Wojciech Domitrz : Geometria form różniczkowych, wykład 1

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$.

Def. *Iloczynem tensorowym* przestrzeni liniowych V i W nazywamy przestrzeń liniową Y o tej własności, że istnieje przekształcenie 2-liniowe $h : V \times W \to Y$ zależne tylko od V i W takie, że dla każdego przekształcenia 2-liniowego z $V \times W$ w przestrzeń liniową Z $f : V \times W \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $g : Y \to Z$ takie, że $f = g \circ h : V \times W \to Z$ tzn. następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Iloczyn tensorowy V i W oznaczamy $V \otimes W$.

$\mathcal{L}(V, W; Z)$ – przestrzeń 2-liniowych przekształceń $V \times W \to Z$

Konstrukcja $V^* \otimes W^*$, gdzie V^* i W^* przestrzenie dualne do V i W czyli $V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$, $W^* = \mathcal{L}(W; \mathbb{K})$

$v^* \in V^*$, $w \in W^*$ $\quad (v^* \otimes w^*)(v, w) = v^*(v)\, w^*(w) \quad \forall v \in V \ \forall w \in W$

Stw. $v^* \otimes w^*$ to przekształcenie 2-liniowe $V \times W \to \mathbb{K}$

Dowód: $(v^* \otimes w^*)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = v^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\, w^*(w) = (\alpha_1 v^*(v_1) + \alpha_2 v^*(v_2)) \cdot w^*(w) = \alpha_1 v^*(v_1) \cdot w^*(w) + \alpha_2 v^*(v_2) \cdot w^*(w) =$
$= \alpha_1 (v^* \otimes w^*)(v_1, w) + \alpha_2 (v^* \otimes w^*)(v_2, w)$ czyli $v^* \otimes w^*$ jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną.

Udowodnij liniowość ze względu na drugą zmienną ■

Wykaż następujące własności operacji $\otimes$

$(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) \otimes w^* = \alpha_1 (v_1^* \otimes w^*) + \alpha_2 (v_2^* \otimes w^*) \quad \forall v_1^*, v_2^* \in V^* \ \forall w^* \in W^* \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$v^* \otimes (\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*) = \alpha_1 (v^* \otimes w_1^*) + \alpha_2 (v^* \otimes w_2^*) \quad \forall v^* \in V^* \ \forall w_1^*, w_2^* \in W^*$

Niech $\mathcal{L}(V, W; \mathbb{K})$ oznacza przestrzeń przekształceń 2-liniowych $V \times W \to \mathbb{K}$

Zał, że $\dim_{\mathbb{K}} V^* = n$ i $\dim_{\mathbb{K}} W^* = m$. Niech $e_1^*, \dots, e_n^*$ baza V^* dualne do bazy $e_1, \dots, e_n$ przestrzeni V, i niech $f_1^*, \dots, f_m^*$ baza W^* dualne do bazy $f_1, \dots, f_m$ przestrzeni W czyli $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$; $i,j = 1, \dots, n$, $f_l^*(f_k) = \delta_{lk}$, $l,k = 1, \dots, m$.

$\varphi \in L(V, W; \mathbb{K})$ $\quad \varphi(v, w) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{l=1}^{m} \beta_l f_l\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \alpha_i \beta_l \varphi(e_i, f_l)$

$e_i^* \otimes f_l^*(v, w) = e_i^* \otimes f_l^*\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{m} \beta_k f_k\right) = \alpha_i \beta_l$

$\varphi(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \varphi(e_i, f_l)\, e_i^* \otimes f_l^*(v, w)$ dla każdego $v \in V$ i $w \in W$. Stąd otrzymujemy

Stw. $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \varphi(e_i, f_l)\, e_i^* \otimes f_l^* \quad (*)$

Niech $V^* \otimes W^* = \operatorname{span}\{ v^* \otimes w^* \mid v^* \in V^*, w^* \in W^* \}$

Wtedy $V^* \otimes W^* = \operatorname{span}\{ e_i^* \otimes f_l^* \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$. Stąd otrzymujemy

Stw. $V^* \otimes W^* = \mathcal{L}(V, W; \mathbb{K})$.

$(V^*)^* = V$ i $(W^*)^* = W$. Stąd otrzymujemy

Stw. $V \otimes W = \mathcal{L}(V^*, W^*; \mathbb{K})$

Stw. $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$

Dowód: $\quad (v^* \otimes w^*)(v \otimes w) = v^*(v) \cdot w^*(w) \qquad (e_i^* \otimes f_l^*)(e_j \otimes f_k) = e_i^*(e_j) f_l^*(f_k) = \delta_{ij} \delta_{lk} =$

$$= \begin{cases} 1 & (i,l) = (j,k) \\ 0 & (i,l) \neq (j,k) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Tw. Niech $h : V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$. Przekształcenie h jest 2-liniowe oraz $\forall\, f : V \times W \to Z$ 2-liniowego przekształcenia w przestrzeń liniową Z $\exists!\, g : V \otimes W \to Z$ przekształcenie liniowe takie, że $f = g \circ h$

Dowód : Zdefiniujmy $g : V \otimes W \to Z$ następująco $g(e_i \otimes f_l) = f(e_i, f_l)$ dla $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad w = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j \qquad g(v \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} v_i w_l\, g(e_i \otimes f_l) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} v_i w_l\, f(e_i, f_l) = f(v, w)$

Stąd $(g \circ h)(v, w) = f(v, w)$ $\forall\, v \in V,\ w \in W$ ■

Wniosek. Przestrzenie liniowe $\mathcal{L}(V, W; Z)$ i $\mathcal{L}(V \otimes W, Z)$ są izomorficzne.

Dowód : $\varphi : \mathcal{L}(V \otimes W, Z) \ni g \mapsto \varphi(g) = g \circ h \in \mathcal{L}(V, W; Z)$ ■

$f \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s; \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}(W_1, \dots, W_r; \mathbb{K})$ przekształcenia wieloliniowe

$f \otimes g\, (v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_r) = f(v_1, \dots, v_s) \cdot g(w_1, \dots, w_r)$ dla $v_i \in V_i$ $i = 1, \dots, s$ $w_j \in W_j$ $j = 1, \dots, r$

$f \otimes g \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s, W_1, \dots, W_r; \mathbb{K})$

$\otimes : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s, \mathbb{K}) \times \mathcal{L}(W_1, \dots, W_r; \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s, W_1, \dots, W_r, \mathbb{K})$ jest 2-liniowym przekształceniem

Tw. $\otimes$ jest łączne. $\forall\, \varphi \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s, \mathbb{K})$ $\forall\, \psi \in \mathcal{L}(W_1, \dots, W_r; \mathbb{K})$ $\forall\, \xi \in \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_t; \mathbb{K})$

$$(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi)$$

Dowód : 

Niech $V_1, \dots, V_r$ przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$.

$V_1 \otimes \dots \otimes V_r = \mathcal{L}(V_1^*, \dots, V_r^*; \mathbb{K})$ - przestrzeń liniowa przekształceń r-liniowych $V_1^* \times \dots \times V_r^* \to \mathbb{K}$

$h(v_1, \dots, v_r) = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \qquad (v_1 \otimes \dots \otimes v_r)(u_1^*, \dots, u_r^*) = u_1^*(v_1) \cdot \ldots \cdot u_r^*(v_r)$

Tw. $h : V_1 \times \dots \times V_s \ni (v_1, \dots, v_s) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_s \in V_1 \otimes \dots \otimes V_s$ jest przekształceniem s-liniowym.

$$\forall f \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_s; Z) \ \exists! \ g \in \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_s; Z) \quad f = g \circ h$$

Dowód: 

Def. Tensorem typu (r, s) nazywamy element przestrzeni $V_s^r = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s}$

$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s} = \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r}, \underbrace{V, \dots, V}_{s}; \mathbb{K})$ Tensor typu (r, s) to przekształcenie $(r+s)$-liniowe $t : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}$

r jest kontrawariantnym rzędem, a s jest kowariantnym rzędem tensora.

Elementy V_0^r to tensory kontrawariantne rzędu r, a V_s^0 to tensory kowariane rzędu s.

$V_0^0 = \mathbb{K} \quad V_0^1 = V \quad V_1^0 = V^*$. Elementy V to kontrawektory, a elementy V^* to kowektory.

$$V_s^r = \mathcal{L}(V^*, \dots, V^*, V, \dots, V; \mathbb{K})$$

$\dim_{\mathbb{K}} V_s^r = n^{r+s}$, gdzie $\dim V = n \qquad x \in V_s^r \qquad x = \sum x_{i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_s} \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{k_1}^* \otimes \dots \otimes e_{k_s}^*$

$$x_{i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_s} = x(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_r}^*, e_{k_1}, \dots, e_{k_s})$$

$x = x^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \dots \otimes e^{*k_s}$ $\quad \bar{e}_i = \alpha^j_i e_j \quad \bar{e}^{*i} = \beta^i_j e^{*j} \quad \delta^i_j = \bar{e}^{*i}(\bar{e}_j) = \beta^i_l e^{*l}(\alpha^k_j e_k) = \beta^i_l \alpha^k_j e^{*l}(e_k) =$

$= \beta^i_l \alpha^k_j \delta^l_k = \beta^i_l \alpha^l_j = \delta^i_j \quad \beta = (\beta^i_l) \quad \alpha = (\alpha^k_j)$ macierze odwrotne

$x = \bar{x}^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \dots \otimes e^{*k_s} = x^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} \alpha^{j_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{j_r}_{i_r} \cdot \beta^{k_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot \beta^{k_s}_{l_s} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes e^{*l_1} \otimes \dots \otimes e^{*l_s}$

Stąd

$$x^{j_1,\dots,j_r}_{l_1,\dots,l_s} = \bar{x}^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} \alpha^{j_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{j_r}_{i_r} \beta^{k_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot \beta^{k_s}_{l_s}$$

Def. $x \in V^{r_1}_{s_1} \quad y \in V^{r_2}_{s_2} \qquad x \otimes y \in V^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}$, gdzie $x \otimes y(v^{*1}, \dots, v^{*r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) =$

$$= x(v^{*1}, \dots, v^{*r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) \cdot y(v^{*r_1+1}, \dots, v^{*r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2})$$

$$(x \otimes y)^{i_1,\dots,i_{r_1+r_2}}_{k_1,\dots,k_{s_1+s_2}} = x^{i_1,\dots,i_{r_1}}_{k_1,\dots,k_{s_1}} \cdot y^{i_{r_1+1},\dots,i_{r_1+r_2}}_{k_{s_1+1},\dots,k_{s_1+s_2}}$$

Def. Niech $\lambda \in \{1,\dots,r\}$, $\mu \in \{1,\dots,s\}$. Niech $x = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*s} \in V^r_s$

Wtedy $C_{\lambda,\mu}(x) = v^{*\mu}(v_\lambda) v_1 \otimes \dots \otimes v_{\lambda-1} \otimes v_{\lambda+1} \otimes \dots \otimes v_r \otimes v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*\mu-1} \otimes v^{*\mu+1} \otimes \dots \otimes v^{*s}$

$x = x^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \dots \otimes e^{*k_s}$ Kontrakcję tensora $C_{\lambda,\mu}: V^r_s \to V^{r-1}_{s-1}$ określamy

$C_{\lambda,\mu}(x) = x^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_s} C_{\lambda,\mu}(e_1 \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \dots \otimes e^{*k_s}) =$

$$= x^{i_1,\dots,i_{\lambda-1},j,i_\lambda,\dots,i_{r-1}}_{k_1,\dots,k_{\mu-1},j,k_\mu,\dots,k_{s-1}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{*k_1} \otimes \dots \otimes e^{*k_{s-1}}$$

$x = \xi^i_j \, e_i \otimes e^{*j}$ $\quad C^1_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i_i$ czyli ślad macierzy (ξ^i_j)

$T^r(V) = V^r_0$ $\quad T(V) = \sum_{r \geq 0} T^r(V)$ $\quad x \in T(V)$ $\quad x = \sum_{r \geq 0} x^r$ $\quad x^r \in T^r(V)$

$T(V)$ to algebra tensorowa V $\quad T(V^*) = \sum_{r \geq 0} V^0_r$ to algebra tensorowa V^*

$\sigma \in S_r$ $\quad x \in T^r(V^*)$ $\quad \sigma x(v^1, \dots, v^r) = x(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(r)})$

jeśli $x = v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*r}$ $\quad \sigma x = v^{*\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v^{*\sigma^{-1}(r)}$

Def. $x \in T^r(V^*)$. Jeśli $\forall \sigma \in S_r$ $\sigma x = x$ to x jest symetrycznym kowariantnym tensorem rzędu r

jeśli $\forall \sigma \in S_r$ $\sigma x = \operatorname{sgn} \sigma \cdot x$ to x jest antysymetrycznym kowariantnym tensorem rzędu r.

Tw. Niech $x \in T^r(V^*)$. Tensor x jest symetryczny $\iff$ współczynniki x są symetryczne.

Tensor x jest antysymetryczny $\iff$ współczynniki x są antysymetryczne

Dowód: $x_{i_1, \dots, i_r} = x(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \sigma x(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = x(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r)}}) = x_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$

 dla antysymetrycznych ■

Def. $P^r(V^*)$ – zbiór symetrycznych tensorów kowariantnych, $\Lambda^r(V^*)$ – zbiór antysymetrycznych tensorów kowariantnych

Def. $\forall\, x \in T^r(V^*)$ $\quad S_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} \sigma x \qquad A_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \sigma x$

$\uparrow$ symetryzacja $\qquad \uparrow$ antysymetryzacja

Tw.

$$P^r(V^*) = S_r(T^r(V^*)), \quad \Lambda^r(V^*) = A_r(T^r(V^*))$$

Dowód.: $\tau \in S_r$ $\quad \tau(A_r(x)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sgn}\sigma \; \tau(\sigma(x)) = \operatorname{sgn}\tau \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sgn}(\tau\sigma)(\tau\sigma(x)) =$

$= \operatorname{sgn}\tau \; A_r(x)$ $\quad$ Stąd $A_r(T^r(V^*)) \subset \Lambda^r(V^*)$

Niech $x \in \Lambda^r(V^*)$. Wtedy $A_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma \cdot \sigma(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)^2 x = \left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} 1\right)x =$

$= \frac{1}{r!} r! \, x = x$ $\qquad \Lambda^r(V^*) = A_r(\Lambda^r(V^*))$. Stąd $\Lambda^r(V^*) = A_r(T^r(V^*))$.

 $P^r(V^*) = S_r(T^r(V^*))$ ∎

Def.

Cofnięciem tensora $x \in T^r(W^*)$ za pomocą przekształcenia liniowego $f: V \to W$ nazywamy tensor $f^* x \in T^r(V^*)$ dany wzorem $f^*x(v_1, \dots, v_r) = x(f(v_1), \dots, x(v_r))$

$f^*: T^r(W^*) \to T^r(V^*)$ jest przekształceniem liniowym

Stw. $f^*(x \otimes y) = f^*x \otimes f^*y$

$V = \mathbb{R}^n \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad x \cdot y \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ jest tensorem symetrycznym z $P^2(\mathbb{R}^{n*})$

$x \cdot y = y \cdot x \quad x \cdot x > 0$ dla $x \neq 0$

Tensor T nazywamy iloczynem wewnętrznym na V jeśli $T \in P^2(V^*)$ oraz T jest dodatnio określony

tzn. $\forall\, v \neq 0 \quad T(v,v) > 0$

Tw. Jeżeli T jest iloczynem wewnętrznym na V to $\exists\, e_1, \ldots, e_n$ baza V taka, że $T(e_i, e_j) = \delta^i_j$

(baza ortonormalna względem T) czyli istnieje $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$ izomorfizm taki, że $f^*T(v,w) = v \cdot w$

$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Dowód Niech $v_1, \ldots, v_n$ - dowolna baza V

$v_1' = v_1 \quad v_2' = v_2 - \frac{T(v_1', v_2)}{T(v_1', v_1')} \cdot v_1' \quad v_3' = v_3 - \frac{T(v_1', v_3)}{T(v_1', v_1')} \cdot v_1' - \frac{T(v_2', v_3)}{T(v_2', v_2')} \cdot v_2'$ itd.

$T(v_i', v_j') = 0$ dla $i \neq j \quad v_i' \neq 0 \Rightarrow T(v_i', v_i') > 0$ Niech $e_i = \frac{v_i'}{\sqrt{T(v_i', v_i')}}$

$f(e_i) = v_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

$v_i \in \mathbb{R}^n$ dla $i=1,\dots,n$ $\det(v_1,\dots,v_n) = \det[v_1,\dots,v_n]$ $\det \in \Lambda^n(\mathbb{R}^{n*})$

Niech $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^l(V^*)$. Wtedy $T \otimes S$ nie musi być elementem $\Lambda^{k+l}(V^*)$

Def. Iloczynem zewnętrznym $T \wedge S$ nazywamy element $\Lambda^{k+l}(V^*)$ określony następująco

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l}(T \otimes S)$$

Stw. $(T_1 + T_2) \wedge S = T_1 \wedge S + T_2 \wedge S$ $T \wedge (S_1 + S_2) = T \wedge S_1 + T \wedge S_2$

$(aT) \wedge S = T \wedge (aS) = a(T \wedge S)$ $T \wedge S = (-1)^{kl} S \wedge T$ $f^*(T \wedge S) = f^*T \wedge f^*S$

dla $T, T_1, T_2 \in \Lambda^k(V^*)$, $S, S_1, S_2 \in \Lambda^l(V^*)$, $a \in \mathbb{K}$, $f: W \to V$ p. liniowe

Dowód.: 

Tw. 1) $T \in T^k(V^*)$, $S \in T^l(V^*)$ i $A_k(T) = 0 \Rightarrow A_{k+l}(T \otimes S) = A_{k+l}(S \otimes T) = 0$

2) $A_{k+l+m}(A_{k+l}(T \otimes S) \otimes P) = A_{k+l+m}(T \otimes S \otimes P) = A_{k+l+m}(T \otimes A_{l+m}(S \otimes P))$

dla $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^l(V^*)$, $P \in \Lambda^m(V^*)$

3) $(T \wedge S) \wedge P = T \wedge (S \wedge P) = \dfrac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} A_{k+l+m}(T \otimes S \otimes P)$

Dowód: 1) $(k+l)!\, A_{k+l}(T\otimes S)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\, S(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$

Niech $G = \{\sigma\in S_{k+l} : \sigma(i)=i \text{ dla } i=k+1,\dots,k+l\}$ $\quad \sum_{\sigma\in G} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\, S(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$

$= \left(\sum_{\sigma'\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma' T(v_{\sigma'(1)},\dots,v_{\sigma'(k)})\right)\cdot S(v_{k+1},\dots,v_{k+l}) = A_k(T)(v_1,\dots,v_k)\cdot S(v_{k+1},\dots,v_{k+l}) = 0$

Niech $\sigma_0\notin G$ $\quad G\cdot\sigma_0 = \{\sigma\cdot\sigma_0 \mid \sigma\in G\}$ $\quad (v_{\sigma_0(1)},\dots,v_{\sigma_0(k+l)}) = (w_1,\dots,w_{k+l})$.

$\sum_{\sigma\in G\cdot\sigma_0} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot S(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)}) = \operatorname{sgn}\sigma_0\cdot \sum_{\sigma'\in G} \operatorname{sgn}\sigma'\, T(w_{\sigma'(1)},\dots,w_{\sigma'(k)})\cdot S(w_{k+1},\dots,w_{k+l})$

$= \operatorname{sgn}\sigma_0\, A_k(T)(w_1,\dots,w_k)\cdot T(w_{k+1},\dots,w_{k+l}) = 0$

$\sigma\in G\cap G\cdot\sigma_0$ $\quad \sigma=\sigma'\cdot\sigma_0$ dla $\sigma'\in G$ $\quad \sigma_0=(\sigma')^{-1}\sigma$ $\quad (\sigma')^{-1}\in G \wedge \sigma\in G \Rightarrow \sigma_0\in G$ sprzeczność.

Stąd $G\cap G\cdot\sigma_0=\emptyset$

$\sigma_1\notin G$ $\quad \sigma_1\notin G\cdot\sigma_0$ $\quad \sigma\in G\cdot\sigma_0\cap G\cdot\sigma_1$ $\quad \sigma'\sigma_0=\sigma''\sigma_1$ $\quad \sigma',\sigma''\in G$ $\quad \sigma_1=(\sigma'')^{-1}\sigma'\cdot\sigma_0$ $\quad \sigma_1\in G\sigma_0$ sprzeczność

Stąd jeśli $\exists\, \sigma\in G\sigma_0\cap G\sigma_1 \Rightarrow G\sigma_0=G\sigma_1$

Czyli $S_{k+l}=\bigsqcup_{\sigma_0} G\sigma_0$ $\quad$ stąd $A_{k+l}(T\otimes S)=0$

2) $A_{l+m}(A_{l+m}(S\otimes P) - S\otimes P) = A_{l+m}(S\otimes P) - A_{l+m}(S\otimes P) = 0$ Stąd z 1) mamy

$$0 = A_{k+l+m}(T\otimes A_{l+m}(S\otimes P) - S\otimes P) = A_{k+l+m}(T\otimes A_{l+m}(S\otimes P)) - A_{k+l+m}(T\otimes S\otimes P)$$

drugą równość

3) $(T\wedge S)\wedge P = \frac{k+l+m}{(k+l)!\,m!} = A_{k+l+m}((T\wedge S)\otimes P) = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!} A_{k+l+m}\left(\frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l}(T\otimes S)\otimes P\right) =$ stąd z 2)

$= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l+m}(T\otimes S\otimes P) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} A_{k+l+m}(T\otimes S\otimes P)$. Druga równość

Tw. Zbiór wszystkich iloczynów $\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$ dla $1\le i_1<\dots<i_k\le \dim V^*$ jest bazą $\Lambda^k(V^*)$

Stąd $\dim_{\mathbb{K}}\Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dowód.: $\omega\in\Lambda^k(V^*)$ $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1,\dots,i_k}\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}$ $\omega = A_k(\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k} A_k(\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k})$

$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k}\, k!\,\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$. Zał, że $\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1,\dots,i_k}\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}=0$ $\omega(v_{i_1},\dots,v_{i_k}) = a_{i_1,\dots,i_k}=0$

$\dim V = \dim V^* = n \qquad \Lambda^n(V^*) = 1$

Tw. $v_1,\dots,v_n$ - baza V, $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, niech $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ dla $i=1,\dots,n$

Wtedy $\omega(w_1,\dots,w_n) = \det(a_{ij})\, \omega(v_1,\dots,v_n)$

Dowód: $\eta((a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,(a_{n1},\dots,a_{nn})) = \omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j\right) \qquad \eta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^{n*}) \Rightarrow \eta = \lambda \cdot \det$

dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda = \eta(e_1,\dots,e_n) = \omega(v_1,\dots,v_n)$ ■

Z poprzedniego tw. otrzymuję, że jeżeli $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*)$. Wtedy ω rozkłada bazy V na dwie rozłączne klasy t, że $\omega(v_1,\dots,v_n) > 0$ i t. że $\omega(W_1,\dots,W_n) < 0$.

Jeśli $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ to bazy $v_1,\dots,v_n$ oraz $w_1,\dots,w_n$ są w tej samej klasie $\Leftrightarrow$ $\det(a_{ij}) > 0$. Kryterium to nie zależy od wyboru ω.

Każdy z tych dwóch zbiorów nazywamy **orientacją** przestrzeni V. Orientację, do której należy baza $(v_1,\dots,v_n)$ oznacza się przez $[v_1,\dots,v_n]$, a drugą orientację przez $-[v_1,\dots,v_n]$.

Standardową orientację przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest $[e_1,\dots,e_n]$, gdzie $e_i = (0,\dots,0,\underset{i\text{-te}}{1},0,\dots,0)$ dla $i=1,\dots,n$.

Stw. $\dim_{\mathbb{R}} V = 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n(V^*) = 1$ Dowód: $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n(V^n) = \binom{n}{n} = 1$ □

Stw. $\forall \omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^{n*})$ $\quad \omega(e_1,\dots,e_n) = 1 \Rightarrow \omega = \det$.

Niech T będzie iloczynem wewnętrznym na V, a $v_1,\dots,v_n$ oraz $w_1,\dots,w_n$ będą dwiema bazami ortonormalnymi względem T. Niech $A=(a_{ij})$ będzie macierzą zmiany bazy $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$

Wtedy $\delta_{ij} = T(w_i,w_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} T(v_k,v_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} \Rightarrow A\cdot A^T = I \Rightarrow \det A = \pm 1$

Stąd jeśli $\omega(v_1,\dots,v_n) = \pm 1 \Rightarrow \omega(w_1,\dots,w_n) = \pm 1$

Jeśli ustalono orientację μ przestrzeni V to $\exists! \omega \in \Lambda^n(V^*)$ $\quad \omega(v_1,\dots,v_n) = 1$ $\quad \forall v_1,\dots,v_n$ – baze ortonormalne V t, że $\mu = [v_1,\dots,v_n]$. ω nazywamy elementem objętości przestrzeni V wyznaczonym przez iloczyn wewnętrzny T i orientację μ.

$\det$ jest elementem objętości $\mathbb{R}^n$ wyznaczonym przez standardowy iloczyn wewnętrzny i standardową orientację.

$|\det(v_1,\dots,v_n)|$ jest objętością równoległościanu rozpiętego na wektorach $v_1,\dots,v_n$.

$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi(w) = \det \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{bmatrix}$$

$\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{n*}) = (\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \exists!\, z \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(w) = \langle w, z \rangle$, gdzie $\langle \cdot , \cdot \rangle$ iloczyn skalarny

Wektor z oznaczamy symbolem $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ i nazywamy iloczynem wektorowym wektorów $v_1, \dots, v_{n-1}$

Z def. $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ otrzymujemy 

$\forall \sigma \in S_{n-1} \; v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_1 \times \dots \times v_{n-1}$, $\forall a \in \mathbb{R} \quad v_1 \times \dots \times a v_i \times \dots \times v_{n-1} = a(v_1 \times \dots \times v_{n-1})$

$v_1 \times \dots \times (v_i + v_i') \times \dots \times v_{n-1} = v_1 \times \dots \times v_i \times \dots v_{n-1} + v_1 \times \dots \times v_i' \times \dots \times v_{n-1}$