Geometria różniczkowa Wojciech Domitrz

Def. Krzywą parametryczną nazywamy gładkie przekształcenie $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, gdzie I przedział.
Krzywa γ jest regularna jeśli $\forall t \in I \quad \gamma'(t) \neq 0$

Def. Krzywe parametryczne $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ i $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ różnią się co najwyżej parametryzacją jeśli istnieje dyfeomorfizm gładki $\varphi : I \to \tilde{I}$ taki, że $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Jest to relacja równoważności. Klasę abstrakcji tej relacji nazywamy krzywą niesparametryzowaną.

Długość krzywej γ na przedziale $[a,b] \subset I$ jest dana wzorem $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_i(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$
gdzie $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Stw. Długość krzywej nie zależy od parametryzacji.

Dowód: $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |(\tilde{\gamma} \circ \varphi)'(t)|\, dt = \int_a^b |\tilde{\gamma}'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |\tilde{\gamma}'(s)|\, ds$, gdzie $s = \varphi(t)$ oraz $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, gdzie
$\varphi : [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ dyfeomorfizm zachowujący orientację lub $\varphi : [a,b] \to [\varphi(b), \varphi(a)]$ niezachowujący

$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\, du$ – parametr długości krzywej na $[a,t]$, $\tilde{\gamma}(s)$ – krzywa sparametryzowana długością łuku.
Stąd wynika, że $\tilde{\gamma}(s(t)) = \gamma(t)$ $\quad \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ $\quad \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t))|\dot{\gamma}(t)| = \dot{\gamma}(t) \Rightarrow \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \Rightarrow \left|\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s)\right| = 1$

Stw. Każdą krzywą regularną można sparametryzować długością łuku.

Stw. Jeżeli krzywe γ i $\gamma \circ \varphi$ są sparametryzowane długością łuku to $\varphi(t) = \pm t + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$

Dowód: $|\gamma'(s)| = 1 = |(\gamma \circ \varphi)'(t)| = |\gamma'(s)| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)| \Rightarrow \varphi'(t) = \pm 1 \Rightarrow \varphi(t) = \pm t + c$.

Przykład. Krzywa śrubowa $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $\quad t \in \mathbb{R} \quad a > 0,\ b \neq 0$.

$\gamma'(t) = [-a\sin t, a\cos t, b]$ $\quad |\gamma'(t)| = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad s = \varphi(t) = \int_0^t (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\, d\tau = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\, t$ $\qquad t = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\, s$

$\tilde{\gamma}'(s) = (\gamma \circ \varphi^{-1})(s) = \left(a\cos\left((a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} s\right), a\sin\left((a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} s, (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} bs\right)\right.$

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ krzywa gładka

$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\,du$ - parametr długości krzywej na $[a,t]$, $\gamma(s)$ - krzywa sparametryzowana długością łuku

$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$ $\quad e(s) := \gamma'(s) = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ - jednostkowy wektor styczny, $e(s)\cdot e(s) = 1 \;/\; \frac{d}{ds}$ $\quad e'(s)\cdot e(s) = 0 \Rightarrow e'(s) \perp e(s)$

$e'(s) \neq 0$ $\quad n(s) := \frac{e'(s)}{|e'(s)|}$ - wektor normalny $\quad |n(s)| = 1 \quad n(s) \perp e(s)$

Def. Krzywizną $\gamma(s)$ nazywamy $\varkappa(s) := |e'(s)|$. Jeśli $e'(s) = 0$ to $\varkappa(s) = 0$.

Jeśli $\gamma''(s) = e'(s) = 0$ to wektor normalny nie jest dobrze zdefiniowany

Zał, że $\forall s \in I$ $\gamma''(s) \neq 0$. Wtedy $e'(s) = \varkappa(s)$ $\quad (\varkappa(s) > 0)$. Wektory e i n są ortonormalne

$e\cdot e = 1 \quad n\cdot n = 1 \quad e\cdot n = 0$. Wektor $b(s) := e(s) \times n(s)$ nazywamy binormalnym.

$b\cdot e = 0 \quad b\cdot n = 0 \quad n\cdot n = 1$ Stąd $\{e(s), n(s), b(s)\}$ jest dodatnio zorientowanym reperem.

$$\det(e(s), n(s), b(s)) = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = b_1\cdot\det\begin{bmatrix} e_2 & e_3 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix} + b_2(-1)\det\begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ n_1 & n_3 \end{bmatrix} + b_3\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}$$

$$b(s) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix},$$ gdzie $\vec{i} = [1,0,0]$, $\vec{j} = [0,1,0]$, $\vec{k} = [0\ 0,1]$

Stąd $b_1 = \det\begin{bmatrix} e_2 & e_3 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix}$ $\quad b_2 = -\det\begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ n_1 & n_3 \end{bmatrix}$ $\quad b_3 = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}$ oraz

$$\det(e(s), n(s), b(s)) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b\cdot b = 1$$

Def. Płaszczyzna ściśle styczna to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \operatorname{span}\{e(s), n(s)\}$.

Płaszczyzna normalna to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \operatorname{span}\{n(s), b(s)\}$.

Płaszczyzna prostująca to płaszczyzna afiniczna $\gamma(s) + \operatorname{span}\{e(s), b(s)\}$.

Def. Torsją (skręceniem) krzywej γ w punkcie $\gamma(s)$ nazywamy $\tau(s) = -b'(s)\cdot n(s)$.

Torsja mierzy jak szybko krzywa oddala się od płaszczyzny ściśle stycznej.

$$n'(s) = (n'\cdot e)e + (n'\cdot n)\cdot n + (n'\cdot b)b \qquad n\cdot e = 0 \qquad n'\cdot e + n\cdot e' = 0$$

$$n'\cdot e = -n\cdot e' = -n\cdot(\varkappa n) = -\varkappa(n\cdot n) = -\varkappa$$

$$n\cdot n = 1 \qquad n'\cdot n + n\cdot n' = 0 \qquad 2\cdot(n'\cdot n) = 0 \qquad n'\cdot n = 0$$

$$n\cdot b = 0 \qquad n'\cdot b + n\cdot b' = 0 \qquad n'\cdot b = -n\cdot b' = -b'\cdot n = \tau$$

$$n' = -\varkappa e + \tau b$$

$$b' = (b'\cdot e)e + (b'\cdot n)n + (b'\cdot b)b$$

$$(b\cdot e) = 1 \qquad b'\cdot e + b\cdot e' = 0 \qquad b'\cdot e = -b\cdot e' = -b\cdot(\varkappa n) = -\varkappa(b\cdot n) = 0$$

$$b'\cdot n = -\tau \qquad b\cdot b = 1 \Rightarrow b'\cdot b = 0$$

$$\begin{cases} e'(s) = \varkappa(s)\, n(s) \\ n'(s) = -\varkappa(s)\, e(s) + \tau(s)\, b(s) \\ b'(s) = -\tau(s)\, n(s) \end{cases}$$

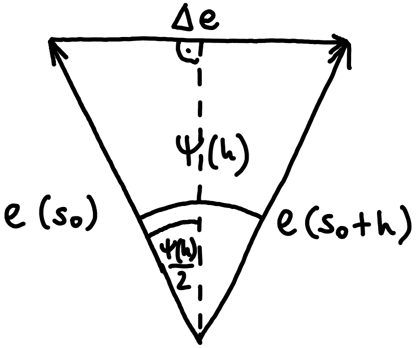
wzór Freneta – Serreta

$$\mathcal{F}(s) := (e(s), n(s), b(s))^T \qquad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \Omega\cdot\mathcal{F}$$

Intrepetacja geometryczna krzywizny $\varkappa$

Oznaczmy przez $N_{\gamma(s_0)} = \gamma(s_0) + \text{span}\{n(s_0), b(s_0$ płaszczyznę normalną do γ w s_0

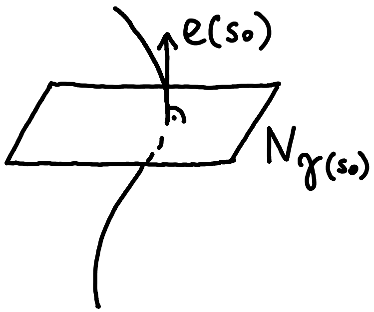
$e(s_0) \perp N_{\gamma(s_0)} \Rightarrow$ Kąt między $N_{\gamma(s_0)}$ i $N_{\gamma(s_0+h)}$ $\quad \sphericalangle(N_{\gamma(s_0)}, N_{\gamma(s_0+h)}) = \sphericalangle(e(s_0), e(s_0+h)) = \psi(h)$



$$\Delta e = e(s_0+h) - e(s_0) \qquad \frac{\frac{1}{2}|\Delta e|}{|e(s_0)|} = \sin \tfrac{1}{2}\psi(h) \qquad |\Delta e| = 2 \sin \tfrac{1}{2}\psi(h)$$

$$|b(s_0)| = |b(s_0+h)| = 1$$

$$\psi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\psi(h)}{\sin\psi(h)}\right) \frac{\sin\psi(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\sin(\psi(h))} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\psi(h)}{|h|} =$$



$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\psi(h))}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}\psi(h)\left(\cos\frac{1}{2}\psi(h)\right)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}\psi(h)}{|h|} \lim_{h\to 0} \cos\left(\tfrac{1}{2}\psi(h)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\psi(h)\right)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta e|}{|h|} = \left|\lim_{h\to 0} \frac{e(s_0+h) - e(s_0)}{h}\right| = |e'(s_0)|$$

$$e'(s_0) = \varkappa(s_0) \cdot n(s_0) \qquad |e'(s_0)| = |\varkappa(s_0) n(s_0)| = \varkappa(s_0)$$

$$\psi'(0) = \varkappa(s_0)$$

Krzywizna to szybkość zmiany kąta między płaszczyznami normalnymi

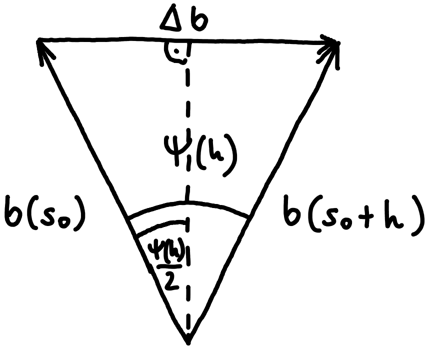
(wektorami stycznymi)

Intrepetacja geometryczna torsji (skręcenia) $\varkappa$

1) Interpretacja wartości bezwzględnej torsji.

Oznaczmy przez $T_{\gamma(s_0)} = \gamma(s_0) + \mathrm{span}\{e(s_0), n(s_0)\}$ płaszczyznę ściśle styczną do γ w s_0

$b(s_0) \perp T_{\gamma(s_0)} \Rightarrow$ Kąt między $T_{\gamma(s_0)}$ i $T_{\gamma(s_0+h)}$ $\quad \sphericalangle(T_{\gamma(s_0)}, T_{\gamma(s_0+h)}) = \sphericalangle(b(s_0), b(s_0+h)) = \psi(h)$



$$\Delta b = b(s_0+h) - b(s_0) \qquad \frac{\frac{1}{2}|\Delta b|}{\underbrace{|b(s_0)|}_{1}} = \sin\tfrac{1}{2}\psi(h) \qquad |\Delta b| = 2\sin\tfrac{1}{2}\psi(h)$$

$$|b(s_0)| = |b(s_0+h)| = 1$$

$$\psi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\psi(h)}{\sin\psi(h)}\right)\frac{\sin\psi(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)}{\sin(\psi(h))}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\psi(h)}{|h|} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\psi(h))}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}\psi(h)\left(\cos\frac{1}{2}\psi(h)\right)}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}\psi(h)}{|h|}\lim_{h\to 0}\cos\left(\tfrac{1}{2}\psi(h)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\psi(h)\right)}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{|\Delta b|}{|h|} = \left|\lim_{h\to 0}\frac{b(s_0+h) - b(s_0)}{h}\right| = |b'(s_0)|$$

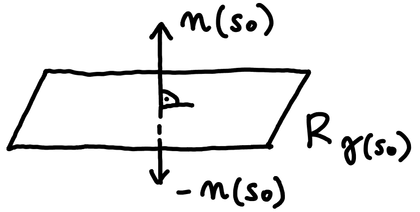
$$b'(s_0) = -\varkappa(s_0)\cdot n(s_0) \qquad |b'(s_0)| = |-\varkappa(s_0)n(s_0)| = |\varkappa(s_0)|$$

$$\psi'(0) = |\varkappa(s_0)|$$

Wartość bezwzględna torsji to szybkość zmiany kąta między płaszczyznami ściśle stycznymi (wektorami binormalnymi)

2) Interpretacja znaku torsji

Oznaczmy $R_{\gamma(s_0)} := \gamma(s_0) + \operatorname{span}\{e(s_0), b(s_0)\}$ płaszczyznę prostującą (rectifying plane) krzywej γ w s_0



$R_{\gamma(s_0)}$ dzieli $\mathbb{R}^3$ na 2 półprzestrzenie: 1) zawierającą $n(s_0)$

2) zawierającą $-n(s_0)$

zał., że $\tau(s_0) > 0$

Wtedy $b'(s_0)$ leży w półprzestrzeni zawierającej $-n(s_0)$

bo $b'(s_0) = -\tau(s_0)\, n(s_0)$ i $\tau(s_0) > 0$

$$b'(s_0) = \lim_{h \to 0} \frac{b(s_0+h) - b(s_0)}{h}$$

Stąd dla małych $h \neq 0$ $\frac{b(s_0+h) - b(s_0)}{h}$ leży w półprzestrzeni zawierającej $-n(s_0)$

Czyli dla małych $h > 0$ $b(s_0+h) - b(s_0)$ leży w półprzestrzeni zawierającej $-n(s_0)$

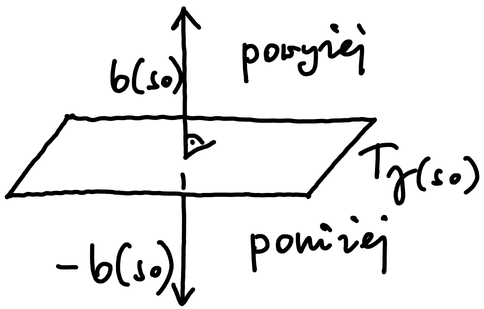
Ale $b(s_0) \in R_{\gamma(s_0)}$. Stąd otrzymujemy

$b(s_0+h) = b(s_0) + (b(s_0+h) - b(s_0))$ leży w półprzestrzeni zawierającej $-n(s_0)$ dla $h > 0$

Stąd $\tau(s_0) > 0$ to $b(s_0+h)$ leży w półprzestrzeni zawierającej $-n(s_0)$ dla małych $h > 0$ i leży w półprzestrzeni zawierającej $n(s_0)$ dla małych $h < 0$.

Czyli jeśli $\tau(s_0) > 0$ $(\tau(s_0) < 0)$ to $b(s_0+h)$ „skręca" w stronę $-n(s_0)$ $(+n(s_0))$ przy rosnącym h.

Def. Punkt p leży powyżej płaszczyzny ściśle stycznej $T_\gamma(s_0)$ jeśli leży w tej z półprzestrzeni w $\mathbb{R}^3 \setminus T_\gamma(s_0)$, która zawiera $b(s_0)$. Punkt p leży poniżej $T_\gamma(s_0)$ jeśli leży w półprzestrzeni $\mathbb{R}^3 \setminus T_\gamma(s_0)$, która zawiera $(-b(s_0))$



$$\gamma'(s) = e(s), \quad \gamma''(s) = e'(s) = \kappa(s)\, n(s)$$

$$\gamma'''(s) = \kappa'(s)\, n(s) + \kappa(s)\, n'(s)$$

$$\gamma'''(s) = \kappa'(s)\, n(s) + \kappa(s)\big(-\kappa(s)\, e(s) + \tau(s)\, b(s)\big)$$

$$\gamma'''(s) = -\kappa^2(s)\, e(s) + \kappa'(s)\, n(s) + \kappa(s)\tau(s)\, b(s)$$

$$\gamma(s_0+h) = \gamma(s_0) + h\,\gamma'(s_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(s_0) + \frac{h^3}{6}\gamma'''(s_0) + \frac{h^4}{24} R(s_0,h)$$

$$\gamma(s_0+h) = \gamma(s_0) + \left(h - \frac{1}{6}\kappa^2(s_0)\, h^3\right) e(s_0) + \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\, h^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\, h^3\right) n(s_0) +$$

$$+ \frac{1}{6}\kappa(s_0)\,\tau(s_0)\, h^3\, b(s_0) + \frac{1}{24} h^4 R(s_0,h) \qquad (*)$$

$$\gamma(s_0) + \left(h - \frac{1}{6}\kappa^2(s_0)\, h^3\right) e(s_0) + \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\, h^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\, h^3\right) n(s_0) \in T_\gamma(s_0)$$

$\gamma(s_0+h)$ leży powyżej (poniżej) $T_\gamma(s_0)$ dla małych h jeśli $\frac{1}{6}\kappa(s_0)\,\tau(s_0)\, h^3 \; > 0 \; (< 0)$

(współrzędnych przy $b(s_0)$ w $(*)$)

Jeśli $\tau(s_0) > 0$ to γ przecina $T_\gamma(s_0)$ w ten sposób, że $\gamma(s_0+h)$ leży powyżej (poniżej) $T_\gamma(s_0)$ dla małych $h > 0$ ($h < 0$), a dla $\tau(s_0)$ odwrotnie.

Wzory dla dowolnej parametryzacji $t \mapsto \gamma(t)$

$$e = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} \qquad b = \frac{\dot\gamma \times \ddot\gamma}{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|} \qquad n = b \times e = \frac{(\dot\gamma \times \ddot\gamma)\times\dot\gamma}{|(\dot\gamma \times \ddot\gamma)\times\dot\gamma|} \qquad \varkappa(t) = \frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \tau(t) = \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2}$$

Dowód.: $\gamma(t) = \tilde\gamma(s(t))$ $\tilde\gamma(s)$ - parametryzacja łukowa o zwrocie zgodnym z parametryzacją $\gamma(t)$. $\dot{(\ )} = \frac{d}{dt}(\ )$, $(\ )' = \frac{d}{ds}(\ )$

$$\dot\gamma(t) = \tilde\gamma'(s(t))\cdot\dot s(t) = \dot s(t)\cdot e(s(t)) \qquad \ddot\gamma(t) = \ddot s(t)\cdot e(s(t)) + (\dot s(t))^2 e'(s(t)) = \ddot s(t)\cdot e(s(t)) + (\dot s(t))^2 \varkappa(s(t))\, n(s(t))$$

$$\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t) = \dot s(t)\, e(s(t)) \times (\ \ddot s(t)\, e(s(t)) + (\dot s(t))^2 \varkappa(s(t))\, n(s(t)) = (\dot s(t))^3 \varkappa(s(t))\, b(s(t))$$

$$|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)| = (\dot s(t))^3 \varkappa(s(t)) \quad (\dot s(t) > 0) \quad |\dot\gamma(t)| = |\dot s(t)\, e(s(t))| = \dot s(t)\,|e(s(t))| = \dot s(t)$$

$$\varkappa(s(t)) = \frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{(\dot s(t))^3} = \frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \frac{\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|} = \frac{(\dot s(t))^3 \varkappa(s(t))\, b(s(t))}{(\dot s(t))^3 \varkappa(s(t))} = b(s(t))$$

$$\dddot\gamma(t) = \dddot s(t)\, e(s(t)) + \ddot s(t)\, \dot s(t)\, e'(s(t)) + 2(\dot s(t))\, \ddot s(t)\, \varkappa(s(t))\, n(s(t)) + (\dot s(t))^3 \varkappa'(s(t))\, n(s(t)) +$$
$$+ (\dot s(t))^3 \varkappa(s(t))\, n'(s(t)) = \dddot s(t)\, e(s(t)) + \ddot s(t)\, \dot s(t)\, \varkappa(s(t))\, n(s(t)) + 2(\dot s(t)\, \ddot s(t))\, n(s(t)) +$$
$$+ (\dot s(t))^3 \varkappa'(s(t))\, n(s(t)) - (\dot s(t))^3 \varkappa(s(t)) \left(-\varkappa(s(t))\, e(s(t)) + \tau(s(t))\, b(s(t))\right)$$

$$\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t)) = \det(\ \dot s(t)\, e(s(t)), (\dot s(t))^2 \varkappa(s(t))\, n(s(t)), + (\dot s(t))^3 \varkappa(s(t))\, \tau(s(t))\, b(s(t))) =$$
$$= (\dot s(t))^6 \varkappa(s(t))^2 \tau(s(t)) \det(e(s(t)), n(s(t)), b(s(t))) = (\dot s(t))^6 (\varkappa(s(t)))^2 \tau(s(t))$$

$$|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2 = (\dot s(t))^6 \varkappa^2(s(t)) \qquad \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2} = \tau(s(t))$$

Uwaga $\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t)) = (\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t))\cdot\dddot\gamma(t)$

Krzywizna krzywej płaskiej $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ gładka sparametryzowana łukowo

$|\gamma'(s)| = 1 \quad \gamma'(s) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \quad \gamma'(s_0) = |\gamma'(s_0)| e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \quad \gamma'(s) = e^{i(\alpha + \varphi(s))}$

$\varphi(s)$ to $\sphericalangle \gamma'(s_0), \gamma'(s) \quad e(s) = e^{i(\alpha+\varphi(s))} \quad e'(s) = i e^{i(\alpha+\varphi(s))} \varphi'(s)$

$$\varkappa(s) = \left|ie^{i(\alpha+\varphi(s))}\right| \cdot \left|\frac{d\varphi}{ds}\Big|_s\right| \qquad \varkappa(s) = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

Przykład: okrąg $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad \gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \quad \gamma'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}) \quad |\gamma'(s)| = 1$

$\gamma(s)$ jest parametryzacją długością łuku. $e'(s) = \gamma''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) = -\frac{1}{r}(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r})$

$\varkappa(s) = |e'(s)| = \frac{1}{r}$

Def. Krzywa jest płaska jeśli jest zanurzona w pewnej płaszczyźnie afinicznej

Tw. Krzywa jest płaska $\iff \tau \equiv 0$

Dowód. Płaskość krzywej nie zależy od parametryzacji. Niech $s \mapsto \gamma(s)$ parametryzacja łukowa

$\Rightarrow \quad \gamma(I) \subset \Pi$ - płaszczyzna afiniczna

$\Pi : (x-p)\cdot v = 0 \quad \|v\| = 1 \quad v \perp \Pi \quad (\gamma(s) - p)\cdot v = 0 \; / \frac{d}{ds}$

$\gamma'(s)\cdot v = 0 \quad e(s)\cdot v = 0 \quad (\varkappa(s) \; n(s))\cdot v = 0$ i $\varkappa(s) > 0 \Rightarrow n(s)\cdot v = 0$

$e(s) \perp v$ i $n(s) \perp v \Rightarrow e(s) \times n(s) \parallel v \qquad b(s) \parallel v \quad \forall s \in I$

$|b(s)| = 1 \qquad b(s) = \text{const.} \; (b(s) = v$ lub $b(s) = -v) \quad b'(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$

$\Leftarrow \quad \tau \equiv 0 \Rightarrow b'(s) = -\tau(s) n(s) = 0 \quad b'(s) \equiv 0 \quad b(s) = b = \text{const.}$

Niech $h(s) = (\gamma(s) - \gamma(0))\cdot b \quad h'(s) = \gamma'(s)\cdot b = e(s)\cdot b \equiv 0$

$h(s) \equiv \text{const} \quad h(0) = (\gamma(0) - \gamma(0))\cdot b = 0 \Rightarrow h(s) = (\gamma(s) - \gamma(0))\cdot b \equiv 0$

czyli $\gamma(I) \subset \Pi : (\gamma(s) - \gamma(0))\cdot b = 0$

$x, y \in \mathbb{R}^3 \quad \rho(x,y) = |x-y| = \left((x-y)\cdot(x-y)\right)^{\frac{1}{2}}$

Def. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest izometrią jeśli F zachowuje odległość

tzn. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^3 \quad \rho(F(x), F(y)) = \rho(x,y)$

Tw. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest izometrią $(\mathbb{R}^3, \rho) \iff \exists\, q \in \mathbb{R}^3 \ \exists\, L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ liniowe przekształcenie ortonormalne

tzn. $L^T L = I_3$ t. że $\forall x \in \mathbb{R}^3 \ F(x) = q + L(x)$

Def. F jest ruchem sztywnym lub izometrią zachowującą orientację jeśli $dF: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zachowuje orientację.

Uwaga. F jest ruchem sztywnym $\iff \det L = 1$ gdzie $F(x) \equiv q + L(x)$ z Tw.

Tw. I (podstawowe o krzywych przestrzennych – istnienie)

zał. $\varkappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ funkcje gładkie, $\forall\, s \in I \ \varkappa(s) > 0$, $s_0 \in I$ $x_0 \in \mathbb{R}^3$

(v_1, v_2, v_3) są dodatnio zorientowaną bazą ortonormalną $\mathbb{R}^3$

Teza $\exists!\ \gamma: I \to \mathbb{R}^3$ unormowana (łukowo sparametryzowana) krzywa t. że

$$\varkappa(\gamma) = \varkappa, \quad \tau(\gamma) = \tau, \quad \gamma(s_0) = x_0, \ e(s_0) = v_1, \ n(s_0) = v_2, \ b(s_0) = v_3.$$

Dowód. $X(s) = \begin{pmatrix} \tau_1(s) \\ \tau_2(s) \\ \tau_3(s) \end{pmatrix} \quad C(s) = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa(s) & 0 \\ -\varkappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \qquad X' = C \cdot X$ – r-nia Freneta z war. począt. $X(s_0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

ma dokładnie jedno rozw. speł. war. początkowy.

$$(X^TX)' = (X')^TX + X^TX' = (CX)^TX + X^TCX = X^TC^TX + X^TCX = -X^TCX + X^TCX = 0 \quad \text{bo } C^T = -C$$

$(X^TX)' = 0$ oraz $(X(s_0))^T X(s_0) = I_3 \Rightarrow X^T \cdot X = X^T(s_0) \cdot X(s_0) = I_3 \quad \Rightarrow (\det X)^2 = 1$

$\det X(s_0) = 1 \Rightarrow \det X \equiv 1$ czyli $(v_1(s), v_2(s), v_3(s))$ – baza ortonormalna dodatnio zorientowana

Określamy krzywą $\gamma(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} v_1(t)\,dt$. Wtedy $v(s_0) = x_0$, $v_1 = e_1$, $v_2 = n$, $v_3 = b$

$\varkappa_\gamma = \varkappa$, $\tau_\gamma = \tau$, bo v_1, v_2, v_3 jest reperem Freneta dla γ (spełnia $X' = CX$) □

Tw II (podstawowe o krzywych przestrzennych – przystawanie)

zał. $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ unormowane

Teza $\varkappa = \tilde{\varkappa}$, $\tau = \tilde{\tau} \iff \exists\, F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ruch sztywny $F \circ \gamma = \tilde{\gamma}$.

Dowód.: $\Leftarrow$ $F(x) \equiv q + L(x)$ $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}' = L \circ \gamma'$, $\tilde{\gamma}'' = L \circ \gamma'' \Rightarrow \tilde{e} = L(e)$, $\tilde{n} = L(n)$

$\tilde{b} = L(b)$ $\quad \tilde{e}' = L(e') = L(\varkappa e) = \varkappa L e = \varkappa \tilde{e}$, $\tilde{b}' = L b' = L(-\tau b) = -\tau L(b) = -\tau \tilde{b}$

$\tilde{n}' = L(n') = L(-\varkappa e + \tau b) = -\varkappa L e + \tau L b = -\varkappa \tilde{e} + \tau \tilde{b}$. Stąd $\varkappa = \tilde{\varkappa}$ i $\tau = \tilde{\tau}$.

$\Rightarrow$ $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lin. $L(e(s_0)) = \tilde{e}(s_0)$, $L(n(s_0)) = \tilde{n}(s_0)$, $L(b(s_0)) = \tilde{b}(s_0)$

L przekształca bazę ortonormalną dodat. zorient. $(e(s_0), n(s_0), b(s_0))$ na bazę ortonormalną dodatnio zorient. $(\tilde{e}(s_0), \tilde{n}(s_0), \tilde{b}(s_0))$ więc $L^TL = I_3$

Niech $q = \tilde{\gamma}(s_0) - L(\gamma(s_0))$. Niech $F(x) = q + L(x)$ i $\bar{\gamma} = F \circ \gamma$

Wtedy $\bar{\gamma}(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0)$ $\quad \bar{\varkappa} = \tilde{\varkappa}$, $\bar{\tau} = \tilde{\tau}$, $\tilde{e}(s_0) = \bar{e}(s_0)$, $\tilde{n}(s_0) = \bar{n}(s_0)$, $\tilde{b}(s_0) = \bar{b}(s_0)$. Stąd z Tw I

$\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} = F \circ \gamma$ ■