Singularną kostką wymiaru n (n-kostką) w $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję ciągłą $c: [0,1]^n \to A$

Przyjmujemy, że $\mathbb{R}^0 = [0,1]^0 = \{0\}$ czyli singularną 0-kostką nazywamy funkcję $f: \{0\} \to A$ czyli punkt w A. Singularną 1-kostkę nazywamy krzywą.

Standardową n-kostką $I^n: [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $I^n(x) = x$ dla $x \in [0,1]^n$.

Będziemy rozważać formalne sumy singularnych n-kostek w A przemnożone przez liczby całkowite

np. $2c_1 + 3c_2 - 4c_3$ gdzie c_1, c_2, c_3 są singularnymi n-kostkami w A.

n-Łańcuchem w A nazywamy kombinację nad $\mathbb{Z}$ skończonej liczby n-kostek singularnych

czyli $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, a c_i są singularnymi n-kostkami w A.

Formalnie: niech $\mathcal{Y}$ będzie zbiorem wszystkich singularnych n-kostek. Funkcję $f: \mathcal{Y} \to \mathbb{Z}$ nazywamy n-Łańcuchem taką, że $f(c) = 0$ dla wszystkich $c \in \mathcal{Y}$ oprócz skończenie wielu c

Określamy $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$ i $(nf)(c) = n \cdot f(c)$ dla $c \in \mathcal{Y}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$.

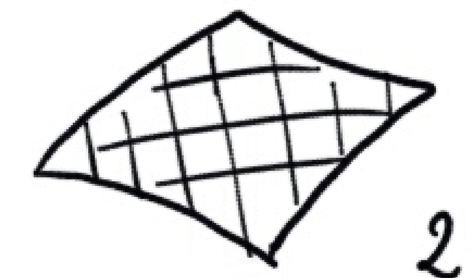
Stw. Jeśli f, g są n-Łańcuchami to $f+g$ oraz nf są n-Łańcuchami

Niech $c \in \mathcal{Y}$. Niech c oznacza funkcję $\delta_c: \mathcal{Y} \to \mathbb{Z}$ $\delta_c(c) = 1$ i $\delta_c(c') = 0$ $\forall c' \in \mathcal{Y} - \{c\}$

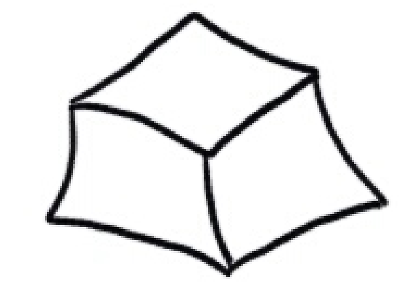
Stw. Każdy n-Łańcuch można zapisać jako $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i$ dla pewnych $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ i n-kostek singularnych $c_i \in \mathcal{Y}$ dla $i = 1, \ldots, k$.

- 0 - kostka singularna

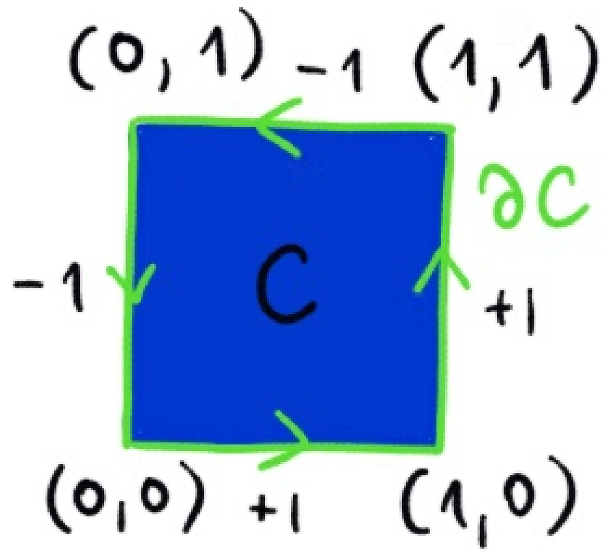
1 - kostka singularna



2 - kostka singularna



3 - kostka singularna



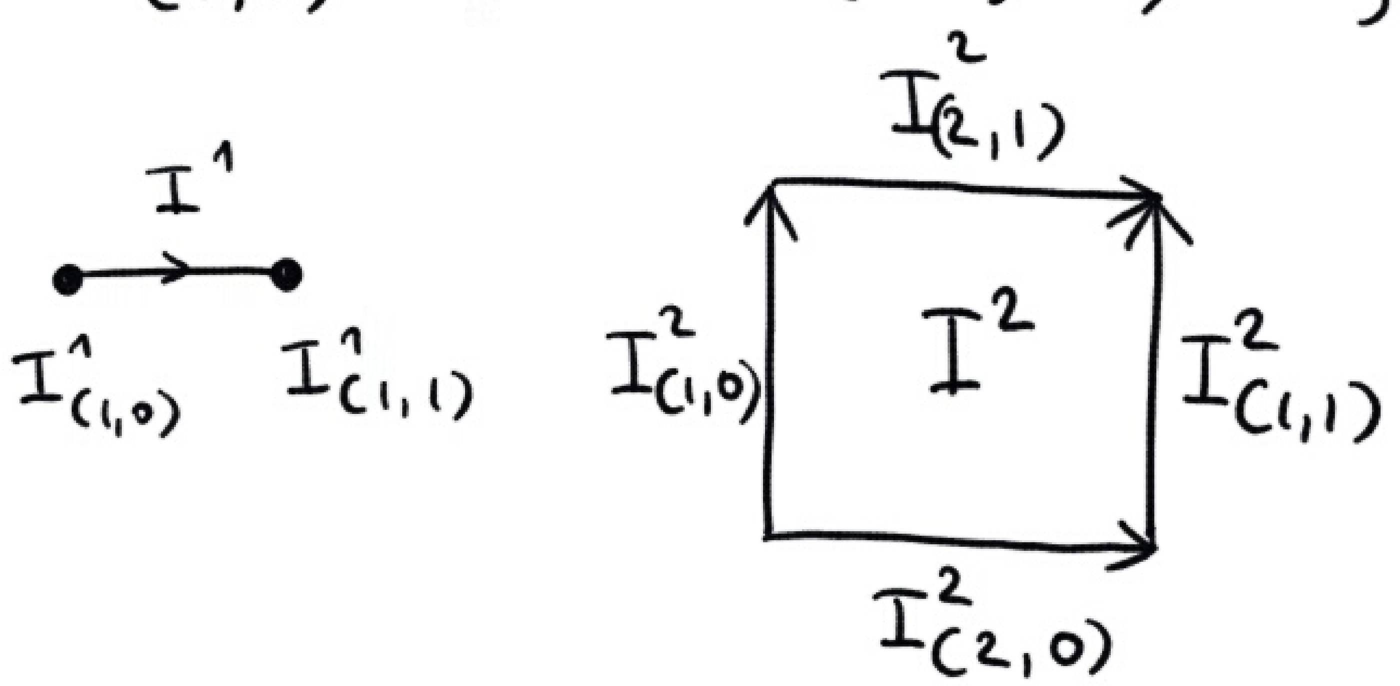
Brzeg ∂I^2

$C = I^2 : [0,1]^2 \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^2$

$I^n : [0,1]^n \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^n$

$I^n_{(i,0)}(x) = I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{n-1})$ – $(i, 0)$ – ściana kostki I^n.

$I^n_{(i,1)}(x) = I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{n-1})$ – $(i, 1)$ – ściana kostki I^n.



$I^n_{(i,j)}$ na i-tym miejscu wstawiam j $(i = 1, \dots, n,\ j = 0, 1)$

Brzegiem standardowej kostki I^n nazywamy $(n-1)$-łańcuch $\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} I^n_{(i,j)}$

(i,j)-ścianą n-kostki singularnej $c : [0,1]^n \to A$ nazywamy $(n-1)$-kostkę singularną

$c_{(i,j)} = c \circ I^n_{(i,j)} : I^{n-1} \to A$

Brzegiem n-kostki singularnej c nazywamy $(n-1)$-łańcuch $\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} c_{(i,j)}$

Brzegiem n-łańcucha $\sum a_i c_i$ nazywamy $(n-1)$-łańcuch $\partial(\sum a_i c_i) = \sum a_i \partial(c_i)$

Tw. Jeżeli c jest n-łańcuchem w A to $\partial(\partial c) = 0$ czyli $\partial^2 c = 0$.

Dowód: $i \leq j$ $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}(x) = I^n_{(i,\alpha)}\left(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)\right) = I^n_{(i,\alpha)}(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) =$

$= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2})$

$\left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}(x) = I^n_{(j+1,\beta)}\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)\right) = I^n_{(j+1,\beta)}(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-2}) =$

$= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2})$

Stąd $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)} = \left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ dla $i \leq j$ czyli $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)} = \left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ $(*)$

$$\partial(\partial c) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$$

W tej sumie $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$ oraz $\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ pojawiają się z przeciwnymi znakami $(-1)^{i+\alpha+j+\beta}$ i $(-1)^{j+1+\beta+i+\alpha} = -\left((-1)^{i+\alpha+j+\beta}\right)$. Stąd z $(*)$ znoszą się w sumie czyli $\partial\partial c = 0$. Z prawdziwości tw. dla n-kostek singularnych wynika prawdziwość dla n-łańcuchów ($\mathbb{Z}$-kombinacji liniowych skończonej liczby n-kostek), gdyż ∂ jest $\mathbb{Z}$-liniowy. ∎

Lemat Poincarego na R^m $d^2=0$. Ostatnie twierdzenie $\partial^2=0$

Niech $c:[0,1]^n \to R^m$ będzie różniczkowalną singularną n-kostką.

Niech ω będzie k-formą na $[0,1]^k$. Wtedy $\omega = f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$, gdzie f jest funkcją gładką.

Wtedy $\int_{[0,1]^k}\omega = \int_{[0,1]^k} f\,dx^1\ldots dx^k$ czyli $\int_{[0,1]^k} f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k$

Jeśli ω jest k-formą na A i c jest singularną k-kostką w A, to określamy $\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega$.

Jeśli $c = I^k$ to $\int_{I^k} f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k = \int_{[0,1]^k}(I^k)^*(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} f(x^1,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k$.

Dla $k=0$ podajemy osobną definicję. Niech ω będzie 0-formą czyli funkcją. Jeżeli $c:\{0\}\to A$ jest singularną 0-kostką w A to określamy $\int_c \omega = \omega(c(0))$

Całkę z k-formy ω na k-łańcuchu $c=\sum a_i c_i$ określamy jako $\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i}\omega$

Całka z 1-formy na 1-łańcuchu nazywa się całką krzywoliniową.

Jeżeli $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ jest 1-formą na R^2 oraz $c:[0,1]\to R^2$ jest singularną 1-kostką (krzywą) to

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \lim_{\Delta t_n\to 0}\sum_{i=1}^{n}(c^1(t_i)-c^1(t_{i-1}))P(c(t^i)) + (c^2(t_i)-c^2(t_{i-1}))Q(c(t^i))$$ gdzie $t_0,\ldots,t_n$ jest podziałem odcinka $[0,1]$ $t^i\in[t_{i-1},t_i]$ $\Delta t_n = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1})$

Tw. Stokesa. Jeżeli ω jest $(k-1)$-formą na zbiorze otwartym $A \subset \mathbb{R}^n$ i c jest k-łańcuchem w A, to

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Dowód: Niech $c = I^k$ oraz ω jest $(k-1)$-formą na $[0,1]^k$. Wtedy $\omega = \sum f_i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k$

Tw wystarczy pokazać dla formy $f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^k$.

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)} (f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq i \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^k) \, dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^k & j = i \end{cases}$$

$$\int_{\partial I^k} f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)} f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^k) \, dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^k + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^k) \, dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^k.$$

$$\int_{I^k} d(f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^k = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{k-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \, dx^1 \ldots dx^k = (-1)^{i-1} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \, dx^i \int_{[0,1]^{k-1}} dx^1 \ldots dx^{i-1} \, dx^{i+1} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(f(x^1,\dots,x^{i-1},1,x^{i+1},\dots,x^k) - f(x^1,\dots,x^{i-1},0,x^{i+1},\dots,x^k) \right) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1,\dots,x^{i-1},1,x^{i+1},\dots,x^k)\, dx^1 \dots dx^{i-1}\, dx^{i+1} \dots dx^k + (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1,\dots,x^{i-1},0,x^{i+1},\dots,x^k)\, dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^k =$$

$$= \int_{\partial I^k} f \; dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k .$$

Stąd $\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$. Jeżeli c jest singularną k-kostką

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega \qquad \int_c d\omega = \int_{I^k} c^* d\omega = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Jeżeli c jest k-łańcuchem $\sum a_i c_i$ to $\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega$ ∎