Wojciech Domitrz : Geometria form różniczkowych, wykład 5

M – rozmaitość z brzegiem, $\dim M = k$ $\quad \omega \in \Omega^p(M)$, c – singularna p-kostka w M.

Def.: $$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^* \omega$$

Niech $p = k$. Zał., że $\exists\, W$ otwarty w $\mathbb{R}^k$ taki, że $[0,1]^k \subset W$ i układ współrzędnych $f: W \to \mathbb{R}^m$ taki, że $c(x) = f(x)$ dla $x \in [0,1]^k$. Jeżeli M jest zorientowany i f zachowuje orientację to mówimy, że singularna k-kostka zachowuje orientację.

Tw. Zał. M – zorientowana k-wymiarowa rozmaitość, $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ singularne k-kostki zachowujące orientację, ω – k-forma na M taka, że $\omega|_x = 0$ dla $x \notin c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$

Teza $$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

$c_2^*(\omega) = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$

$g = c_2^{-1} \circ c_1$

Dowód: $$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega)$$, bo $\omega|_x = 0$ $\quad x \notin c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} g^*(f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} (f \circ g) \det g'\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} (f \circ g)\, |\det g'|\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$\left(\det g' = \det (c_2^{-1} \circ c_1)' > 0\right)$$

$$= \int_{[0,1]^k} f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega$$

$\blacksquare$

ω - k - forma na zorientowanej k - wymiarowej rozmaitości M.
$\exists\, c : [0,1]^k \to M$ singularna k - kostka zachowująca orientację taka, że $\omega|_x = 0 \quad \forall x \notin c([0,1]^k)$

to $\int_M \omega \overset{df}{=} \int_c \omega$. (definicja)

Na podstawie poprzedniego twierdzenia $\int_M \omega$ nie zależy od wyboru c t. że $\omega|_x = 0 \ \forall x \notin c([0,1]^k)$

Niech $\omega \in \Omega^k(M)$ dowolna, $\bigcup_{U \in \mathcal{O}} U = M$, gdzie $\forall U \in \mathcal{O}$ U otwarty w M $\forall U \in \mathcal{O}$ $\exists c : [0,1]^k \to M$

k - kostka singularna taka, że $U \subseteq c([0,1]^k)$

Niech Φ będzie różniczkowalnym rozkładem jedności dla pokrycia $\mathcal{O}$ tzn.

(*) $\forall \varphi \in \Phi \quad \varphi : M \to \mathbb{R}$ gładka $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U \quad \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi = 1 \quad \varphi \geq 0$. Wtedy definiujemy

Def. $\int_M \omega \overset{def}{=} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$. Zauważmy, że $(\varphi \cdot \omega)|_x = \varphi(x) \cdot \omega|_x = 0 \cdot \omega|_x = 0 \quad \forall x \notin U \subseteq c([0,1]^k)$

Definicja całki nie zależy od wyboru $\mathcal{O}$, ani Φ spełniającego (*)

Niech M będzie k-wymiarową rozmaitością z brzegiem i orientacją μ. Brzeg ∂M ma orientację indukowaną $\partial\mu$. Niech c będzie k-kostką singularną w M zachowującą orientację t. że $c_{(k,0)}$ leży na ∂M i żadna inna ściana c nie ma punktów wewnętrznych w ∂M.

$c_{(k,0)}$ zachowuje orientację jeśli k jest parzyste i nie zachowuje orientacji, jeżeli k jest nieparzyste

Niech $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ t. że $\forall x \notin c([0,1]^k)\ \omega|_x = 0 \left(\Rightarrow \forall x \in \partial c \setminus c_{(k,0)}([0,1]^{k-1}) \quad \omega|_x = 0 \right)$

Wtedy $\int_{c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega$ oraz $\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k,0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega$

Tw Stokesa. Jeżeli M jest zwartą, zorientowaną, k-wymiarową rozmaitością z brzegiem i $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ to $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, gdzie ∂M ma orientację indukowaną z M.

Dowód: zał, że $\exists\, c : [0,1]^k \to M \setminus \partial M$ k-singularna kostka zachowująca orientację t., że $\omega|_x = 0 \ \forall x \notin c([0,1]^k)$. Wtedy $\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$

oraz $\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0$, bo $\omega|_x = 0 \ \forall x \in \partial c$ i $\int_{\partial M} \omega = 0$, bo $\omega|_x = 0 \ \forall x \in \partial M$.

Stąd $\int_M d\omega = 0 = \int_{\partial M} \omega$.

Zał., że $\exists\, c : [0,1]^k \to M$ zachowująca orientację t., że jedyną ścianą w ∂M jest $c_{(k,0)}$

oraz $\forall x \notin c([0,1]^k) \quad \omega|_x = 0$. Wtedy $\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega$

Niech $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. $\exists\, \mathcal{O}$ pokrycie otwarte M i rozkład jedności $\underline{\Phi}$ zgodny z $\mathcal{O}$ t., że

$\forall \varphi \in \underline{\Phi} \quad \varphi \cdot \omega$ jest jednego z dwóch poprzednich rodzajów.

$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \varphi\right) = \sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} d\varphi$ Stąd $\sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} d\varphi \wedge \omega = 0$. M jest zwarte więc suma jest

skończona. $\sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0$. Stąd $\int_M d\omega \overset{\text{z def.}}{=} \sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \int_M \varphi \cdot d\omega = \sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \left(\int_M d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega \right) =$

$= \sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \int_M d(\varphi \cdot \omega) = \sum_{\varphi \in \underline{\Phi}} \int_M \varphi \cdot \omega = \int_{\partial M} \omega$. ∎