II forma podstawowa powierzchni

$p: D \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja regularna powierzchni S, $\nu: D \to \mathbb{R}^3$ jednostkowe pole normalne na S

Def. II forma podstawowa to $\mathrm{II} = -dp \cdot d\nu = -(p_u\,du + p_v\,dv)\cdot(\nu_u\,du + \nu_v\,dv)$

$\mathrm{II} = (-p_u \cdot \nu_u)\,du^2 + (-p_u \nu_v - p_v \cdot \nu_u)\,du\,dv + (-p_v \cdot \nu_v)\,dv^2$

$p_u, p_v \in T_{p(u,v)} S \Rightarrow p_u \cdot \nu = p_v \cdot \nu = 0$

$\frac{\partial}{\partial u}(p_u \cdot \nu) = p_{uu} \cdot \nu + p_u \cdot \nu_u = 0 \Rightarrow p_{uu} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_u$ Analogicznie $p_{vv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_v$

$\frac{\partial}{\partial u}(p_v \cdot \nu) = p_{uv} \cdot \nu + p_v \cdot \nu_u = 0 \Rightarrow p_{uv} \cdot \nu = -p_u \nu_v$ Analogicznie $p_{uv}\,\nu = -p_v \cdot \nu_u$

$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ gdzie $L = p_{uu} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_u$, $M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u = p_{uv} \cdot \nu$, $N = p_{vv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_v$

L, M, N to współczynniki II formy podstawowej

$\mathrm{II} = (du, dv)\ \hat{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ $\hat{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ to macierz II formy podstawowej

Jak zmienia się II forma podstawowa jeśli zmienimy układ współrzędnych?

$u = u(\xi, \eta)$ $v = v(\xi, \eta)$ $\tilde{L}(\xi, \eta) = -p_\xi \cdot \nu_\xi = -(p_u \cdot u_\xi + p_v \cdot v_\xi)\cdot(\nu_u \cdot u_\xi + \nu_v \cdot v_\xi) =$

$= -(p_u \cdot \nu_u) u_\xi^2 - (p_u \cdot \nu_v + p_v \cdot \nu_u) u_\xi \cdot v_\xi - (p_v \cdot \nu_v) v_\xi^2 = L u_\xi^2 + 2M u_\xi v_\xi + N v_\xi^2$ Analogicznie otrzymujemy

$\tilde{M} = -p_\xi \nu_\eta = L u_\xi u_\eta + M(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + N v_\xi v_\eta$, $\tilde{N} = -p_\eta \cdot \nu_\eta = L u_\eta^2 + 2M u_\eta v_\eta + N v_\eta^2$ Stąd

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

Zdefiniujmy $A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ Wtedy $A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$

Wtedy $\tilde{A} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$

Wartości własne $\tilde{A}$ i A są takie same.

Lemat 1 $A^T = A$ $\det A \neq 0 \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$ Dowód.: $A^{-1}A = I \,/ ()^T$ $(A^{-1} \cdot A)^T = I^T \Rightarrow A^T \cdot (A^{-1})^T = I$

$A(A^{-1})^T = I \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$

Lemat 2. $A \in M_2(\mathbb{R})$ i $A^T = A$ $\Rightarrow$ Wartości własne A są rzeczywiste

Dowód: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)$

$$\Delta = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 =$$

$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$ czyli wartości własne A są rzeczywiste $\square$

Lemat 3. zał. $A \in M_2(\mathbb{R})$ $A^T = A$ λ - wartość własna $e := \binom{x}{y}$ wektor własny λ.

Teza $n := \binom{-y}{x}$ wektor własny wartości własnej $\mu = a_{11} + a_{22} - \lambda$ i $\measuredangle(e, n) = \frac{\pi}{2}$

Jeśli $|e| = 1$ to $P(e, n)$ is orthogonal, $\det P = 1$. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Dowód.: $A\binom{x}{y} = \lambda \binom{x}{y}$ $\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{12}x + a_{22}y = \lambda y \end{matrix}$ $\begin{matrix} -a_{11}y + a_{12}x = -a_{11}y - a_{22}y + \lambda y \\ -a_{12}y + a_{22}x = a_{11}x + a_{22}x - \lambda x \end{matrix}$ $e \cdot n = 0$ $\blacksquare$

$|e| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow |n| = \sqrt{(-y)^2+x^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |e| = 1$ $e \cdot n = 1$

$\det P = \det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = 1$ $A \cdot P = A \cdot (e, n) = (Ae, An) = (\lambda e, \mu n) = \begin{pmatrix} \lambda x & -\mu y \\ \lambda y & \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x ; & -\mu y \\ \lambda y ; & \mu x \end{pmatrix}$

$= P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

Lemat 4. Zał. $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ $A^T = A$ $B^T = B$ Wartości własne A dodatnie

Teza Wartości własne AB rzeczywiste.

Dowód.: $P^{-1}ABP = P^{-1}AP\,P^{-1}BP = \begin{pmatrix}\lambda, 0\\ 0, \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}, b_{12}\\ b_{12}, b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda b_{11}, \lambda b_{12}\\ \mu b_{12}, \mu b_{22}\end{pmatrix}$ $\left|\begin{pmatrix}\lambda b_{11} - t, & \lambda b_{12}\\ \mu b_{12}, & \mu b_{22} - t\end{pmatrix}\right| = t^2 - (\lambda b_{11} + \mu b_{22})t - \lambda\mu b_{12}^2$

$\Delta = (\lambda b_{11} + \mu b_{22})^2 + 4\lambda\mu b_{12}^2 > 0$ dla $\lambda, \mu > 0$

Wartości własne $P^{-1}ABP$ rzeczywiste $\Rightarrow$ Wart. własne $A \cdot B$ rzeczywiste.

Lemat.5 $A^T = A$ Wartości własne A są dodatnie $\Rightarrow$ Wartości A^{-1} są dodatnie.

Dowód. $\exists\, P \in M_2(\mathbb{R})$ $P^T = P^{-1}$ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ $(P^{-1}AP)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu}\end{pmatrix}$ $P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu}\end{pmatrix}$

Wartości A^{-1} to $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu} > 0$ ∎

$A := \hat{I}^{-1} \cdot \hat{II} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$ to operator kształtu (macierz Weintargena)

Tw. Wartości własne A są rzeczywiste. Wartości własne nazywamy krzywiznami głównymi.

Dowód.: $\hat{I}^T = \hat{I}$ oraz wartości własne są dodatnie z Lematu 5 wartości własne $\hat{I}^{-1}$ są dodatnie. Z Lematu 4 wartości własne $A = \hat{I}^{-1}\hat{II}$ są rzeczywiste ∎

Tw. Krzywizny główne są niezmiennicze ze względu na zmianę układu współrzędnych.

Dowód.: $\tilde{A} = (P^T\hat{I}P)^{-1}P^T\hat{II}P = P^{-1}\hat{I}^{-1}(P^T)^{-1}P^T\hat{II}P = P^{-1}\hat{I}^{-1}\hat{II}P = P^{-1}AP$

Macierze A, $P^{-1}AP$ mają te same wartości własne ∎

Niech λ_1, λ_2 to krzywizny główne

Def. Krzywizną Gaussa nazywamy $K = \det A = \lambda_1\lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Def. Krzywizną średnią nazywamy $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$

Tw. $p : D \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja regularna powierzchni. $\nu : D \to \mathbb{R}^3$ ustalone pole normalne do powierzchni.

Wtedy krzywizna Gaussa i średnia są niezmiennicze ze względu na zmianę układu współrzędnych.

Dowód.: Wniosek z poprzedniego tw. o niezmienniczości krzywizn głównych. $\blacksquare$

Przykład.: płaszczyzna $z=0$ $\quad p(u,v) = (u,v,0)$ $\quad \nu(u,v) = (0,0,1)$ $\quad ds^2 = dp \cdot dp = du^2 + dv^2$ $\quad \mathrm{II} = -dp \cdot d\nu =$

$= 0 \Rightarrow A = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad K = 0 \quad H = 0$ zachodzi też $K = H = 0 \Rightarrow$ powierzchnia jest częścią płaszczyzny

Przykład 2 Walec o promieniu 1. $p(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ $\quad \nu(u,v) = (\cos u, \sin u, 0)$

$$ds^2 = dp \cdot dp = ((-\sin u, \cos u, 0)\,du + (0,0,1)\,dv) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)\,du + (0,0,1)\,dv = du^2 + dv^2 \qquad \mathrm{II} = -dp \cdot d\nu =$$

$$= -((-\sin u, \cos u, 0)\,du + (0,0,1)\,dv) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)\,du = -(\sin^2 u + \cos^2 u)\,du^2 = -du^2$$

$$\hat{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathrm{I}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = (-1) \cdot 0 = 0$$

$H = \frac{1}{2}(-1 + 0) = -\frac{1}{2}$. Stąd sama K nie determinuje kształtu powierzchni. $\blacksquare$

Przykład 3. Sfera $\quad p(u,v) = a(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ $\quad u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\quad v \in [0, 2\pi)$ $\quad \nu(u,v) = -\frac{1}{a} p(u,v)$

$$\mathrm{II} = -dp \cdot d\nu = \frac{1}{a} dp \cdot dp = \frac{1}{a} ds^2 \qquad A = \hat{\mathrm{I}}^{-1} \hat{\mathrm{II}} = \hat{\mathrm{I}}^{-1} \cdot \frac{1}{a} \hat{\mathrm{I}} = \frac{1}{a} I_2 \qquad K = \frac{1}{a^2} \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

Tw. (wzór Weingartena) $p : D \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja regularna powierzchni. Wtedy $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v) A$ i ν_u, ν_v l. zal. $\Leftrightarrow K = 0$.

Dowód.: $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(C^\infty(D))$, $a \cdot b = a^T b$, $P_1 := (p_u, p_v, \nu)$, $P_2 := (\nu_u, \nu_v, \nu) \in M_{3\times3}(C^\infty(D))$

$$P_1^T P_1 = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{I}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{O}^T = (0, 0) \quad -P_1^T P_2 = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{II}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & -1 \end{pmatrix}$$

$$-P_1^{-1} P_2 = -(P_1^T P_1)^{-1} P_1^T P_2 = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{I}}^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{II}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{I}}^{-1} \mathrm{II} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & -1 \end{pmatrix} \quad (\nu_u, \nu_v, \nu) = P_2 = -P_1 \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{I}}^{-1}\hat{\mathrm{II}}, & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & ,-1 \end{pmatrix} = -(p_u, p_v, \nu) \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & -1 \end{pmatrix}$$

Stąd $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v) A$ $\quad \operatorname{rank}(\nu_u, \nu_v) = 1 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow K = 0$ $\blacksquare$

$\operatorname{rank}(p_u, p_v) = 2$

Stw. Krzywizna Gaussa i wartość bezwzględna średniej krzywizny H są niezmiennikami izometrii.

Dowód.: $p : D \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja regularna powierzchni $\tilde{p} = Tp + c$ - izometria $T^T = T^{-1}$ (T macierz ortogonalna), $c \in \mathbb{R}^3$

Wtedy $\tilde{p}_u = Tp_u$ $\tilde{p}_v = Tp_v$ $\tilde{p}_{uu} = Tp_{uu}$ $\tilde{p}_{uv} = Tp_{uv}$ $\tilde{p}_{vv} = Tp_{vv}$ $\tilde{\nu} := T\nu$ jest polem normalnym do powierzchni $\tilde{p} : D \to \mathbb{R}^3$

$\tilde{p}_x \cdot \tilde{p}_y = Tp_x \cdot Tp_y = p_x \cdot p_y$ dla $x, y \in \{u, v\}$ czyli $\tilde{L} = L$ $\tilde{M} = M$ $\tilde{N} = N$

$\tilde{\nu}_x \cdot \tilde{p}_y = T\nu_x \cdot Tp_y = \nu_x \cdot p_y$ $\tilde{E} = E$ $\tilde{F} = F$ $\tilde{G} = G$

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{L}\tilde{N} - \tilde{M}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$ analogicznie dla $|H|$

Def. S - powierzchnia regularna. $p \in S$

Punkt p jest eliptyczny jeśli $K(p) > 0$, p jest paraboliczny jeśli $K(p) = 0$,

p jest hiperboliczny jeśli $K(p) < 0$.

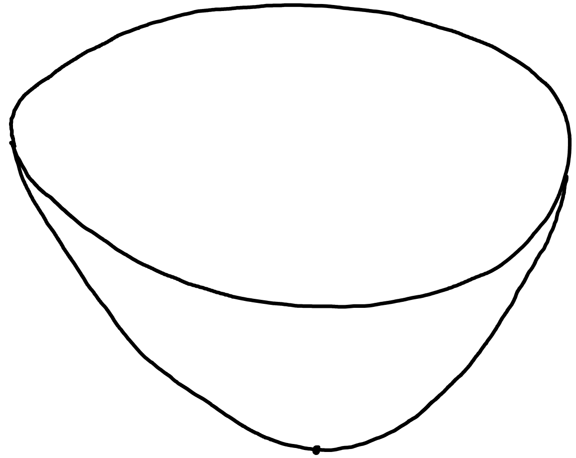
Lemat. $S = \text{graph } f$ to $K = \dfrac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$

Dowód.: $p(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $p_x \times p_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$ $\nu = \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$

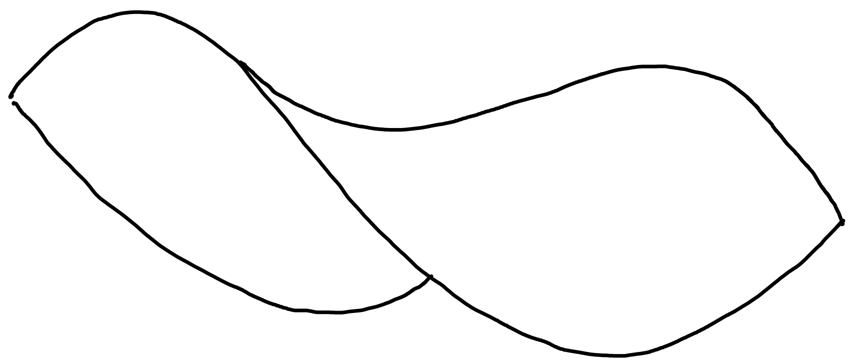
$L = p_{xx} \cdot \nu = (0, 0, f_{xx}) \cdot \nu = \dfrac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$ $M = \dfrac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$ $N = \dfrac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$

$E = \tilde{p}_x \cdot \tilde{p}_x = (1, 0, f_x) \cdot (1, 0, f_x) = 1 + f_x^2$ $G = p_y \cdot p_y = 1 + f_y^2$ $F = \tilde{p}_x \cdot \tilde{p}_y = f_x f_y$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2} \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)} = \frac{f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \quad \blacksquare$$



Powierzchnia w otoczeniu punktu eliptycznego



Powierzchnia w otoczeniu punktu hiperbolicznego.

Tw. Krzywizny główne w każdym punkcie powierzchni regularnej są liczbami rzeczywistymi. W otoczeniu punktu eliptycznego powierzchnia jest wypukła. W otoczeniu punktu hiperbolicznego powierzchnia ma kształt powierzchni siodłowej

Dowód: $P \in S$ ustalony. Można założyć, że $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ oraz, że $T_0 S = \{z = 0\}$

Translacją i obrotem możemy przeprowadzić P na 0 oraz $T_0 S$ na $\{z = 0\}$

Niech $p : D \to \mathbb{R}^3$ będzie parametryzacją S. $p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Niech $\varphi(u,v) := (x(u,v), y(u,v))$ - złożenie p z rzutem $\pi : \mathbb{R}^3 \to \{z=0\}$. $P = (0,0,0) = p(u_0, v_0)$

Wtedy $p_u(u_0,v_0) = (x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), 0) = (\varphi_u(u_0,v_0), \quad \in \{z = 0\}$

$p_v(u_0,v_0) = (x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), 0) = (\varphi_v(u_0,v_0), 0 \quad \in \{z = 0\}$

p - parametryzacja regularna powierzchni $\Rightarrow$ p_u i p_v są l. niezal. $\Rightarrow$ $\varphi_u(u_0,v_0)$, $\varphi_v(u_0,v_0)$ l. niezal.

Stąd z Tw. o lok. dyfeo. $\exists$ $\psi = \psi(x,y)$ na pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^2$ odwrotna do φ.

$\tilde{p} = (p \circ \psi)(x,y) = ((\varphi \circ \psi)(x,y), (z \circ \psi)(x,y)) = (x, y, z(\psi(x,y)))$ Niech $f(x,z) = z(\psi(x,y))$

Wtedy we współrzędnych (x,y) przedstawiamy powierzchnię S jako wykres funkcji f

$S = \text{graph } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D_\psi, \ z = f(x,y)\}$ oraz $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Stąd $E(0,0) = G(0,0) = 1$ $F(0,0) = 0$ $\hat{I}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A|_{(0,0)} = \hat{I}|^{-1}_{(0,0)} \hat{II}|_{(0,0)} = \hat{II}|_{(0,0)}$

$A|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} L(0,0) & M(0,0) \\ M(0,0) & N(0,0) \end{pmatrix}$ - symetryczna $\Rightarrow$ wart. wł. są rzeczywiste.

Ze wzoru Taylora $z = f(x,y) = \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) + o(x^2+y^2)$

czyli powierzchnię można aproksymować przez $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ gdzie $a := f_{xx}(0,0)$

$b := f_{xy}(0,0)$, $c := f_{yy}(0,0)$ w otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{R}^3$

Jeśli $a = c = 0$ i $b \neq 0$ to $z = bxy$ (siodło)

W p.p. zał, że $a \neq 0$ ($c \neq 0$ przypadek symetryczny $x \leftrightarrow y$)

Wtedy $z = \frac{1}{2}\left[a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)y^2\right]$

Jeśli $ac - b^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ i $a > 0$ (odp. $a < 0$) to $\text{graph } f \subset \{z \geq 0\}$ (odp. $\{z \leq 0\}$)

czyli wypukły w $(0,0)$.

Jeśli $ac - b^2 < 0$ to graph f ma kształt siodła. Z lematu $K = \dfrac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$ co kończy dowód.