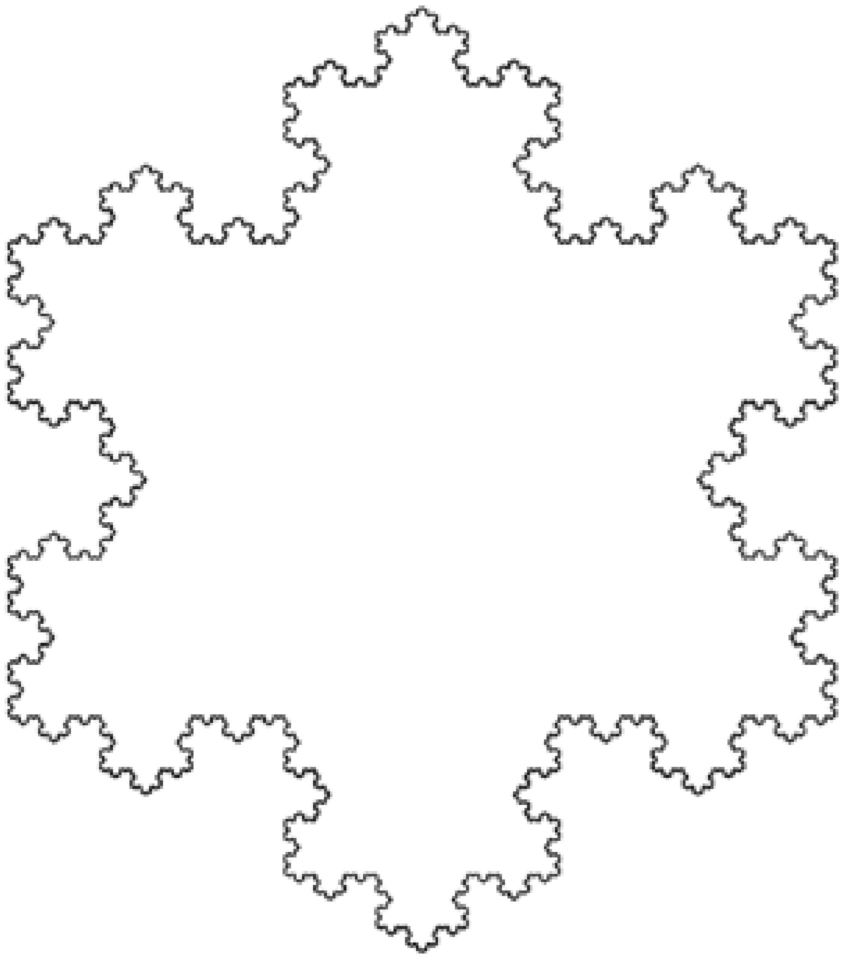
$$a \in (0,1),\ b - \text{nieparzysta},\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$



- 1883 - zbiór Cantora

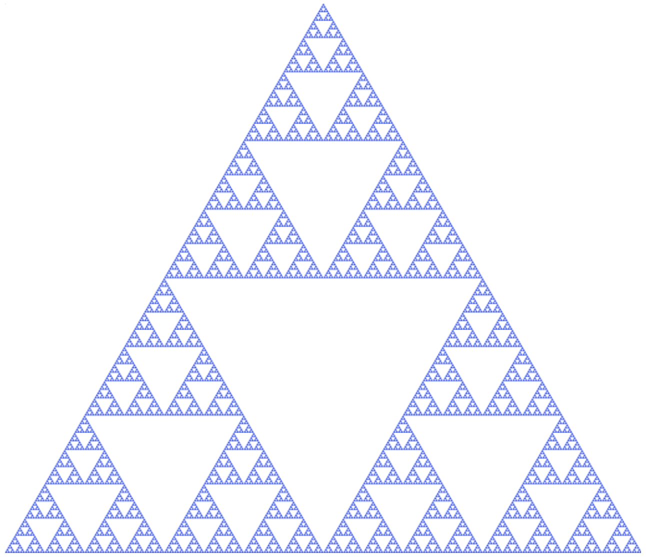
Źródła: https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_Weierstrassa, https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

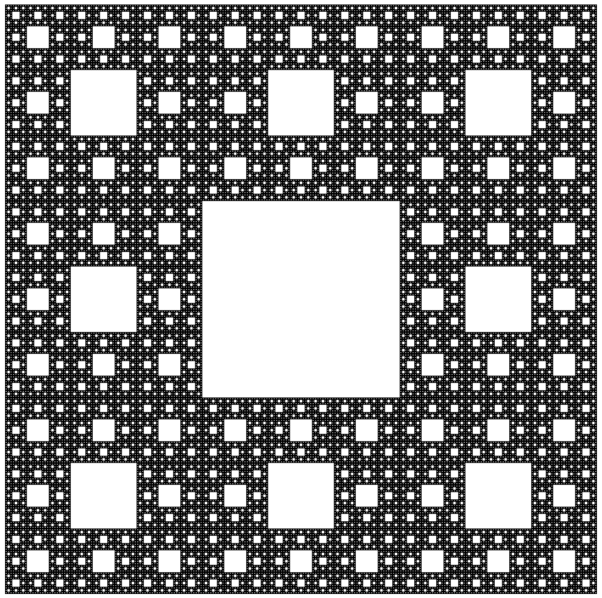
- 1904 - Helge von Koch publikuje *"On a continuous curve without tangents constructible from elementary geometry"*



Źródło: https://personal.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-03b/projects-03b/skinner/ex-dimension-koch_snowflake.htm

- 1915, 1916 - Trójkąt i Kwadrat Sierpińskiego
- 1918 - Pierre Fatou i Gaston Julia badają rekurencyjne zależności punktów w przestrzeni zespolonej.
- 1918 - Felix Hausdorff rozszerzył pojęcie wymiaru – wymiar Hausdorffa może być niecałkowity.





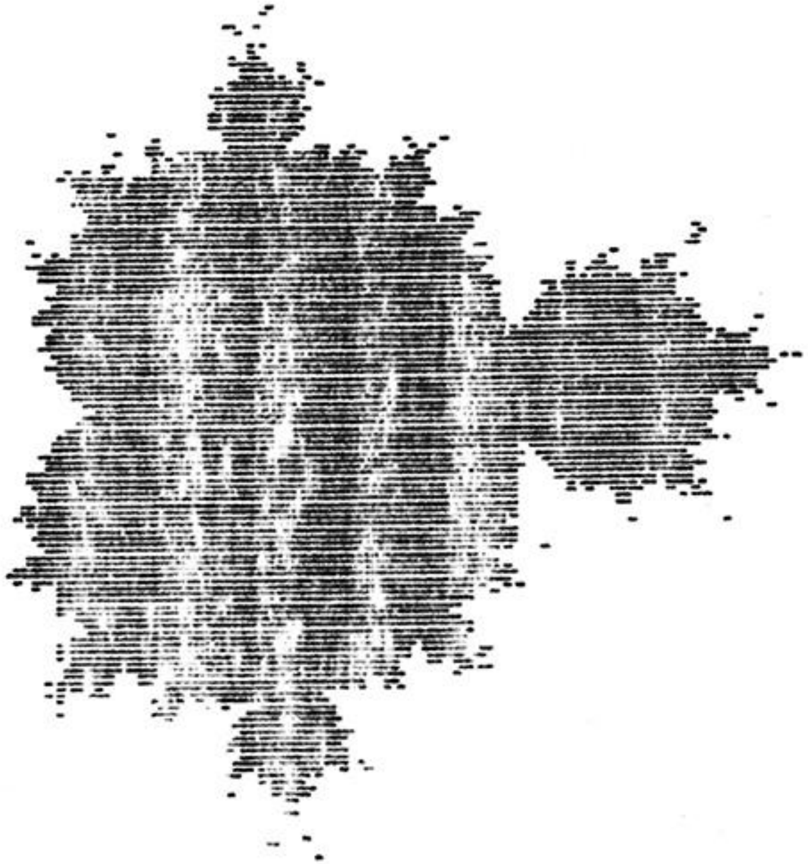
Źródła: https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_triangle, https://pl.wikipedia.org/wiki/Dywan_Sierpi%C5%84skiego

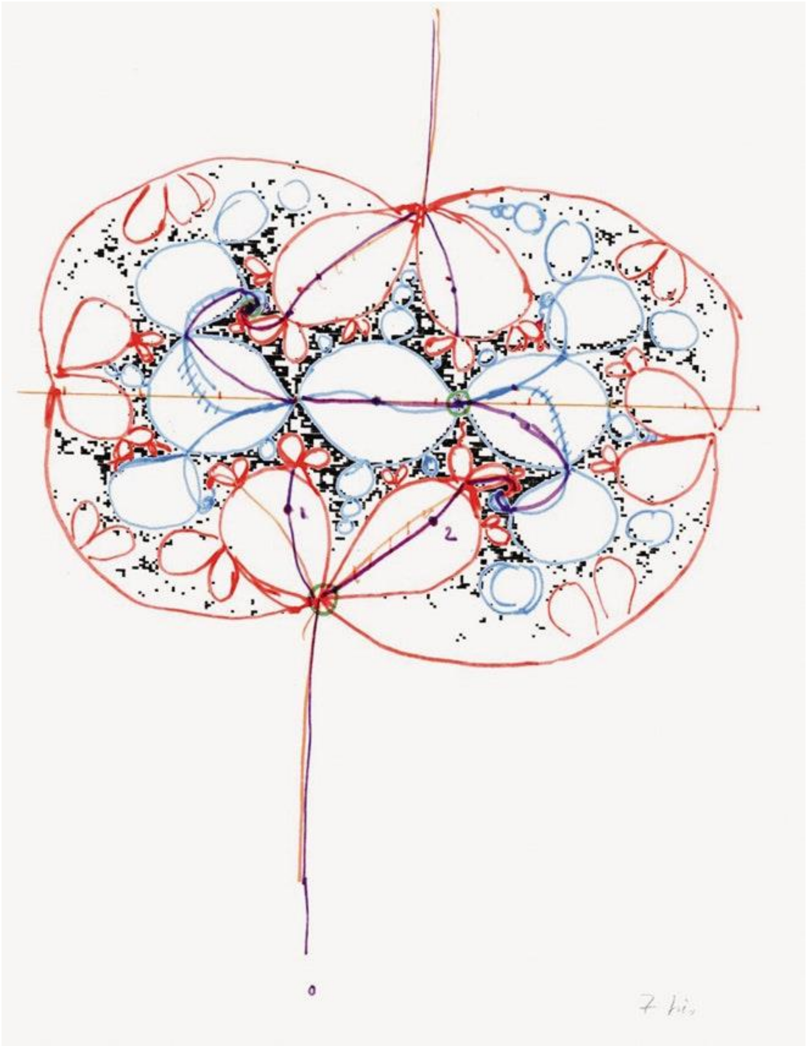
- **Benoît Mandelbrot** (1924-2010) – ojciec fraktali. Uporządkował dotychczasową wiedzę i zdefiniował czym jest fraktal (1975).
- Pierwszy narysował fraktale komputerowo.
- 1979 - Zbiór Mandelbrota

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

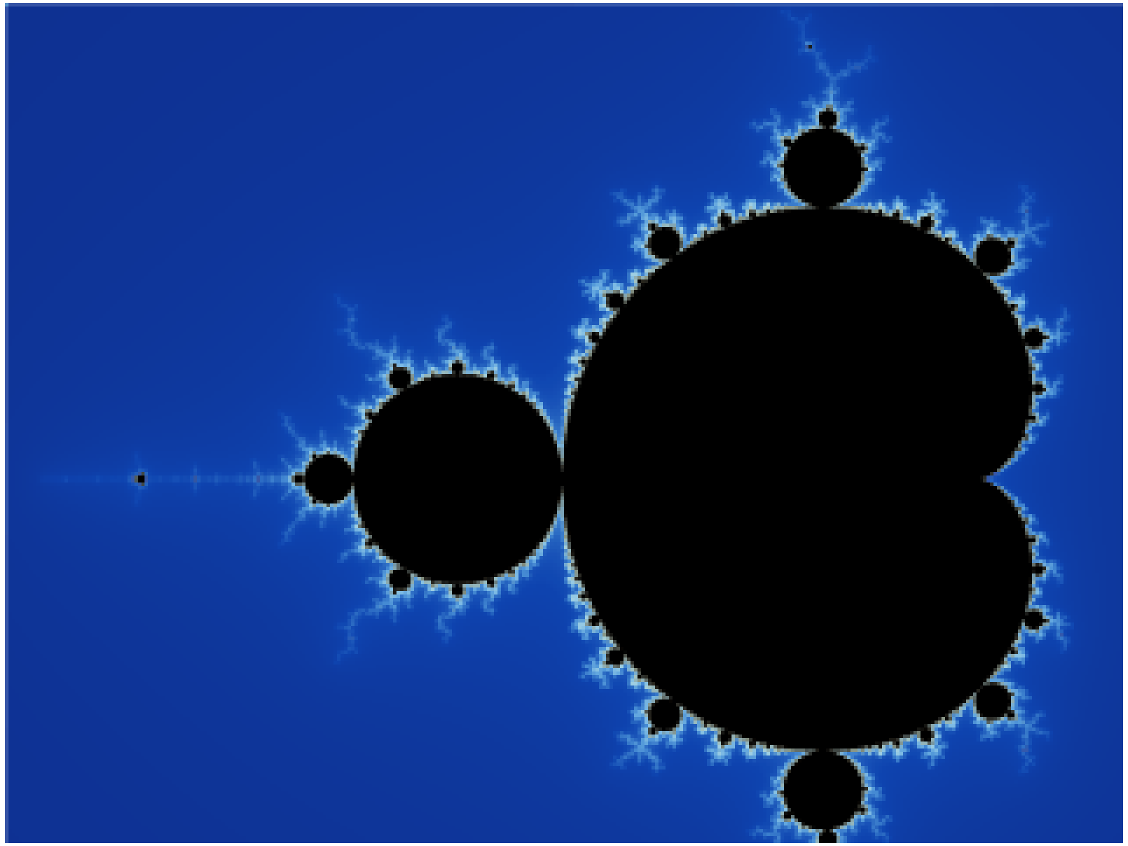
$$M = \{c \in \mathbb{C} : z_n \not\to \infty \text{ gdy } n \to \infty\}$$

Źródło: https://medium.com/swlh/the-wandering-scientist-turned-father-of-fractals-4dcdc867d4dd





Źródła: https://www.americanscientist.org/article/father-of-fractals, https://www.wired.com/2013/01/mandelbrot-images/

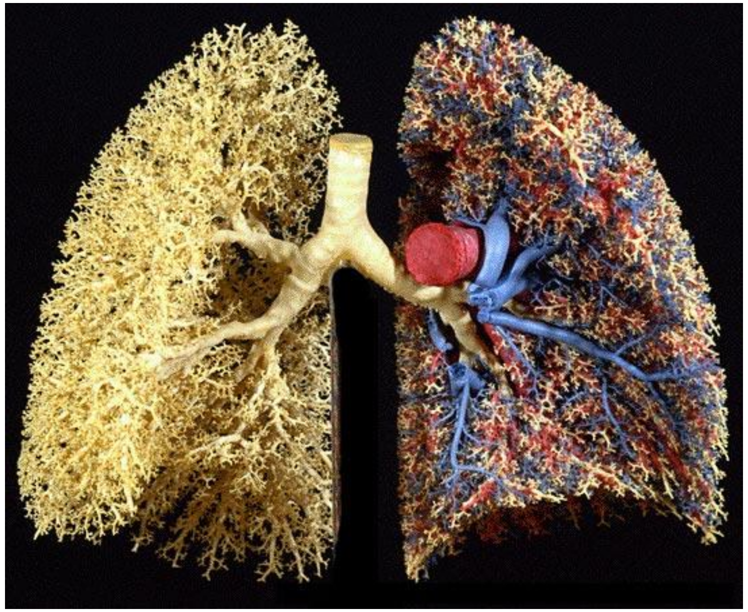


Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set#/media/File:Mandelbrot_sequence_new.gif

Zastosowania fraktali

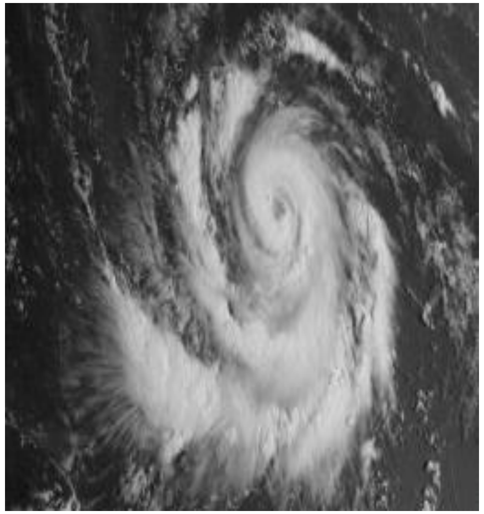
Medycyna

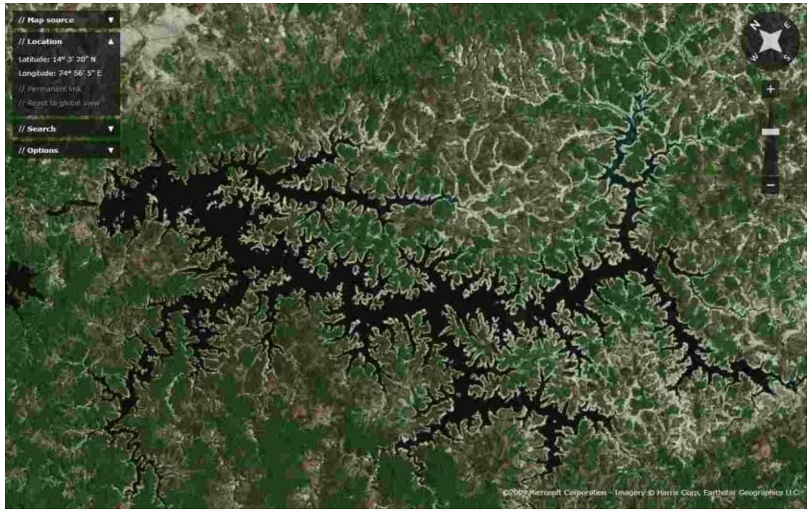
- Studiowanie złożonych struktur w tkankach np. wzorców naczyń krwionośnych, płuc czy rozgałęzień neuronów
- Obrazowanie medyczne (MRI i CT)
- Wykrywanie różnych chorób np. rozedmy płuc czy nowotworów



Nauki biologiczne

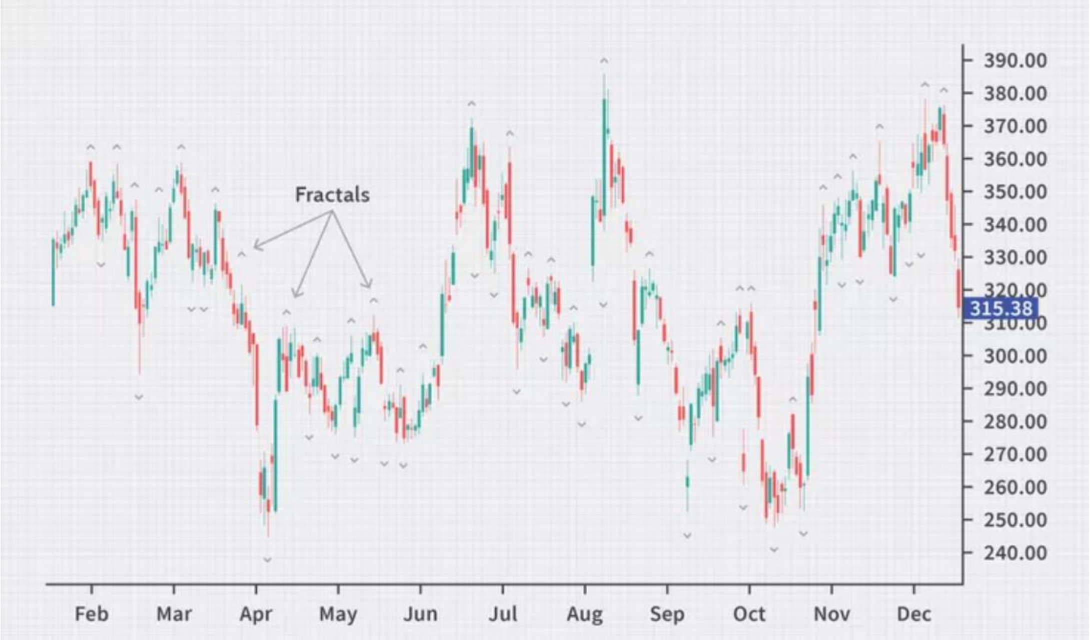
- Badanie wzorców w przyrodzie
- Meteorologia
- Modelowanie krajobrazów
- Ekologia (zmiany w ekosystemach)





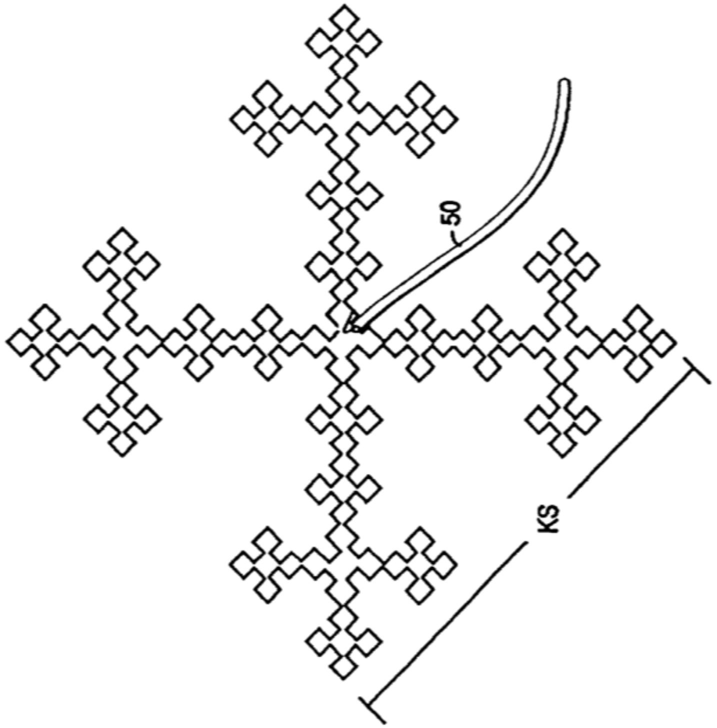
Finanse i ekonomia

- Analiza rynków finansowych (modelowanie)
- Prognozowanie trendów rynkowych
- Oceny wzorców ryzyka



Telekomunikacja

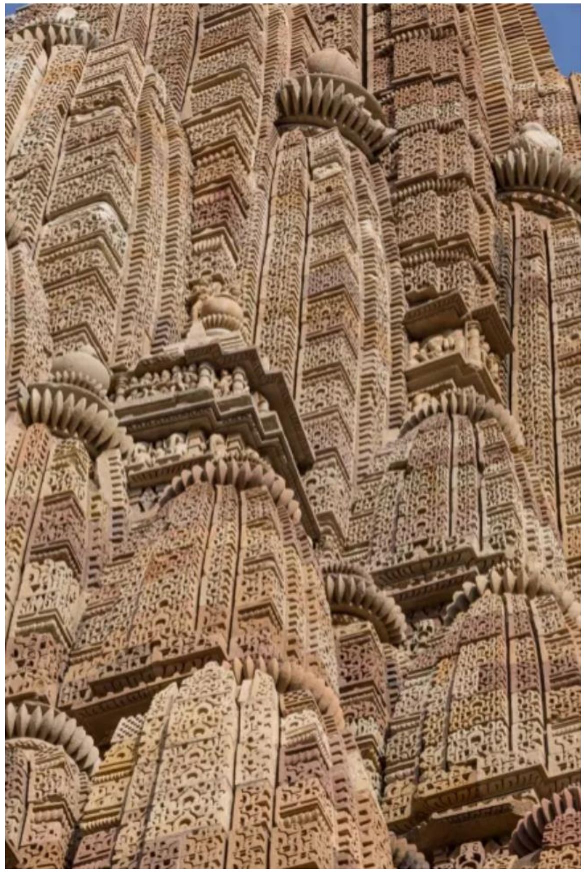
Anteny fraktalne



Sztuka i architektura

Sagrada Familia

Świątynia Kandariya Mahadev



Sztuka i architektura

Jackson Pollock

Źródła

- https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/fractals/
- https://aiminghigh.aimssec.ac.za/wp-content/uploads/2019/09/GML19-FRACTALS-Explanation-History.pdf
- K. Falconer *Fractals: A Very Short Introduction*, Oxford, 2013
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal
- https://naukawpolsce.pl/aktualnosci/news%2C77847%2Cfragment-jak-calosc-dlaczego-fizykow-fascynuja-fraktale.html
- https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-12-4.html
- https://www.sciencedaily.com/releases/2002/01/020131073853.htm
- https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0169534790902356
- https://www.treehugger.com/amazing-fractals-found-in-nature-4868776
- https://pages.mini.pw.edu.pl/~kaczmarskik/MiNIwyklady/minkowski/zastosowania.html
- https://blogs.uoregon.edu/richardtaylor/2017/01/04/the-facts-about-pollocks-fractals/
- https://bitrebels.com/technology/fractal-antenna-work/