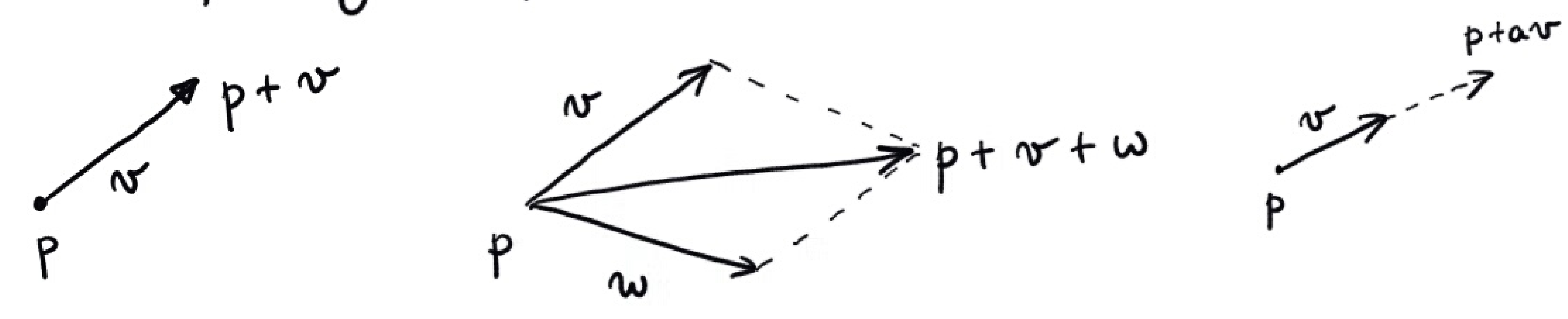
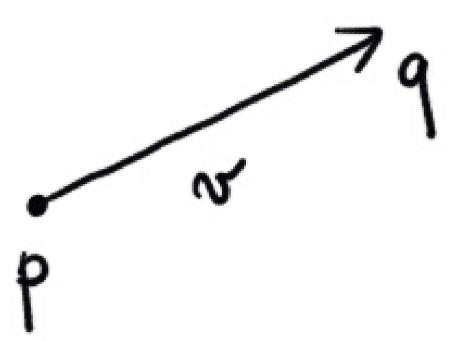
Wojciech Domitrz : Geometria form różniczkowych, wykład 2

$\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń afiniczna.

Niech punkt $p \in \mathbb{R}^n$. Zbiór wszystkich par (p, v), gdzie $v \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $\mathbb{R}^n_p$ i nazywamy przestrzenią styczną do $\mathbb{R}^n$ w punkcie p. $\mathbb{R}^n_p$ jest przestrzenią liniową z działaniami

$(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$ $\quad$ $a \cdot (p, v) = (p, a \cdot v)$





$q - p = v$

Wektory (p, v) będziemy zapisywali jako v_p (wektor v zaczepiony w punkcie p)

Przestrzeń styczna $\mathbb{R}^n_p$ dziedziczy struktury z przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

Iloczyn wewnętrzny $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$, standardową orientacją $\mathbb{R}^n_p$ jest $[(e_1)_p, \dots, (e_n)_p]$

Pole wektorowe na $\mathbb{R}^n$ to przekształcenie $\mathbb{R}^n \ni p \stackrel{F}{\longmapsto} F(p) \in \mathbb{R}^n_p$

$\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ $\quad F(p) = \sum_{i=1}^{n} F^i(p)\,(e_i)_p$. Stąd otrzymujemy $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pole wektorowe jest ciągłe, różniczkowalne, gładkie jeśli funkcje F^i są ciągłe, różniczkowalne, gładkie dla $i = 1, \dots, n$.

$(F + G)(p) := F(p) + G(p)$ $\quad$ $\langle F, G \rangle (p) := \langle F(p), G(p) \rangle$ $\quad$ $(f \cdot F)(p) := f(p) \cdot G(p)$

$(F_1 \times \dots \times F_{n-1})(p) = F_1(p) \times \dots \times F_{n-1}(p)$ $\quad$ $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F^i$ $\quad$ $\nabla = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \cdot e_i$ $\quad$ $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$

k-formą różniczkową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy przekształcenie $\omega : \mathbb{R}^n \ni p \longmapsto \omega|_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}_p)$

Jeżeli $\varphi_1|_p, \dots, \varphi_n|_p$ jest bazą dualną do bazy $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$ czyli $\varphi_i(p)(e_j)_p = \delta_{ij}$

$$\omega|_p = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1,\dots,i_k}(p)\, \varphi_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}|_p$$

ω jest ciągła, różniczkowalna, gładka jeżeli takie są funkcje $\omega_{i_1,\dots,i_k}$ dla $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ – gładkie (C^∞) k-formy różniczkowe na $\mathbb{R}^n$

$(\omega + \eta)|_p = \omega|_p + \eta|_p$ dla $\omega, \eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $(\omega \wedge \eta)|_p = \omega|_p \wedge \eta|_p$ dla $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \eta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$

$(f \cdot \omega)|_p = f(p) \cdot \omega|_p$ dla $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\qquad df|_p(v_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \cdot v_i$

$\pi^i : \mathbb{R}^n \ni (x^1, \dots, x^n) \longmapsto x^i \in \mathbb{R}$ $\qquad dx^i := d\pi^i$ $\qquad dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = (e_i)_p$

$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1,\dots,i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie przekształceniem gładkim. Wtedy mamy określone przekształcenie liniowe $f_{*p} : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_p$ następującym wzorem $f_{*p}(v_p) = (Df|_p \cdot v)_{f(p)}$, gdzie $Df|_p$ jest macierzą Jacobiego przekształcenia f w punkcie p.

Tw. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ to $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

Dowód: $df|_p v_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i|_p (v_p)$ ■

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $\quad \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ $\quad f^* : \Omega^k(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ $\quad f^*\omega|_p = f^*(\omega|_{f(p)})$

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n_p$ $\quad (f^*\omega)|_p (v_1, \dots, v_k) = \omega|_{f(p)} (f_* v_1, \dots, f_* v_k)$

Tw. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Wtedy $\forall\, \omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ $\forall\, \eta \in \Omega^l(\mathbb{R}^m)$ $\forall\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

1) $f^* dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$ 2) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$ 3) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*\omega$ 4) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$

Dowód: $(f^* dx^i)|_p (v_p) = dx^i|_{f(p)} (f_* v_p) = dx^i|_{f(p)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p) v^j, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^2}{\partial x^j}(p) v^j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(p) v^j \right) =$

$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) v^j = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\, dx^j|_p (v_p) \right.$

Pozostałe 2) – 4) 

Tw. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Wtedy $f^*(h\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f) \cdot \det(Df)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

Dowód: $f^*(h\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f) f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ $\qquad f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) =$

$= (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)\left(f_* \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, f_* \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$ ■

$\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} \omega_{i_1,\dots,i_k}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ $\quad d\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} d\omega_{i_1,\dots,i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum\limits_{a=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^a}\, dx^a\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$

Tw. 1) $\forall\ \omega,\eta\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)\quad d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta$

2) $\forall\ \omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)\ \ \forall\ \eta\in\Omega^l(\mathbb{R}^n)\quad d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$ 3) $d(d\omega)=0\quad (d^2=0)$

4) $\forall\ \omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^m)\ \ \forall\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\quad f^*d\omega = d(f^*\omega)$

Dowód: 1)-2)  3) $d\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum\limits_{a=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^a}\, dx^a\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$

$$d(d\omega) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial\omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^a}\right) dx^b\wedge dx^a\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\ \sum_{a\le b}\left(\frac{\partial^2\omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^a\partial x^b} - \frac{\partial^2\omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^b\partial x^a}\right) dx^a\wedge dx^b\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} = 0$$

4) $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\quad f^*g = g\circ f\quad f^*dg(v) = dg(f_*v)\quad d(f^*g)(v) = d(g\circ f)(v) = Dg(Df(v)) =$

$= dg(f_*(v))$ czyli wzór prawdziwy dla 0-form różniczkowych. Dalej indukcja po k dla $\omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^{2n})$. Wystarczy pokazać, że jeśli $\forall\ \omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)\quad f^*d\omega = d f^*\omega$

to zachodzi $f^*(d(\omega\wedge dx^i)) = d(f^*(\omega\wedge dx^i))$

$f^*(d(\omega \wedge dx^i)) = f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^* d\omega \wedge f^* dx^i = d f^*\omega \wedge f^* dx^i$

$= d f^*\omega \wedge f^* dx^i + (-1)^k f^*\omega \wedge f^* \underbrace{d(dx^i)}_{=0} = d f^*\omega \wedge f^* dx^i + (-1)^k f^*\omega \wedge d(f^* dx^i) = d(f^*(\omega \wedge dx^i))$ ■

Def. Forma ω jest zamknięta jeżeli $d\omega = 0$. Forma ω jest dokładna jeżeli $\omega = d\alpha$ dla pewnej formy α.

Wniosek (z 3) poprzedniego Tw.)
Każda forma dokładna jest zamknięta.

$$\omega = P\,dx + Q\,y \qquad d\omega = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$d\omega = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$ – 1-forma na $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ $\qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & \text{dla } x>0,\ y>0 \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & \text{dla } x<0 \\ 2\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & \text{dla } x>0,\ y<0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{dla } x=0,\ y>0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{dla } x=0,\ y<0 \end{cases}$$

$\omega = d\theta$ na $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x<0 \vee (x \geq 0 \wedge y \neq 0)\}$

Nie istnieje funkcja ciągła f na $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ taka, że $f|_D = \theta$, bo $df = \omega \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y}$

$\Rightarrow f = \theta + c \Rightarrow f$ nie istnieje.

$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i$ i $\omega = df$ zał, że $f(0) = 0$ ($c = \text{const.}$ $dc = 0$)

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx)\, x^i \, dt$$

$$I\omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega(tx)\, x^i \, dt$$

Niech ω będzie określona na zbiorze otwartym $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Zbiór A jest gwiaździsty względem 0 jeśli $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \in A \Rightarrow \forall t \in [0,1]$ $tx \in A$

Tw. (lemat Poincarégo) Jeśli A jest gwiaździsty względem 0 to każda forma zamknięta na A jest dokładna.

Dowód.: $I : \Omega^l(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{l-1}(\mathbb{R}^n)$ taka, że $I(0) = 0$ $\omega = I(d\omega) = d(I\omega)$.

Stąd wynika, że $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = d(I\omega)$

$F_t(x) = tx$ $\omega = F_1^* \omega - F_0 \omega = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F_t^* \omega)\, dt$ $\omega = \sum_J \omega_J(x)\, dx_J$ $\omega_J(x) = \omega_{i_1, \ldots, i_k}(x)$

$F_t^* \omega = \sum_J t^k \omega_J(x)\, dx_J$ $dx_J = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega = \frac{d}{dt}\Big(\sum_J t^k \omega_J(tx)\, dx_J\Big) = \sum_J \Big(k\, t^{k-1}\, \omega_J(tx) + t^k \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, x_b\Big)\, dx_J$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^* \omega \, dt = \sum_J \Big(\int_0^1 k\, t^{k-1}\, \omega_J(tx)\, dt + \sum_{b=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, dt\Big) x_b\Big)\, dx_J$$

$$F_t(x) = (tx) \qquad \frac{dF_t}{dt} = \frac{d}{dt}(t \cdot x) = x = \frac{tx}{t} = V_t(x), \text{ gdzie } V_t(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{t} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(V_t \lrcorner\, \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(V_t, X_1, \dots, X_{k-1})$$

Pokażemy, że

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^* \omega \, dt = d\Big(\int_0^1 F_t^*(V_t \lrcorner\, \omega)\, dt\Big) + \int_0^1 F_t^*(V_t \lrcorner\, d\omega)\, dt .$$

Niech $I\omega = \int_0^1 F_t^*(V_t \lrcorner\, \omega)\, dt$

Wtedy $\omega = F_1^*\omega - F_0^*\omega = \int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^* \omega\, dt = d(I\omega) + I d\omega$. Jeśli $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = d(I\omega)$

Niech $d\overset{a}{\check{x}}_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{a-1}} \wedge dx_{i_{a+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$$I\omega = \int_0^1 F_t^*(V_t \lrcorner\, \omega)\, dt = \int_0^1 F_t^*\Big(\sum_J \omega_J(x) \sum_{a=1}^{k} \frac{x_{i_a}}{t} (-1)^{a-1} d\overset{a}{\check{x}}_J\Big) dt = \sum_J \sum_{a=1}^{k} \int_0^1 \omega_J(tx)\, t^{k-1}\, dt\; x_{i_a} (-1)^{a-1} d\overset{a}{\check{x}}_J$$

$$d(I\omega) = \sum_J \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{n} \int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t\, dt\; x_{i_a} (-1)^{a-1} dx_b \wedge d\overset{a}{\check{x}}_J + \sum_J \sum_{a=1}^{k} \int_0^1 \omega_J(tx)\, t^{k-1} dt\; dx_J =$$

$$= \sum_J \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t^k\, dt\; x_{i_a} (-1)^{a-1} dx_b \wedge d\overset{a}{\check{x}}_J + \sum_J k \int_0^1 \omega_J(tx)\, t^{k-1} dt\; dx_J$$

$$I(d\omega) = \int_0^1 F_t^{*}\left(V_t \lrcorner\, d\omega\right) dt = \int_0^1 F_t^{*}\left(V_t \lrcorner \sum_{b=1}^{m} \sum_{J} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(x)\, dx_b \wedge dx_J \right) dt =$$

$$= \sum_J \sum_{b=1}^{m} \int_0^1 F_t^{*}\left(\sum_{a=1}^{m} \frac{x_a}{t} \frac{\partial}{\partial x_a} \lrcorner \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(x)\, dx_b \wedge dx_J \right) dt = \sum_J \sum_{b=1}^{m} \int_0^1 F_t^{*}\left(\frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(x) \frac{x_b}{t}\, dx_J \right) dt + \sum_{a=1}^{k} \int_0^1 F_t^{*}\left(\frac{x_{i_a}}{t} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(x) (-1)^a\, dx_b \wedge d\overset{a}{\check{x}}_J \right) dt =$$

$$= \sum_J \sum_{b=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t^k\, dt\ x_b\, dx_J + \sum_{a=1}^{k} \int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t^k\, dt\ x_{i_a} (-1)^a\, dx_b \wedge d\overset{a}{\check{x}}_J \right) =$$

$$= \sum_J \sum_{b=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t^k\, dt\ x_b\, dx_J \right) - \sum_J \sum_{b=1}^{m} \sum_{a=1}^{k} \int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, t^k\, dt\ x_{i_a} (-1)^{a-1}\, dx_b \wedge d\overset{a}{\check{x}}_J$$

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \sum_J \left(\int_0^1 k\, t^{k-1} \omega_J(tx)\, dt + \sum_{b=1}^{m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_J}{\partial x_b}(tx)\, dt \right) x_b \right) dx_J = \int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^{*}\omega\, dt = \omega$$

If $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = d(I\omega)$ ■