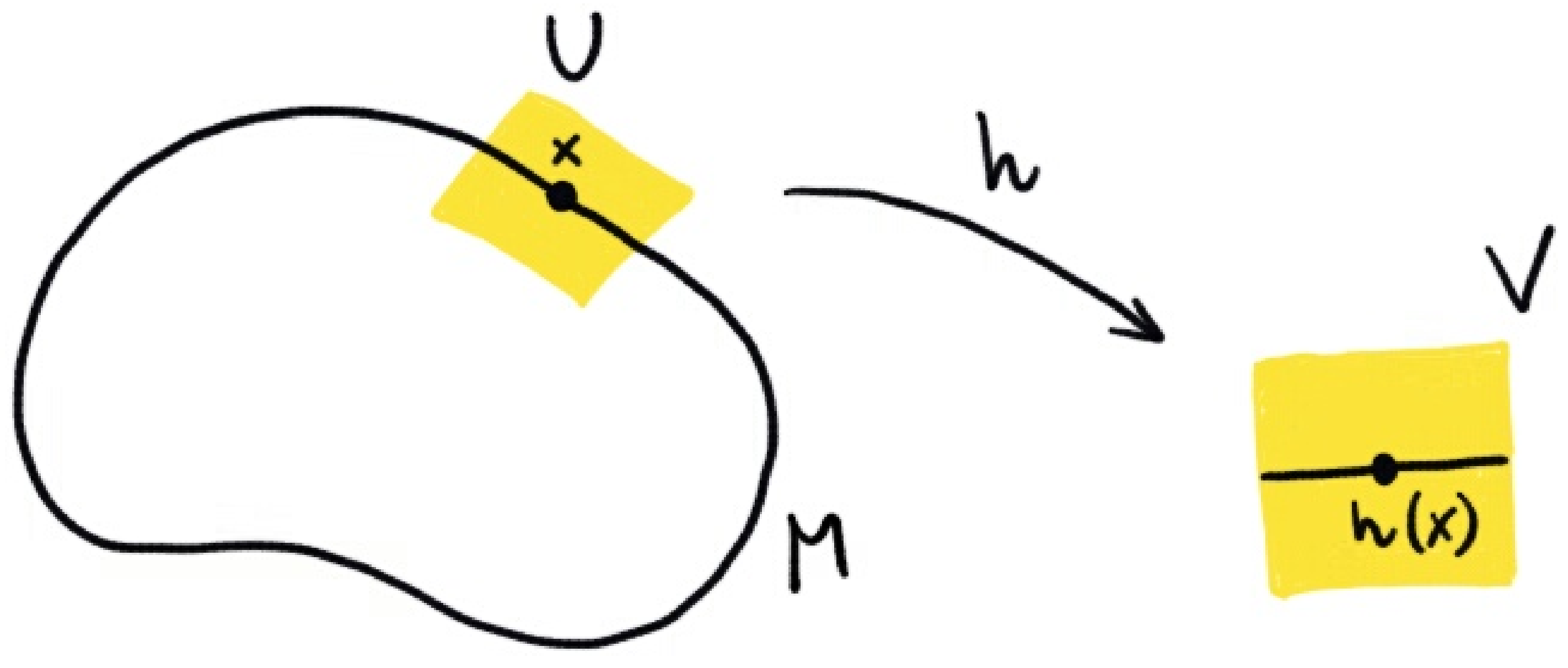
Rozmaitości różniczkowe

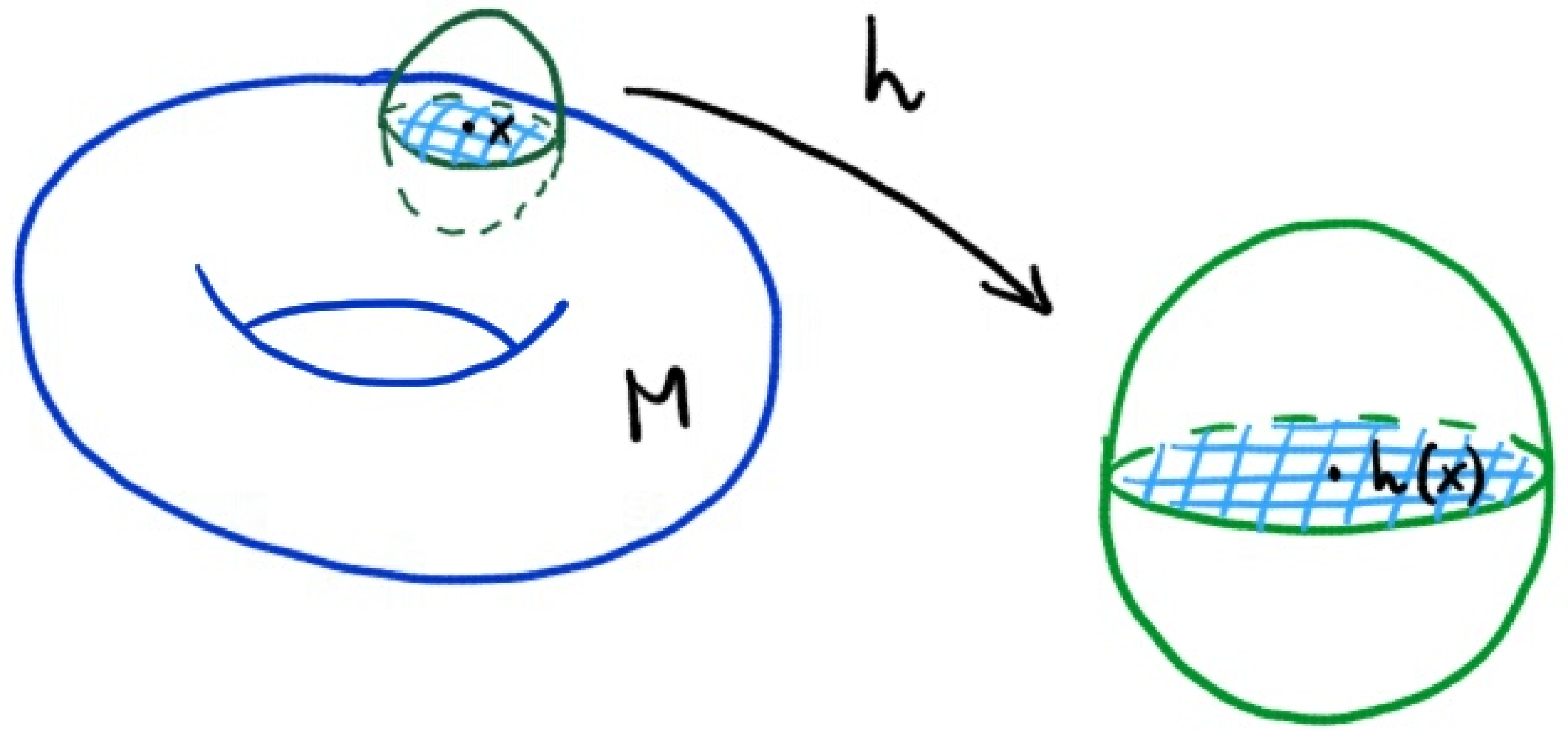
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest k-wymiarową rozmaitością (w $\mathbb{R}^n$), jeżeli $\forall x \in M$ jest spełniony następujący warunek:

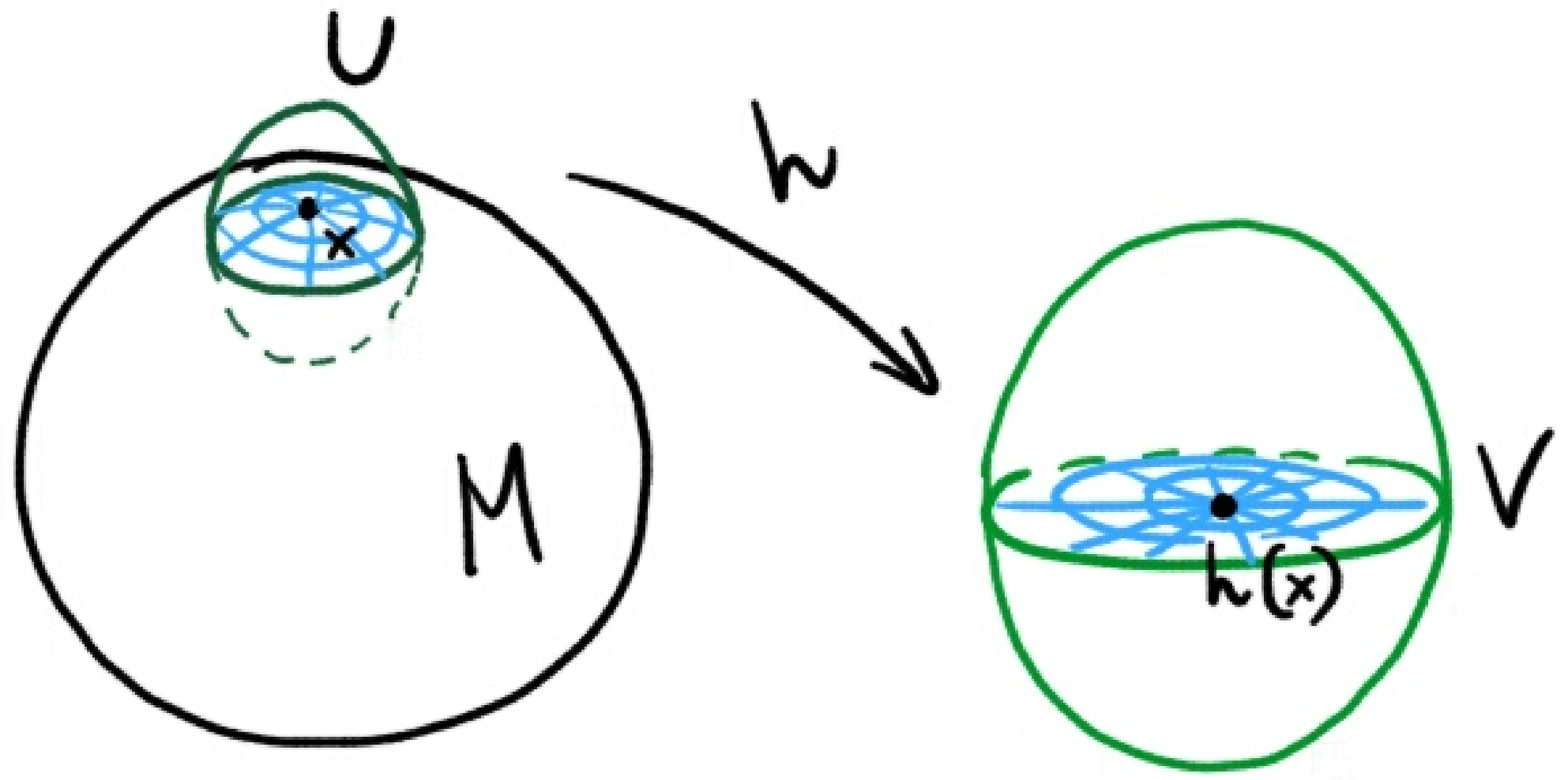
$\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty $x \in U$ oraz $V \subset \mathbb{R}^n$ otwarty i dyfeomorfizm $h : U \to V$ taki, że

(*)

$$h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{y \in V \mid y^{k+1} = \ldots = y^n = 0\}$$







Tw.

$A \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $g : A \to \mathbb{R}^p$ jest funkcją gładką taką, że jeżeli $g(x) = 0$ to $g'(x)$ ma rząd p.

Wtedy $g^{-1}(0)$ jest $(n-p)$-wymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^n$

Przykład:

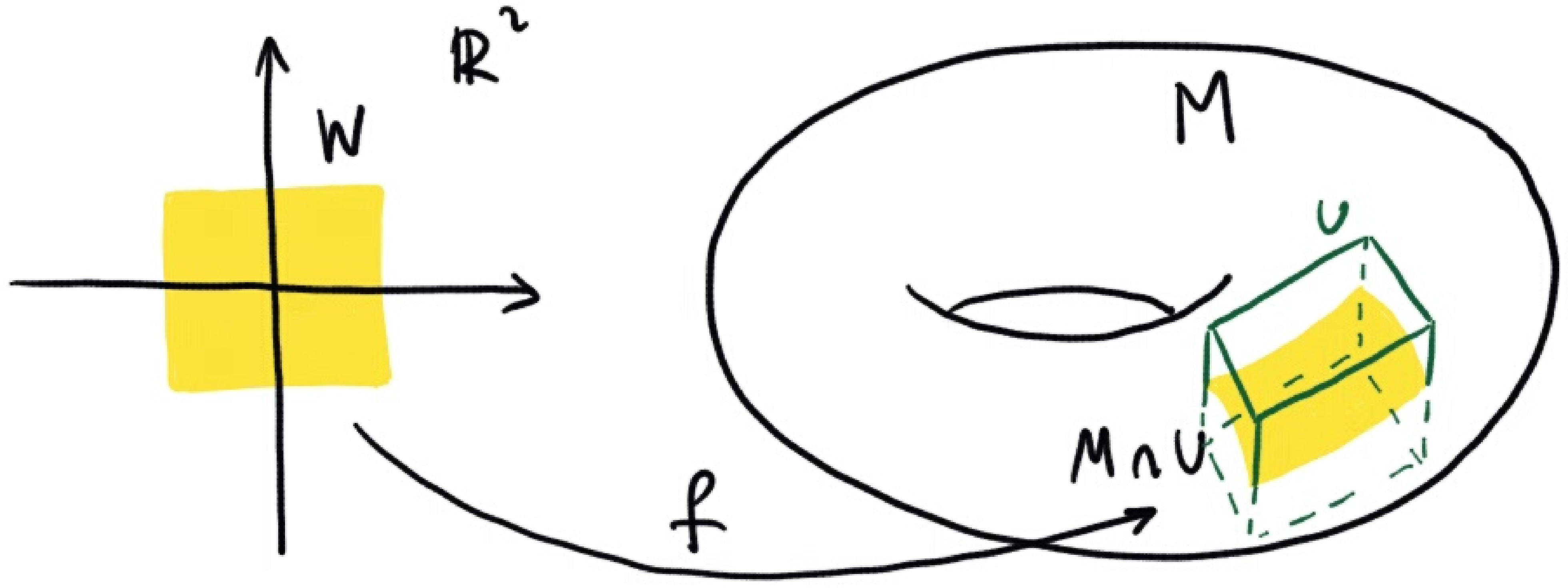
$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$ $g(x) = |x|^2 - 1$ $S^n = g^{-1}(0)$ $g'(x) = 2x$ $|x|^2 = 1$

$\Rightarrow g'(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} g'(x) = 1 \Rightarrow g^{-1}(0)$ jest n-wymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^{n+1}$

Tw. $M \subset \mathbb{R}^n$ jest k-wymiarową rozmaitością $\iff$

(**) $\forall\, x \in M \ \exists\, U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, $W \subset \mathbb{R}^k$ otwarty oraz funkcję $f : W \to \mathbb{R}^n$ 1-1 i gładka taka, że

(1) $f(W) = M \cap U$ (2) $f'(y)$ ma rząd k $\forall\, y \in W$ (3) $f^{-1} : f(W) \to W$ jest ciągła



f nazywamy układem współrzędnych w otoczeniu x lub parametryzacją M.

Dowód: $\Rightarrow$ Niech M będzie k-wymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^n$. Niech $h : U \to V$ spełniający warunek $(*)$. Niech $W = \{ a \in \mathbb{R}^k \mid (a,0) \in h(M) \}$ i $f : W \to \mathbb{R}^n$, $f(a) = h^{-1}(a,0)$. $f(W) = M \cap U$

f^{-1} jest ciągła. Określmy $H : U \ni x \mapsto (h^1(x), \dots, h^k(x)) \in \mathbb{R}^k$ $H(f(y)) = y$ $\forall\, y \in W$

$H'(f(y)) \cdot f'(y) = E$ i $f'(y)$ ma rząd k.

$\Leftarrow$ Niech $f : W \to \mathbb{R}^n$ spełnia $(**)$. Niech $x = f(y)$. Zał, że $\det \left[\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(y) \right]_{i,j=1,\dots,k} \neq 0$.

Określamy $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (a,b) \mapsto f(a) + (0,b) \in \mathbb{R}^n$.

$$g'(a,b) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial f^i}{\partial y_j}(a) & 0 \\ \hline & I \end{array} \right] \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \qquad \underbrace{}_{k} \ \underbrace{}_{n-k}$$

$$\det g'(a,b) = \det \left[\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(a) \right]_{i,j=1,\dots,k}$$

Stąd $\det g'(y,0) \neq 0$. Z tw. o lokalnym dyfeomorfizmie istnieją zbiory otwarte $V_1' \ni (y,0)$ i $V_2' \ni g(y,0)=x$ takie, że $g: V_1' \to V_2'$ jest lokalnym dyfeomorfizmem (tzn $h=(g|_{V_1'})^{-1}: V_2' \to V_1'$ jest gładka)

f^{-1} jest ciągła $\Rightarrow \exists\, U$ otwarty $\{f(a) \mid (a,0)\in V_1'\} = U\cap f(W)$. Niech $V_2 = V_2'\cap U$ i $V_1 = g^{-1}(V_2)$

wtedy $V_2\cap M = \{f(a)\mid (a,0)\in V_1\} = \{g(a,0)\mid (a,0)\in V_1\}$. Stąd

$$h(V_2\cap M) = g^{-1}(V_2\cap M) = g^{-1}(\{g(a,0)\mid (a,0)\in V_1\}) = V_1\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}) \ \blacksquare$$

$f_1: W_1\to\mathbb{R}^n$ i $f_2: W_2\to\mathbb{R}^n$ są dwoma układami współrzędnych, to $f_2^{-1}\circ f_1: f_1^{-1}(f_2(W_2)) \to \mathbb{R}^k$ jest gładkie i macierz Jacobiego ma wyznacznik niezerowy na całej dziedzinie złożenia.

Niech $H^k = \{x\in\mathbb{R}^k \mid x^k \geq 0\}$.

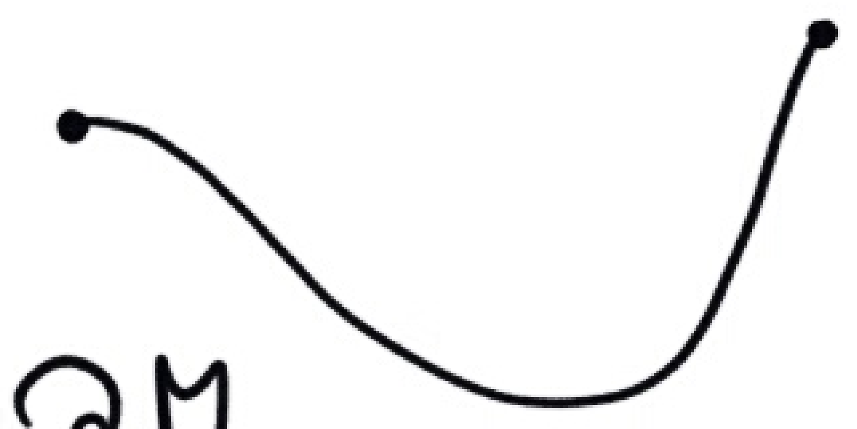
Def. Podzbiór $M\subset\mathbb{R}^n$ jest k-wymiarową rozmaitością z brzegiem, jeżeli $\forall\, x\in M$ spełniony jest warunek (*) albo następujący warunek (***):

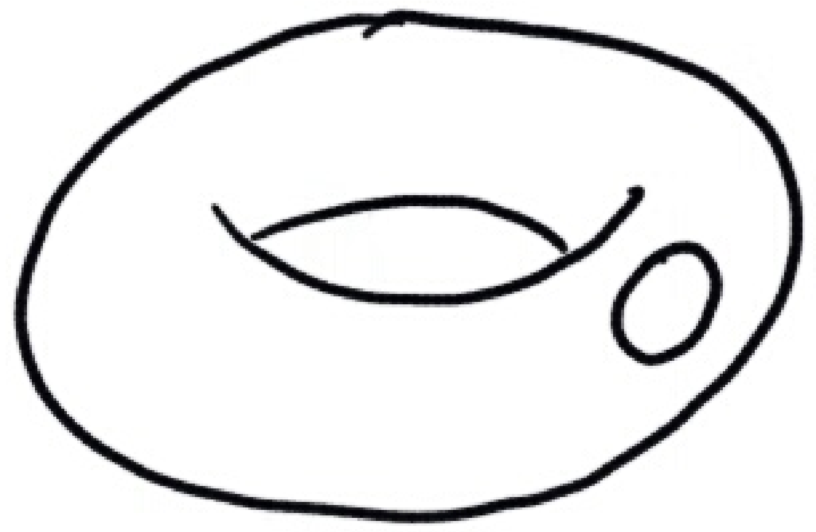
$\exists\, U$ otwarty $x\in U$ i $\exists\, V\subset\mathbb{R}^n$ otwarty i dyfeomorfizm $h: U\to V$ taki, że

$$h(U\cap M) = V\cap(H^k\times\{0\}) = \{y\in V \mid y^k\geq 0 \text{ i } y^{k+1}=\ldots=y^n=0\}$$

$$h(x) = (h^1(x),\ldots,h^{k-1}(x),0,\ldots,0)$$

Zbiór punktów M dla których jest spełniony (***) to brzeg M ozn. ∂M



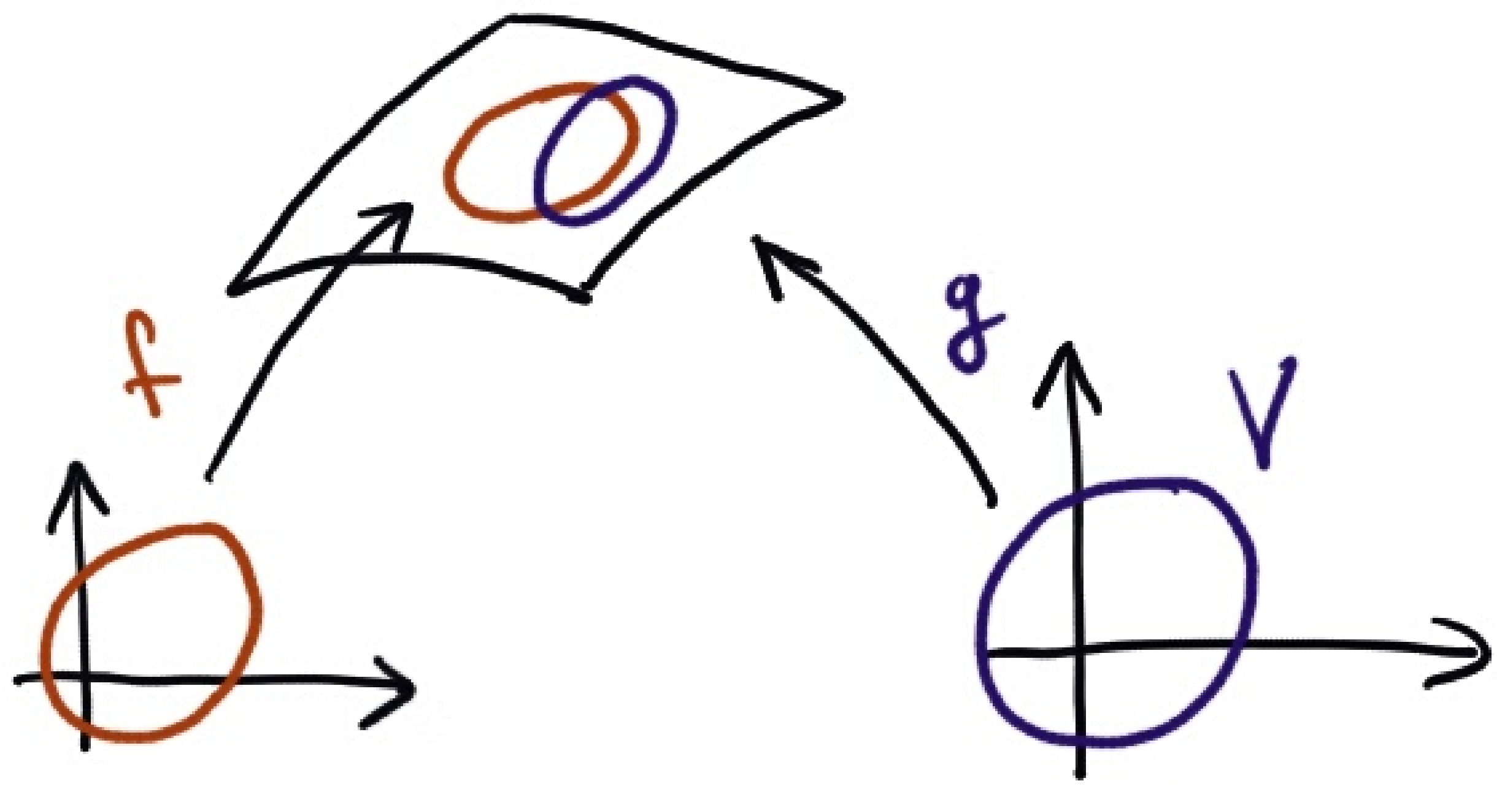


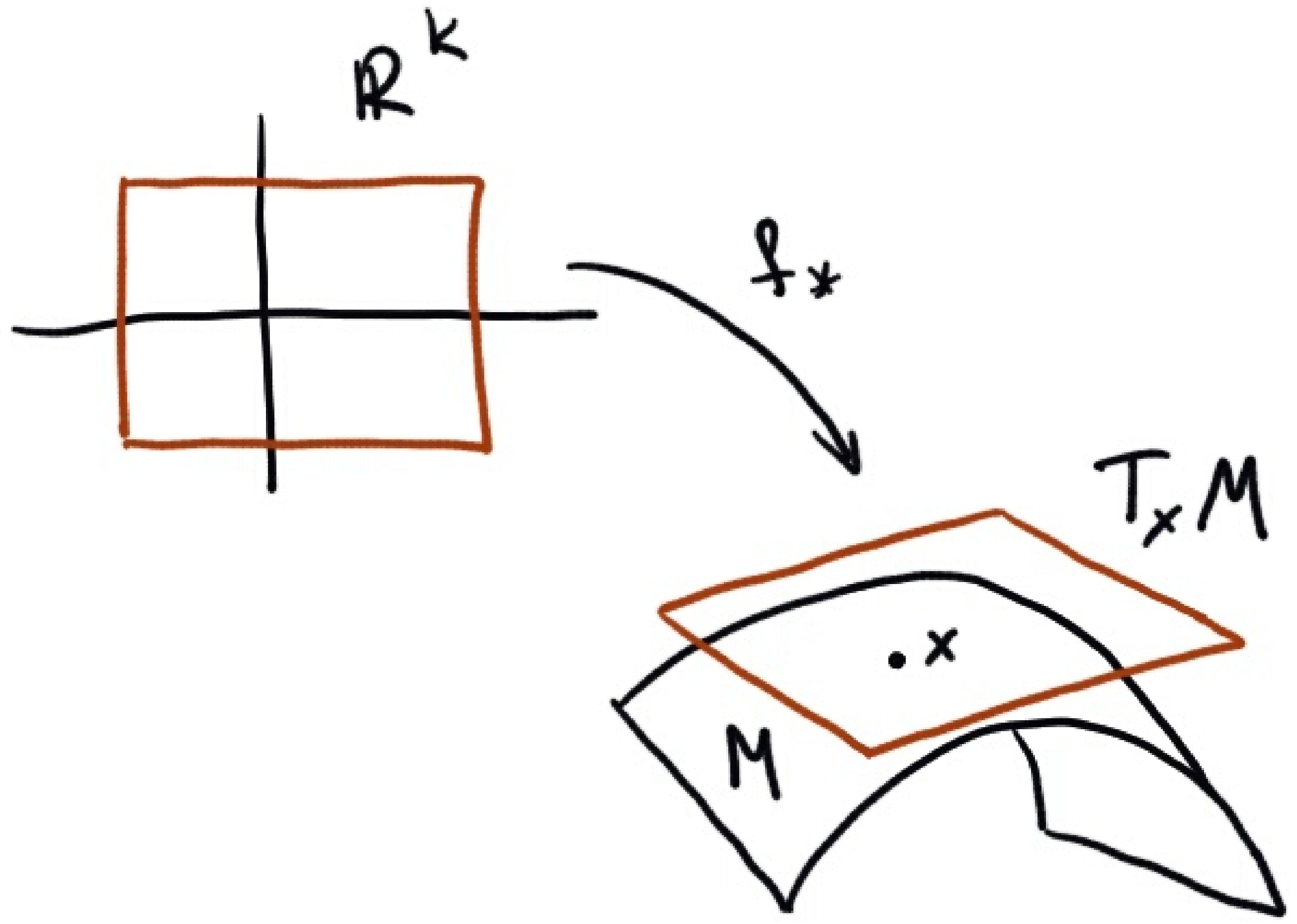
M - k-wymiarowa rozmaitość w $\mathbb{R}^n$, $f: W \to \mathbb{R}^n$ układ współrzędnych w otoczeniu $x = f(a)$. $f'(a)$ jest rzędu k

$f_*: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jest 1-1 i $f_*(\mathbb{R}^k)$ jest k-wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$

Jeśli $g: V \to \mathbb{R}^n$ jest innym układem współrzędnych, gdzie $x = g(b)$ to

$g_*(\mathbb{R}^k) = f_*(f^{-1}\circ g)_*(\mathbb{R}^k) = f_*(\mathbb{R}^k)$, gdyż $f^{-1}\circ g : V \cap g^{-1}(f(W)) \to W \cap f^{-1}(g(V))$ jest dyfeom.





$f_*(\mathbb{R}^k)$ nazywamy przestrzenią styczną do M w punkcie x i oznaczamy T_xM

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $M \subset A$. Niech F gładkie pole wektorowe na A takie, że $\forall x \in M$ $F(x) \in T_xM$

Jeżeli $f: W \to \mathbb{R}^n$ układ współrzędnych to $\exists!$ pole wektorowe G na W takie, że $f_*(G(a)) =$
$= F(f(a))$ $\forall a \in W$

Jeżeli $F: M \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\forall x \in M$ $F(x) \in T_xM$. $\exists!$ G na W takie, że $f_*(G(a)) =$
$= F(f(a))$ $\forall a \in W$.

F jest gładkie jeśli G jest gładkie.

$\omega : M \ni x \mapsto \omega|_x \in \Omega^p(T_x M)$ jest p-formą na M.

ω jest gładka jeśli $f^*\omega$ jest gładką p-formą na $\mathbb{R}^k$

Tw. $\forall\, \omega \in \Omega^p(M)$ $\exists!$ $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ taka, że $f^* d\omega = d(f^*\omega)$ dla $\forall$ układu współrzędnych $f : W \to \mathbb{R}^n$

Dowód.: $f : W \to \mathbb{R}^n$ układ współrzędnych w otoczeniu $x = f(a)$ i $v_1, \dots, v_{p+1} \in T_x M$. Wtedy $\exists!$ $w_1, \dots, w_{p+1} \in \mathbb{R}^k$ taki, że $f_*(w_i) = v_i$ dla $i = 1, \dots, p+1$. Określamy $d\omega|_x (v_1, \dots, v_{p+1}) \overset{def}{=} d(f^*\omega)|_a (w_1, \dots, w_{p+1})$. Def $d\omega$ nie zależy od wyboru f. ■

Orientację M: $f : W \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^n$ układy współrzędnych na M określają tę samą orientację jeżeli $\det(g^{-1} \circ f)' > 0$

Orientację brzegu ∂M $[n(x), w_1, \dots, w_{k-1}]$ - orientację M w $x \in \partial M$ taka, że $n(x)$ skierowany na zewnątrz, $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x \partial M$.