

Geometria różniczkowa Wojciech Domitrow

Def. Krzywą parametryczną nazywamy gładkie przekształcenie $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie I przedział

Krzywa γ jest regularna jeśli $\forall t \in I \quad \gamma'(t) \neq 0$

Def. Krzywe parametryczne $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ różnią się co najwyżej parametryzacją jeśli istnieje dyfeomorfizm gładki $\varphi: I \rightarrow \tilde{I}$ taki, że $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Jest to relacja równoważności. Klasę abstrakcji tej relacji nazywamy krzywą niesparametryzowaną.

Długość krzywej γ na przedziale $[a, b] \subset I$ jest dana wzorem $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_i(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$ gdzie $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Stw. Długość krzywej nie zależy od parametryzacji.

Dowód: $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |(\tilde{\gamma} \circ \varphi)'(t)| dt = \int_a^b |\tilde{\gamma}'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |\tilde{\gamma}'(s)| ds$, gdzie $s = \varphi(t)$ oraz $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, gdzie $\varphi: [a, b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$ dyfeomorfizm zachowujący orientację lub $\varphi: [a, b] \rightarrow [\varphi(b), \varphi(a)]$ niezachowujący

$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du$ - parametr długości krzywej na $[a, t]$, $\tilde{\gamma}(s)$ - krzywa sparametryzowana długością łuku.

Stąd wynika, że $\tilde{\gamma}(s(t)) = \gamma(t)$ $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t)) |\dot{\gamma}(t)| = \dot{\gamma}(t) \Rightarrow \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \Rightarrow \left| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s) \right| = 1$

Stw. Każdą krzywą regularną można sparametryzować długością łuku.

Stw. Jeżeli krzywe γ i $\gamma \circ \varphi$ są sparametryzowane długością łuku to $\varphi(t) = \pm t + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$

Dowód: $|\dot{\gamma}(s)| = 1 = |(\gamma \circ \varphi)'(t)| = |\dot{\gamma}(s)| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)| \Rightarrow \varphi'(t) = \pm 1 \Rightarrow \varphi(t) = \pm t + c$.

Przykład. Krzywa śrubowa $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ $t \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $b \neq 0$.

$\gamma'(t) = [-a \sin t, a \cos t, b]$ $|\gamma'(t)| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ $s = \varphi(t) = \int_0^t (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} d\tau = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} t$ $t = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} s$

$\tilde{\gamma}'(s) = (\gamma \circ \varphi^{-1})'(s) = (a \cos((a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} s), a \sin((a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} s), (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} b s)$

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krzywa gładka

$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du$ - parametr długości krzywej na $[a, t]$, $\gamma(s)$ - krzywa sparametryzowana długością łuku

$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$ $e(s) := \gamma'(s) = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ - jednostkowy wektor styczny, $e(s) \cdot e(s) = 1$ / $\frac{d}{ds} e'(s) \cdot e(s) = 0 \Rightarrow e'(s) \perp e(s)$

$e'(s) \neq 0$ $n(s) := \frac{e'(s)}{|e'(s)|}$ - wektor normalny $|n(s)| = 1$ $n(s) \perp e(s)$

Def. Krzywiznę $\gamma(s)$ nazywamy $\kappa(s) := |e'(s)|$. Jeśli $e'(s) = 0$ to $\kappa(s) = 0$.

Jeśli $\gamma''(s) = e'(s) = 0$ to wektor normalny nie jest dobrze zdefiniowany

Zat., że $\forall s \in I$ $\gamma''(s) \neq 0$. Wtedy $e'(s) = \kappa(s)$ ($\kappa(s) > 0$). Wektory e i n są ortogonalne

$e \cdot e = 1$ $n \cdot n = 1$ $e \cdot n = 0$. Wektor $b(s) := e(s) \times n(s)$ nazywamy binormalnym.

$b \cdot e = 0$ $b \cdot n = 0$ $n \cdot n = 1$ Stąd $\{e(s), n(s), b(s)\}$ jest dodatnio zorientowanym reperelem.

$$\det(e(s), n(s), b(s)) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = b_1 \cdot \det \begin{bmatrix} e_2 & e_3 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix} + b_2 (-1) \det \begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ n_1 & n_3 \end{bmatrix} + b_3 \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}$$

$$b(s) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \vec{i} = [1, 0, 0], \vec{j} = [0, 1, 0], \vec{k} = [0, 0, 1]$$

$$\text{Stąd } b_1 = \det \begin{bmatrix} e_2 & e_3 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad b_2 = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ n_1 & n_3 \end{bmatrix} \quad b_3 = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz}$$

$$\det(e(s), n(s), b(s)) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b \cdot b = 1$$

Def. Płaszczyzna ściśle styczna to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \text{span} \{e(s), n(s)\}$.

Płaszczyzna normalna to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \text{span} \{n(s), b(s)\}$.

Płaszczyzna prostująca to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \text{span} \{e(s), b(s)\}$.

Def. Torsję (skręceniem) krzywej γ w punkcie $\gamma(s)$ nazywamy $\tau(s) = -b'(s) \cdot n(s)$.

Torsja mierzy jak szybko krzywa oddala się od płaszczyzny ściśle stycznej.

$$n'(s) = (n' \cdot e)e + (n' \cdot n)n + (n' \cdot b)b \quad n \cdot e = 0 \quad n' \cdot e + n \cdot e' = 0$$

$$n' \cdot e = -n \cdot e' = -n \cdot (\kappa n) = -\kappa (n \cdot n) = -\kappa$$

$$n \cdot n = 1 \quad n' \cdot n + n \cdot n' = 0 \quad 2 \cdot (n' \cdot n) = 0 \quad n' \cdot n = 0$$

$$n \cdot b = 0 \quad n' \cdot b + n \cdot b' = 0 \quad n' \cdot b = -n \cdot b' = -b' \cdot n = \tau$$

$$n' = -\kappa e + \tau b$$

$$b' = (b' \cdot e)e + (b' \cdot n)n + (b' \cdot b)b$$

$$(b \cdot e) = 1 \quad b' \cdot e + b \cdot e' = 0 \quad b' \cdot e = -b \cdot e' = -b \cdot (\kappa n) = -\kappa (b \cdot n) = 0$$

$$b' \cdot n = -\tau \quad b \cdot b = 1 \Rightarrow b' \cdot b = 0$$

$$\begin{cases} e'(s) = & \kappa(s) n(s) \\ n'(s) = -\kappa(s) e(s) & + \tau(s) b(s) \\ b'(s) = & -\tau(s) n(s) \end{cases} \quad \text{wzór Freneta - Serreta}$$

$$\mathcal{F}(s) := (e(s), n(s), b(s))^T \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \Omega \cdot \mathcal{F}$$

$p_0 \in \mathbb{R}^3$ punkt $v \in \mathbb{R}^3$ wektor $v \neq 0$

$p(t) = p_0 + tv$ $t \in \mathbb{R}$ prosta $p(s) = p_0 + s \frac{v}{|v|}$ $s \in \mathbb{R}$ - parametryzacja Tulkowa prostej

Tw. Krzywa jest zawarta w prostej $\Leftrightarrow \kappa \equiv 0$

Dowód.: $\Rightarrow p(s) = p_0 + sv$ $s \in I$ $|v| = 1$ $e(s) = p'(s) = v$ $e'(s) = 0 \Rightarrow \kappa = 0$

$\Leftarrow \forall s \in I \kappa(s) = 0 \Rightarrow \forall s \in I |e'(s)| = 0 \Rightarrow \forall s \in I e'(s) = 0 \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 e(s) \equiv v$

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^s v dt \quad \gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)v = (\gamma(s_0) - s_0 v) + s \cdot v - \text{prosta.}$$

Def. Krzywa jest płaska jeśli jest zamknięta w pewnej płaszczyźnie afinicznej

Tw. Krzywa jest płaska $\Leftrightarrow \kappa \equiv 0$

Dowód. Płaskość krzywej nie zależy od parametryzacji. Niech $s \mapsto \gamma(s)$ parametryzacja Tulkowa

$\Rightarrow \gamma(I) \subset \Pi$ - płaszczyzna afiniczna

$$\Pi: (x - p) \cdot v = 0 \quad \|v\| = 1 \quad v \perp \Pi \quad (\gamma(s) - p) \cdot v = 0 \quad / \frac{d}{ds}$$

$$\gamma'(s) \cdot v = 0 \quad e(s) \cdot v = 0 \quad (\kappa(s) n(s)) \cdot v = 0 \quad \text{ i } \kappa(s) > 0 \Rightarrow n(s) \cdot v = 0$$

$$e(s) \perp v \quad \text{ i } \quad n(s) \perp v \Rightarrow e(s) \times n(s) \parallel v \quad b(s) \parallel v \quad \forall s \in I$$

$$|b(s)| = 1 \quad b(s) = \text{const.} \quad (b(s) = v \quad \text{ lub } \quad b(s) = -v) \quad b'(s) = 0 \Rightarrow \kappa(s) = 0$$

$$\Leftarrow \kappa \equiv 0 \Rightarrow b'(s) = -\kappa(s)n(s) = 0 \quad b'(s) \equiv 0 \quad b(s) = b = \text{const.}$$

$$\text{Niech } h(s) = (\gamma(s) - \gamma(0)) \cdot b \quad h'(s) = \gamma'(s) \cdot b = e(s) \cdot b \equiv 0$$

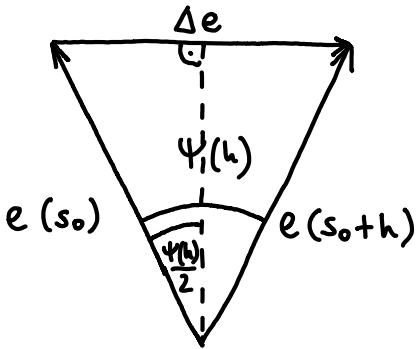
$$h(s) \equiv \text{const} \quad h(0) = (\gamma(0) - \gamma(0)) \cdot b = 0 \Rightarrow h(s) = (\gamma(s) - \gamma(0)) \cdot b \equiv 0$$

$$\text{czyli } \gamma(I) \subset \Pi: (\gamma(s) - \gamma(0)) \cdot b = 0$$

Interpretacja geometryczna krzywizny κ

Oznaczmy przez $N_{\gamma(s_0)} = \gamma(s_0) + \text{span} \{n(s_0), b(s_0)\}$ płaszczyznę normalną do γ w s_0

$e(s_0) \perp N_{\gamma(s_0)} \Rightarrow$ kąt między $N_{\gamma(s_0)}$ i $N_{\gamma(s_0+h)}$ $\angle(N_{\gamma(s_0)}, N_{\gamma(s_0+h)}) = \angle(e(s_0), e(s_0+h)) = \psi(h)$



$$\Delta e = e(s_0+h) - e(s_0) \quad \frac{\frac{1}{2}|\Delta e|}{|e(s_0)|} = \sin \frac{1}{2} \psi(h) \quad |\Delta e| = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \psi(h)\right)$$

$$|b(s_0)| = |b(s_0+h)| = 1$$

$$\psi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(h)}{\sin \psi(h)} \right) \frac{\sin \psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\sin(\psi(h))} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \psi(h)}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\psi(h))}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \psi(h) \cos \frac{1}{2} \psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2} \psi(h))}{|h|} \lim_{h \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{2} \psi(h)) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2} \psi(h))}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Delta e|}{|h|} = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(s_0+h) - e(s_0)}{h} \right| = |e'(s_0)|$$

$$e'(s_0) = \kappa(s_0) \cdot n(s_0) \quad |e'(s_0)| = |\kappa(s_0) n(s_0)| = \kappa(s_0)$$

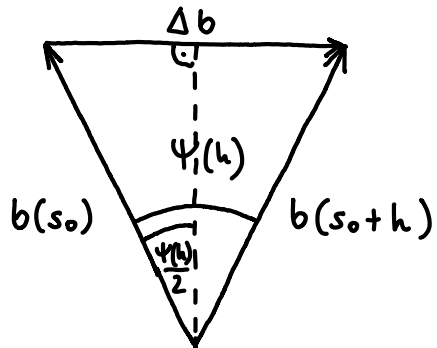
$$\psi'(0) = \kappa(s_0)$$

Krzywizna to szybkość zmiany kąta między płaszczyznami normalnymi (wektorami stycznymi)

Interpretacja geometryczna torsji (skręcenia) τ

Oznaczmy przez $T_{\gamma(s_0)} = \gamma(s_0) + \text{span} \{e(s_0), n(s_0)\}$ płaszczyznę ściśle stykającą do γ w s_0

$b(s_0) \perp T_{\gamma(s_0)} \Rightarrow$ kąt między $T_{\gamma(s_0)}$ i $T_{\gamma(s_0+h)}$ $\angle(T_{\gamma(s_0)}, T_{\gamma(s_0+h)}) = \angle(b(s_0), b(s_0+h)) = \psi(h)$



$$\Delta b = b(s_0+h) - b(s_0) \quad \frac{\frac{1}{2}|\Delta b|}{|b(s_0)|} = \sin \frac{1}{2} \psi(h) \quad |\Delta b| = 2 \sin \frac{1}{2} \psi(h)$$

$$|b(s_0)| = |b(s_0+h)| = 1$$

$$\nearrow 1$$

$$\psi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(h)}{\sin \psi(h)} \right) \frac{\sin \psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\sin \psi(h)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \psi(h)}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\psi(h))}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \psi(h) \cos \frac{1}{2} \psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \psi(h)}{|h|} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{2} \psi(h) \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \psi(h) \right)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Delta b|}{|h|} = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(s_0+h) - b(s_0)}{h} \right| = |b'(s_0)|$$

$$b'(s_0) = -\tau(s_0) \cdot n(s_0) \quad |b'(s_0)| = |-\tau(s_0) n(s_0)| = |\tau(s_0)|$$

$$\psi'(0) = |\tau(s_0)|$$

Wartość bezwzględna torsji to szybkość zmiany kąta między płaszczyznami ściśle st stycznymi (wektorami binormalnymi)

Wzory dla dowolnej parametryzacji $t \mapsto \gamma(t)$

$$e = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \quad b = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \quad n = b \times e = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}| |\dot{\gamma}|} \quad \kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}'(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

Dowód: $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s(t))$ $\tilde{\gamma}(s)$ - parametryzacja Freneta o zwrocie zgodnym z parametryzacją $\gamma(t)$. $(\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot), (\cdot)' = \frac{d}{ds}(\cdot)$

$$\dot{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = \dot{s}(t) \cdot e(s(t)) \quad \ddot{\gamma}(t) = \ddot{s}(t) \cdot e(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 e'(s(t)) = \ddot{s}(t) \cdot e(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 \kappa(s(t)) n(s(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \dot{s}(t) e(s(t)) \times (\ddot{s}(t) e(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 \kappa(s(t)) n(s(t))) = (\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) b(s(t))$$

$$|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)| = (\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) \quad (\dot{s}(t) > 0) \quad |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{s}(t) e(s(t))| = \dot{s}(t) |e(s(t))| = \dot{s}(t)$$

$$\kappa(s(t)) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{(\dot{s}(t))^3} = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|} = \frac{(\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) b(s(t))}{(\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t))} = b(s(t))$$

$$\ddot{\gamma}'(t) = \ddot{s}(t) e(s(t)) + \dot{s}(t) \dot{s}(t) e'(s(t)) + 2(\dot{s}(t)) \ddot{s}(t) \kappa(s(t)) n(s(t)) + (\dot{s}(t))^3 \kappa'(s(t)) n(s(t)) +$$

$$+ (\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) n'(s(t)) = \ddot{s}(t) e(s(t)) + \dot{s}(t) \dot{s}(t) \kappa(s(t)) n(s(t)) + 2(\dot{s}(t) \ddot{s}(t)) n(s(t)) +$$

$$+ (\dot{s}(t))^3 \kappa'(s(t)) n(s(t)) - (\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) (-\kappa(s(t)) e(s(t)) + \tau(s(t)) b(s(t)))$$

$$\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}'(t)) = \det(\dot{s}(t) e(s(t)), (\dot{s}(t))^2 \kappa(s(t)) n(s(t)), (\dot{s}(t))^3 \kappa(s(t)) \tau(s(t)) b(s(t))) =$$

$$= (\dot{s}(t))^6 \kappa(s(t))^2 \tau(s(t)) \det(e(s(t)), n(s(t)), b(s(t))) = (\dot{s}(t))^6 (\kappa(s(t)))^2 \tau(s(t))$$

$$|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2 = (\dot{s}(t))^6 \kappa^2(s(t)) \quad \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}'(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2} = \tau(s(t))$$

Uwaga $\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}'(t)) = (\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot \ddot{\gamma}'(t)$

$$x, y \in \mathbb{R}^3 \quad g(x, y) = |x - y| = ((x - y) \cdot (x - y))^{\frac{1}{2}}$$

Def. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest izometrią jeśli F zachowuje odległość

$$\text{zn. } \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad g(F(x), F(y)) = g(x, y)$$

Tw. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest izometrią $(\mathbb{R}^3, g) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^3 \exists L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ liniowe przekształcenie ortogonalne

$$\text{zn. } L^T L = I_3 \quad \text{t. że } \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad F(x) = q + L(x)$$

Def. F jest ruchem sztywnym lub izometrią zachowującą orientację jeśli $dF: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zachowuje orientację.

Uwaga. F jest ruchem sztywnym $\Leftrightarrow \det L = 1$ gdzie $F(x) = q + L(x)$ z Tw.

Tw. I (podstawowe o krzywych przestrzennych - istnienie)

zał. $\alpha, \nu: I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcje gładkie, $\forall s \in I \quad \alpha(s) > 0$, $s_0 \in I \quad x_0 \in \mathbb{R}^3$

(v_1, v_2, v_3) są dodatnio zorientowaną bazą ortogonalną $\mathbb{R}^3$

Teza $\exists! \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ unormowana (Tutkowsko sparametryzowana) krzywa t. że

$$\alpha(\gamma) = \alpha, \quad \nu(\gamma) = \nu, \quad \gamma(s_0) = x_0, \quad e(s_0) = v_1, \quad n(s_0) = v_2, \quad b(s_0) = v_3.$$

Dowód. $X(s) = \begin{pmatrix} \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) \\ \alpha_3(s) \end{pmatrix} \quad C(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) & 0 \\ -\alpha(s) & 0 & \nu(s) \\ 0 & -\nu(s) & 0 \end{pmatrix} \quad X' = C \cdot X$ - r-nia Freneta z war. początk. $X(s_0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

ma dokładnie jedno rozw. speł. war. początkowy.

$$(X^T X)' = (X')^T X + X^T X' = (C X)^T X + X^T C X = X^T C^T X + X^T C X = -X^T C X + X^T C X = 0 \quad \text{bo } C^T = -C$$

$$(X^T X)' = 0 \quad \text{oraz} \quad (X(s_0))^T X(s_0) = I_3 \Rightarrow X^T \cdot X = X^T(s_0) \cdot X(s_0) = I_3 \quad \Rightarrow (\det X)^2 = 1$$

$\det X(s_0) = 1 \Rightarrow \det X \equiv 1$ czyli $(r_1(s), r_2(s), r_3(s))$ - baza ortonormalna dodatnio zorientowana

Określamy krzywą $\gamma(s) = x_0 + \int_{s_0}^s r_1(t) dt$ Wtedy $r(s_0) = x_0$ $r_1 = e$, $r_2 = n$, $r_3 = b$

$\kappa_\gamma = \kappa$, $\tau_\gamma = \tau$, bo r_1, r_2, r_3 jest reperelem Freneta dla γ (spełnia $X' = C X$) $\square$

Tw II (podstawowe o krzywych przestrzennych - przytłumienie)

zał. $\gamma, \tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ unormowane

Teza $\kappa = \tilde{\kappa}$, $\tau = \tilde{\tau} \Leftrightarrow \exists F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mdh sztywny $F \circ \gamma = \tilde{\gamma}$.

Dowód.: $\Leftarrow F(x) \equiv q + L(x)$ $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}' = L \circ \gamma'$, $\tilde{\gamma}'' = L \circ \gamma'' \Rightarrow \tilde{e} = L(e)$, $\tilde{n} = L(n)$

$$\tilde{b} = L(b) \quad \tilde{e}' = L(e') = L(\kappa e) = \kappa L e = \kappa \tilde{e}, \quad \tilde{b}' = L(b') = L(-\tau n) = -\tau L(n) = -\tau \tilde{n}$$

$$\tilde{n}' = L(n') = L(-\kappa e + \tau b) = -\kappa L e + \tau L b = -\kappa \tilde{e} + \tau \tilde{b}. \quad \text{Stąd } \kappa = \tilde{\kappa} \text{ i } \tau = \tilde{\tau}.$$

$$\Rightarrow L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ lin. } L(e(s_0)) = \tilde{e}(s_0), L(n(s_0)) = \tilde{n}(s_0), L(b(s_0)) = \tilde{b}(s_0)$$

L przekształca bazę ortonormalną dodat. zorient. $(e(s_0), n(s_0), b(s_0))$ na

bazę ortonormalną dodatnio zorient. $(\tilde{e}(s_0), \tilde{n}(s_0), \tilde{b}(s_0))$ więc $L^T L = I_3$

Niech $q = \tilde{\gamma}(s_0) - L(\gamma(s_0))$. Niech $F(x) = q + L(x)$ i $\bar{\gamma} = F \circ \gamma$

Wtedy $\bar{\gamma}(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0)$ $\bar{\kappa} = \tilde{\kappa}$, $\bar{\tau} = \tilde{\tau}$, $\bar{e}(s_0) = \tilde{e}(s_0)$, $\bar{n}(s_0) = \tilde{n}(s_0)$, $\bar{b}(s_0) = \tilde{b}(s_0)$. Stąd z Tw I

$$\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} = F \circ \gamma \quad \blacksquare$$