Wojciech Domitrz   Geometria różniczkowa

Krzywe płaskie

Przykłady

1) $f: I \to \mathbb{R}$ funkcja C^∞ gładka, gdzie I przedział $\subset \mathbb{R}$. Wtedy wykres f $\text{graph } f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ jest krzywą płaską. Nie każdą krzywą można przedstawić jako wykres funkcji gładkiej np.

okrąg $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ $\quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

2) Reprezentacja krzywej za pomocą funkcji uwikłanej np. okrąg

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$$

Ogólnie: $F: D \to \mathbb{R}$ funkcja C^∞ gładka na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy zadajemy krzywą

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\} = F^{-1}(0)$. W szczególności wykres $f: I \to \mathbb{R}$ można zadać $\text{graph } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - f(x) = 0\}$

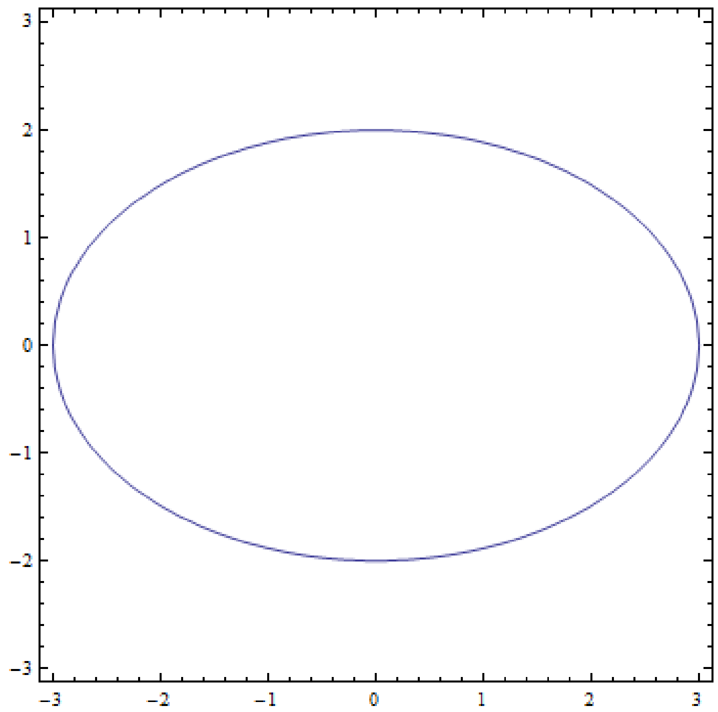
Elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\quad$ hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\quad$ lemniskata: $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$

Uwaga! Punkt leży na lemniskacie jeżeli iloczyn odległości tego punktu od punktów $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ wynosi $\frac{a^2}{2}$.

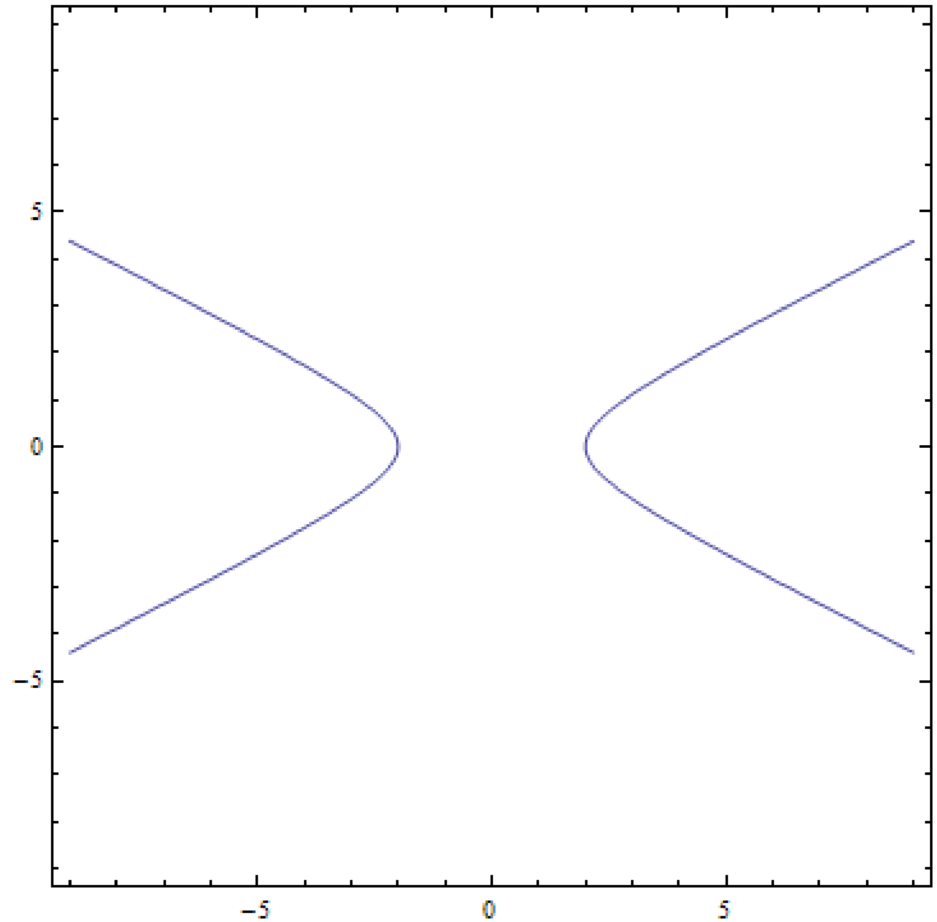
Asteroida: $(a^2-x^2-y^2)^3 - 27a^2x^2y^2 = 0$

Uwaga! Asteroida to zbiór punktów wyznaczanych przez jeden punkt okręgu o promieniu $\frac{a}{4}$ toczącego się wewnątrz okręgu o promieniu a

Elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

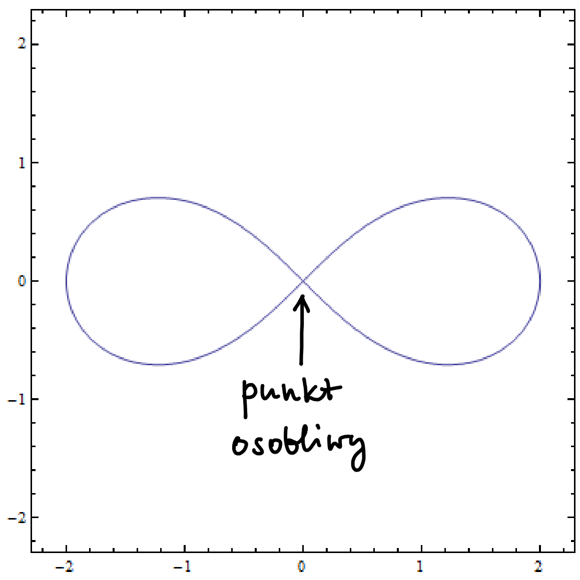


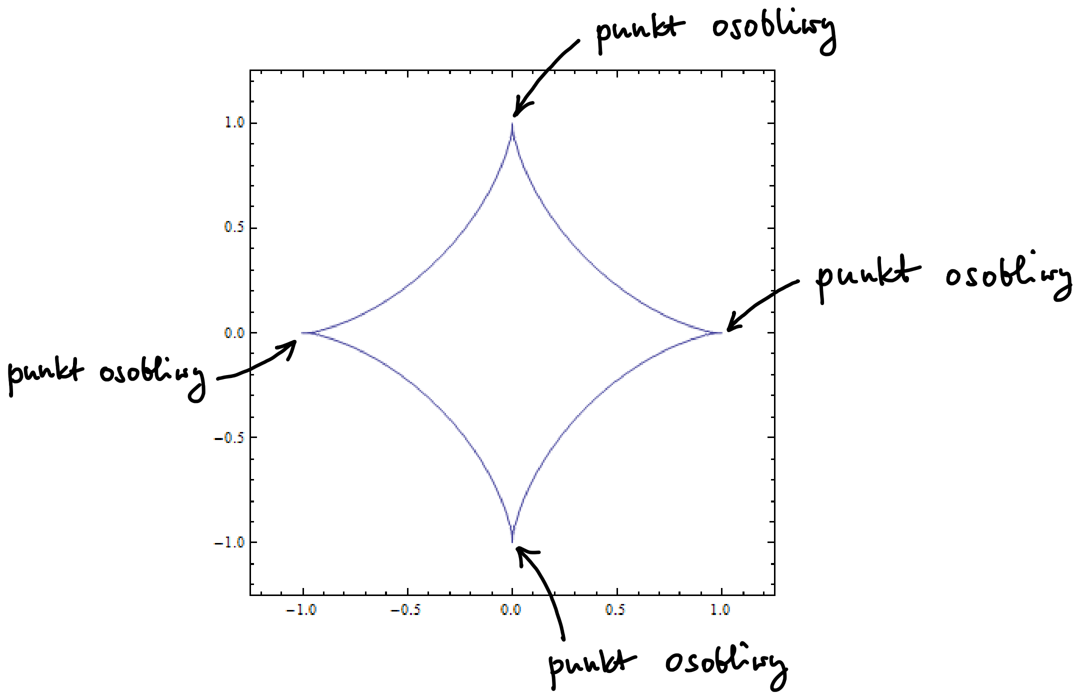
Hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} - 1 = 0$

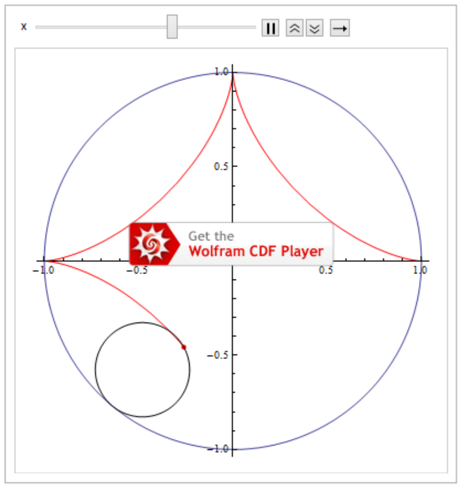


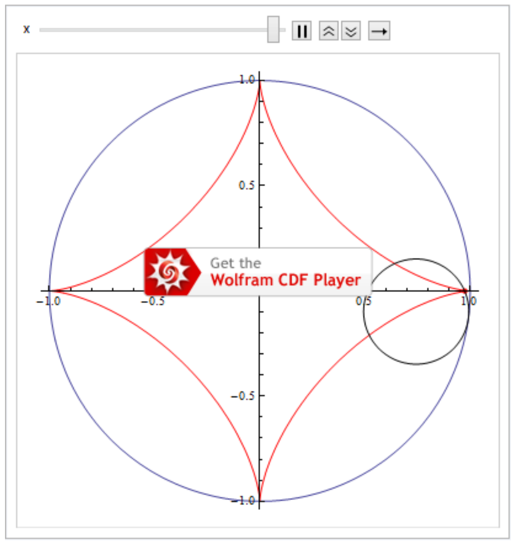
Lemniskata : $(x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2) = 0$

Asteroida : $(1-x^2-y^2)^{3/2} - 27x^2y^2 = 0$









$F: D \to \mathbb{R}$ funkcja C^∞ gładka na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = 0$ zał, że $F(x_0,y_0) = 0$

Jeżeli $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ to z TFU wynika, że w otoczeniu (x_0,y_0) $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$

dla pewnej funkcji $f: I \to \mathbb{R}$ C^∞ gładkiej na przedziale $I \subset \mathbb{R}$

Uwaga! Jeżeli $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$ na pewnym otoczeniu (x_0,y_0) $F(x,y)=0 \Leftrightarrow x = g(y)$

Jeżeli $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ to punkt (x_0,y_0) nazywany punktem osobliwym

1) np. $F(x,y) = (a^2-x^2-y^2)^3 - 27a^2x^2y^2 = 0$ $F(a,0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(a^2-x^2-y^2)^2(-2x) - 2\cdot 27a^2xy^2$, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3(a^2-x^2-y^2)(-2y) - 2\cdot 27\cdot a^2x^2y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(a,0) = 0$

$(a,0)$ to punkt osobliwy asteroidy $(-a,0),(0,a),(0,-a)$ są punktami osobliwymi

2) $G(x,y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)$, $G(0,0) = 0$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 2a^2x$ $\frac{\partial G}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\cdot 2y - 2a^2y$ $\frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 0$

$(0,0)$ punkt osobliwy lemniskaty

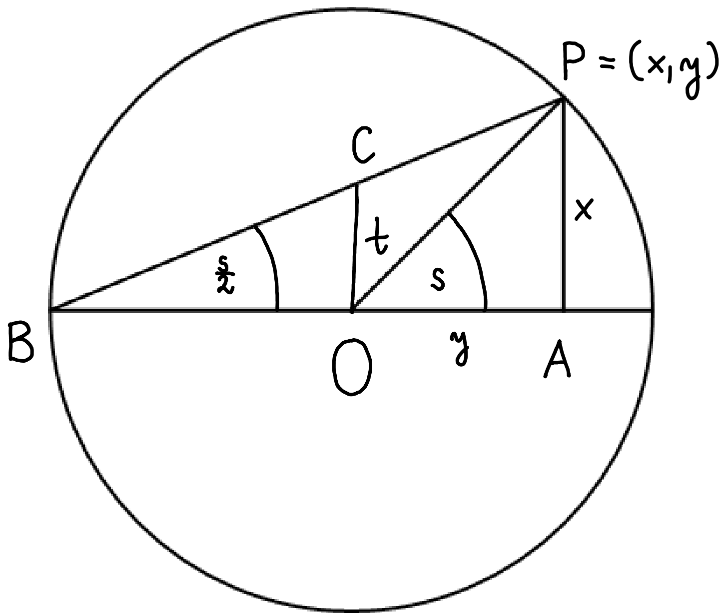
Parametryzacja krzywych

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ przekształcenie C^∞ gładkie na przedziale $I \subset \mathbb{R}$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ t – parametr γ to parametryzacja krzywej

$\operatorname{graph} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \;\; y = f(x)\}$ można sparametryzować następująco $\gamma(t) = (t, f(t))$

Przykład: okrąg o środku w $(0,0)$ i promieniu 1.



$\measuredangle AOP = s$ $\qquad OA = x$

$\measuredangle ABP = \frac{1}{2} AOP = \frac{1}{2} s$ $\qquad AP = y$

$t = OC = \frac{OC}{1} = \frac{OC}{OB} = \operatorname{tg} \frac{s}{2}$ $\qquad t = \operatorname{tg}\frac{s}{2}$

$$x = \cos s = \cos^2 \tfrac{s}{2} - \sin^2 \tfrac{s}{2} = \frac{\cos^2 \frac{s}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}}{\sin^2 \frac{s}{2} + \cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$y = \sin s = 2 \sin \tfrac{s}{2} \cos \tfrac{s}{2} = \frac{2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{\cos^2 \frac{s}{2} + \sin^2 \frac{s}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad t \in [a, b]$

$\alpha : [c, d] \to [a, b]$ funkcja C^∞ gładka $\alpha(c) = a$ $\alpha(d) = b$ $\frac{d\alpha}{du} > 0$ α – dyfeom.

$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\alpha(u))$ $u \in [c, d]$ zmiana parametryzacji krzywej

Przykłady parametryzacji

Elipsa $x(t) := a\cos t$ $\quad y(t) := b\sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

Hiperbola $x(t) := a\cosh t$ $\quad y(t) := b\sinh t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Lemniskata $x(t) := \dfrac{a\cos t}{1+\sin^2 t}$ $\quad y(t) := \dfrac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

Asteroida $x(t) := a\cos^3 t$ $\quad y(t) := a\sin^3 t$ $\quad t \in [-\pi, \pi]$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ - parametryzacja krzywej

$\dot\gamma(t) := (\dot x(t), \dot y(t))$ $\quad \left(\dot x(t) := \frac{dx}{dt}(t),\ \dot y(t) = \frac{dy}{dt}(t) \right)$

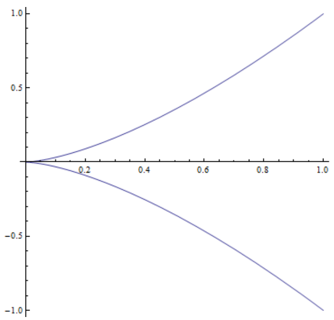
Punkt krzywej $\gamma(c)$ nazywamy osobliwym jeśli $\dot\gamma(c) = 0$. Punkt $\gamma(c)$ jest regularny jeśli $\dot\gamma(c) \neq 0$

Krzywą nazywamy regularną, jeżeli wszystkie jej punkty są regularne tzn $\forall t \in I$ $\dot\gamma(t) \neq 0$.

Przykład $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\quad \dot\gamma(t) = (2t, 3t^2)$ $\quad \gamma(0) = (0,0)$ $\quad \dot\gamma(0) = (0,0)$ $\quad \gamma(0)$ jest punktem osobliwym

Punkt osobliwy $\gamma(c)$ jest punktem osobliwym typu ostrze (cusp) jeśli $\exists\, \varphi : I \to J$ dyfeo, gdzie $I, J \subset \mathbb{R}$ przedziały oraz $\Phi : U \to V$ dyfeo gdzie $U, V \subset \mathbb{R}^2$ zbiory otwarte takie że $(\Phi \circ \gamma \circ \varphi)(t) = (t^2, t^3)$

Tw. $\gamma(c)$ jest punktem osobliwym typu ostrze $\Leftrightarrow$ $\dot\gamma(c) = 0$ i $\ddot\gamma(c)$ i $\dddot\gamma(c)$ są liniowo niezależne.



Punkt osobliwy typu ostrze (cusp)

Długość krzywej

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad |\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)| = \left((x(t+\Delta t) - x(t))^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$

$\left(\left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 \right) \Delta t^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$

$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_a^b \left((\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$ – długość krzywej

$\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \left(1 + (f'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$

$\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [a;b] \qquad \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\theta$

Example. $y = \frac{1}{a}\cosh(ax) \quad x \in [-c;c]$ wiszący łańcuch. Jaka jest jego długość?

$= \mathcal{L}(\gamma) = \int_{-c}^{c} \left(1 + (\sinh(ax))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-c}^{c} \cosh(ax)\, dx = \frac{2}{a}\sinh(ac)$

dla danej długości łańcucha l oraz c t., że $2c < l$ istnieje dokładnie jedno a t., że $l = \frac{2}{a}\sinh a$

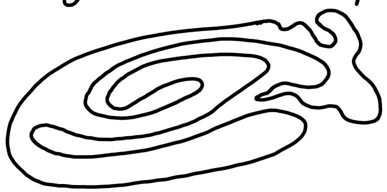
Krzywą bez punktów samoprzecięcia nazywamy zwykłą (simple)

Krzywą nazywamy zamkniętą jeśli $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją okresową tzn. $\exists T>0 \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t+T) = \gamma(t)$

Inaczej krzywe zamknięte ma parametryzację $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$.

Tw Jordana o krzywej zamkniętej

Zwykła zamknięta krzywa na płaszczyźnie dzieli płaszczyznę na dwa spójne otwarte obszary jeden ograniczony a drugi nie.



Def. Obszar ograniczony przez zwykłą krzywą zamkniętą w $\mathbb{R}^2$ nazywamy **wnętrzem**, a drugi nieograniczony obszar (dopełnienie wnętrza i krzywej w $\mathbb{R}^2$) **zewnętrzem** krzywej.

l – długość zwykłej krzywej zamkniętej A – pole wnętrza krzywej

Tw Nierówność izoperymetryczna) $4\pi A \leq L^2$ i równość zachodzi tylko dla okręgu.

Parametryzacja długością łuku

krzywa regularna $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $s(t) := \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\, du$ jest długością $\gamma([a,t])$

$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$ $s(t)$ jest funkcją ściśle rosnącą na $[a,b]$ $s : [a,b] \to [0,l]$

Stąd istnieje funkcja odwrotna do s $t(s)$, $t : [0,L] \ni s \mapsto t(s) \in [a,b]$

$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ $s \in [0,l]$ s jest parametrem długości krzywej

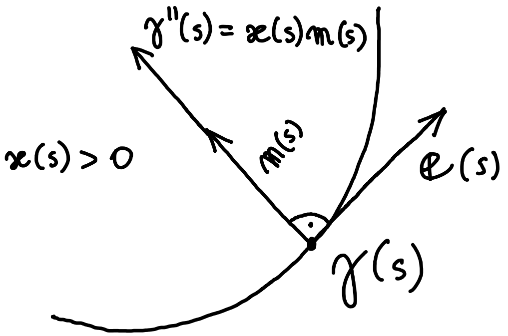
$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma$ $\gamma' = \frac{d}{ds}\gamma$ $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\gamma}(t) \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ Stąd $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ czyli prędkość w parametryzacji łukowej wynosi 1. $(|\gamma'(s)| = 1)$

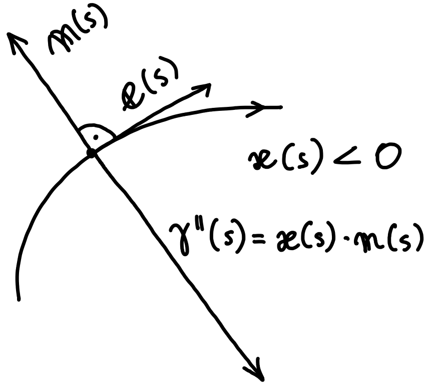
Odwrotnie niech $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ t, że $\forall t \in I$ $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\, du = \int_a^t 1\, du = t - a$, gdzie a – stała. Stąd odległość wzdłuż krzywej od jakiegoś wybranego punktu różni się od t tylko stałą addytywną.

Stąd parametryzacja łukowa oznacza jednostkową prędkość $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ $\forall t \in I$

Niech $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ będzie parametryzacją łukową krzywej. Wtedy $e(s) := \gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$ jest jednostkowym wektorem stycznym $\gamma(s)$.

Wektor $n(s) := (-y'(s), x'(s))$ prostopadły do $e(s)$, po lewej stronie $e(s)$ $(e(s), n(s))$ – dodatnio zorientowana baza $\mathbb{R}^2$ (ortonormalna baza). Wektor $n(s)$ nazywamy jednostkowym wektorem normalnym $\gamma(s)$





$|\gamma'(s)| = 1 \Rightarrow \gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1 \quad / \frac{d}{ds}$

$\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) + \gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = 0$

$2\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0$ $\quad \gamma''(s)$ – przyspieszenie

$\gamma''(s)$ jest prostopadłe do $\gamma'(s)$. Stąd

$\gamma''(s)$ jest proporcjonalne do $n(s)$.

Krzywizna $\varkappa(s)$ to stosunek $\gamma''(s)$ do $n(s)$ czyli $\gamma''(s) = \varkappa(s) \cdot n(s)$

$\varkappa : [0, l] \to \mathbb{R}$ $\quad \varkappa(s) > 0 \ (< 0)$ jeśli krzywa skręca na lewo (prawo) w $\gamma(s)$

Stw. $\varkappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))$

Dowód.: $\det(\gamma'(s), \gamma''(s)) = \det(e(s), \varkappa(s) \cdot n(s)) = \varkappa(s) \underbrace{\det(e(s), n(s))}_{=1} = \varkappa(s)$ $\square$

Przykład.: $\gamma(s) = (a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a})$ $\quad \gamma'(s) = (-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a})$ $\quad |\gamma'(s)| = \sin^2 \frac{s}{a} + \cos^2 \frac{s}{a} = 1$

Stąd $\gamma(s)$ to parametryzacja łukowa $\quad n(s) = (-\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a})$ $\quad \gamma''(s) = \frac{1}{a}(-\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a}) = \frac{1}{a} n(s)$

Stąd $\varkappa(s) = \frac{1}{a}$.

Tw. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \varkappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$

Dowód.: $\gamma' = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ $\quad \gamma'' = \frac{d}{ds}(\gamma') = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}\right) = \frac{d}{dt}(\dot{\gamma})\frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right) \cdot \dot{\gamma} = \frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} + \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)' \dot{\gamma}$

$$\det(\gamma', \gamma'') = \det\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}, \frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} + \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)' \cdot \dot{\gamma}\right) = \det\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}, \frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2}\right) + \underbrace{\det\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}, \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)' \dot{\gamma}\right)}_{=0 \text{ bo } \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|},\ \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)' \dot{\gamma} \text{ l. zal.}} = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3} \quad \square$$

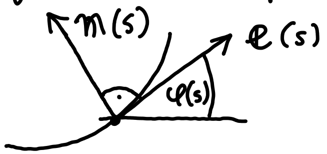
W szczególności $\varkappa(x) = \dfrac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$ dla krzywej danej w postaci wykresu $y=f(x)$

Przykład. $\gamma(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$ $\quad a,b>0$ $\quad \varkappa(t)=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$ zał., że $a>b$. Wtedy

$\varkappa(t)$ osiąga max $\frac{a}{b^2}$ w punktach $(\pm a, 0)$ oraz min $\frac{b}{a^2}$ w punktach $(0,\pm b)$

Interpretacja analityczna krzywizny.

$\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ parametryzacja długością łuku $\quad e(s)=\gamma'(s) \quad |e(s)|=1 \quad e(s)\in\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C} \quad e(s)=e^{i\varphi(s)}$



$$\gamma''(s)=(e(s))'=\frac{d}{ds}\left(e^{i\varphi(s)}\right)=\frac{d}{ds}\varphi(s)\cdot i\,e^{i\varphi(s)} \qquad |i\,e^{i\varphi(s)}|=|i|\cdot|e^{i\varphi(s)}|=1\cdot1=1$$

$i\,e^{i\varphi(s)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\varphi(s)}=e^{i(\varphi(s)+\frac{\pi}{2})} \Rightarrow i\,e^{i\varphi(s)}$ powstaje przez obrót o $\measuredangle\frac{\pi}{2}$ w lewo wektora $e(s)=e^{i\varphi(s)} \Rightarrow i\,e^{i\varphi(s)}=n(s)$

$$\gamma''(s)=\frac{d\varphi}{ds}(s)\,n(s) \quad i \quad \gamma''(s)=\varkappa(s)\,n(s) \Rightarrow \varkappa(s)=\frac{d\varphi}{ds}(s)$$

s-parametr długości łuku

Interpretacja geometryczna krzywizny

Rozważmy okręgi styczne do krzywej γ w punkcie $\gamma(s)$. Wszystkie one przechodzą przez $\gamma(s_0)$ i są styczne do $\gamma'(s_0)=e(s_0)$. Stąd ich środki leżą na prostej $\{\gamma(s_0)+r\,n(s_0)\mid r\in\mathbb{R}\}$. Wybierzmy taki układ współrzędnych, że $(0,0)=\gamma(s_0)$, oś OX to $\{\gamma(s_0)+r\,e(s_0)\mid r\in\mathbb{R}\}$ a oś OY to $\{\gamma(s_0)+r\,n(s_0)\mid r\in\mathbb{R}\}$.

W tym układzie $\gamma'(s_0)=e(s_0)=(1,0)$, $\gamma''(s_0)=\varkappa(s_0)\cdot(0,1)=(0,\varkappa(s_0))$, a okręgi styczne mają postać $x^2+(y-r)^2=r^2$ czyli $x^2+y^2-2ry=0$. Wybierzmy wśród nich „najbardziej" styczny styczny do krzywej γ. W tym celu postawimy $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ do równania okręgu $x^2+y^2-2ry=0$

$f(s)=(x(s))^2+(y(s))^2-2r\,y(s)$, $\quad \varphi(s_0)=(0,0)$ Więc $f(s_0)=0$, $\quad f'(s)=2x(s)\cdot x'(s)+2y(s)\,y'(s)-2r\,y'(s)$

$$f'(s_0) = 2x(s_0)\cdot x'(s_0) + 2y(s_0)\cdot y'(s_0) - 2r y'(s_0) = 0, \quad \text{bo} \quad x'(s_0) = 1 \quad y'(s_0) = 0$$

$$f''(s) = 2x'(s)\cdot x'(s) + 2x(s)x''(s) + 2y'(s)y'(s) + 2y(s)y''(s) - 2r y''(s)$$

$$f''(s_0) = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0\,\varkappa(s_0) - 2r\,\varkappa(s_0) = 0 \iff r = \frac{1}{\varkappa(s_0)}$$

Okrąg najbardziej styczny do krzywej w $\gamma(s_0)$ ma środek $\left(0, \frac{1}{\varkappa(s_0)}\right)$ i promień $\frac{1}{|\varkappa(s_0)|}$

Ten okrąg nazywamy ściśle stycznym. Jest dokładnie jeden. Środek okręgu ściśle stycznego to środek krzywizny.

Promień okręgu ściśle stycznego to promień krzywizny $\rho = \frac{1}{|\varkappa(s_0)|}$.

Współrzędne środka krzywizny to $\gamma(s_0) + \frac{1}{\varkappa(s_0)} n(s_0)$. Równanie okręgu ściśle stycznego:

$$z(t) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\varkappa(s_0)} n(s_0) + \frac{1}{|\varkappa(s_0)|} e^{it}$$

Inny sposób (z parametryzacji okręgu)

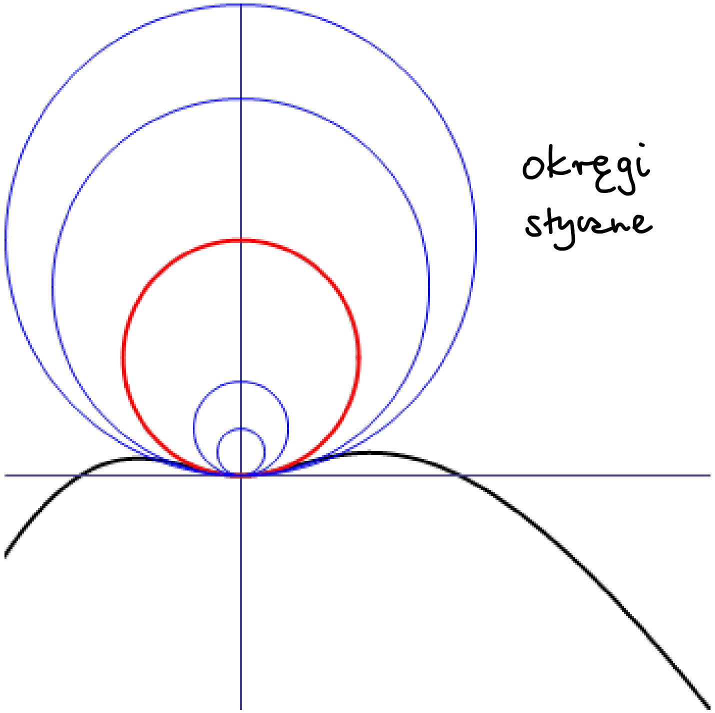
$$\varphi_1(s) = r\cos\frac{s}{r} \qquad \varphi_2(s) = r\sin\frac{s}{r} + r$$

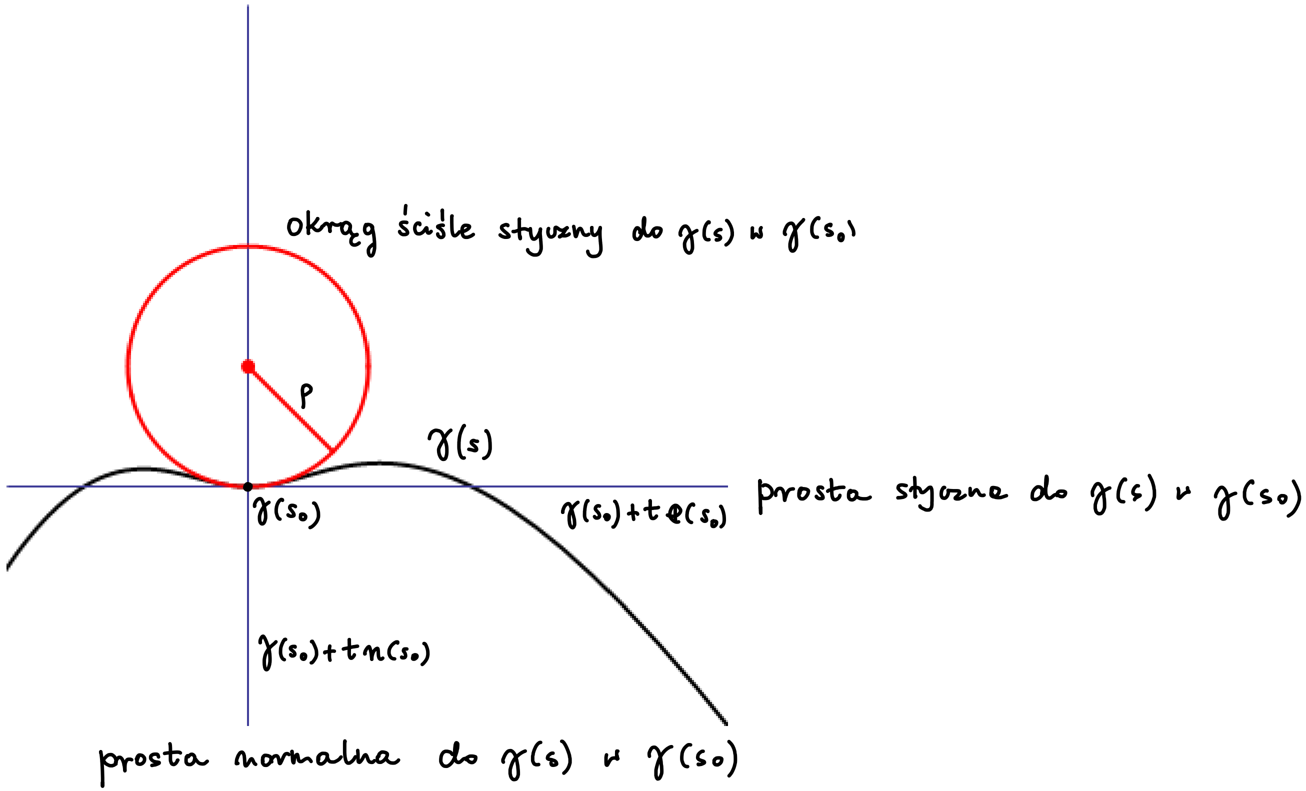
$$\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = r\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \varphi_2\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = r\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + r = 0$$

$$\varphi_1'(s) = -\sin\frac{s}{r} \qquad \varphi_2'(s) = \cos\frac{s}{r} \qquad \varphi_1'\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \varphi_2'\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = 0$$

$$\varphi_1''(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r} \qquad \varphi_2''(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r} \qquad \varphi_1''\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = -\frac{1}{r}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \varphi_2''\left(-\frac{\pi}{2}r\right) = -\frac{1}{r}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{r}$$

$$\gamma(s_0) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}r\right) \qquad \gamma'(s_0) = \varphi'\left(-\frac{\pi}{2}r\right) \qquad \gamma''(s_0) = (0, \varkappa(s_0)) \qquad \gamma''(s_0) = \varphi''\left(-\frac{\pi}{2}r\right) \iff \boxed{\varkappa(s_0) = \frac{1}{r}}$$


okręgi
styczne


okrąg ściśle styczny do $\gamma(s)$ w $\gamma(s_0)$
ρ
$\gamma(s)$
prosta styczna do $\gamma(s)$ w $\gamma(s_0)$
$\gamma(s_0)$
$\gamma(s_0)+te(s_0)$
$\gamma(s_0)+tn(s_0)$
prosta normalna do $\gamma(s)$ w $\gamma(s_0)$

Dwie krzywe płaskie regularne

1) Opisana równaniem $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\} = F^{-1}(0)$

$F \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ $D \subset \mathbb{R}^2$ otwarty $dF|_{(x,y)} \neq 0$ dla $F(x,y) = 0$

2) Zadana przez parametryzację $\gamma(s) = (x(s), y(s))$

$\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ $I \subset \mathbb{R}$ przedział

γ – parametryzacja łukowa $|\gamma'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} = 1$

$c(s) = F(\gamma(s))$ – funkcja kontaktu

Stw.

$c(s_0) = 0 \iff \gamma(s_0) \in F^{-1}(0)$

Dowód.: $c(s_0) = F(\gamma(s_0)) = 0$ $\square$

Stw. $\gamma(s_0) \in F^{-1}(0)$ i $\gamma'(s_0) \in T_{\gamma(s_0)} F^{-1}(0) \iff c(s_0) = c'(s_0) = 0$

Dowód.: $c'(s) = \frac{d}{ds}(F(\gamma(s)) = \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(s)) \cdot x'(s) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(s)) \cdot y'(s) = 0$

$\alpha(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in F^{-1}(0)$ czyli $F(\alpha(t)) = F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = 0$

$0 = \frac{d}{dt}(F(\alpha(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t))\tilde{x}'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(t))\tilde{y}'(t) = 0$

$\alpha'(t) = (\tilde{x}'(t), \tilde{y}'(t))$ to wektor styczny do $F^{-1}(0)$ w $\alpha(t)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t))\,\tilde{x}'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(t))\cdot \tilde{y}'(t) = 0$

czyli $\frac{d}{ds}(c(s))\Big|_{s=s_0} = \frac{d}{ds}(F(\gamma(s)))\Big|_{s=s_0} = 0 \Leftrightarrow \gamma'(s_0) \in T_{\gamma(s_0)} F^{-1}(0)$ $\square$

Stw. $\gamma(s_0) \in F^{-1}(0)$, $\gamma'(s_0) \in T_{\gamma(s_0)} F^{-1}(0)$ oraz $\varkappa_\gamma(s_0) = \varkappa_{F^{-1}(0)}(\gamma(s_0)) \Leftrightarrow$

$$c(s_0) = c'(s_0) = c''(s_0) = 0$$

Dowód.: $F(x,y) = 0$ rozwikłujemy w otoczeniu $\gamma(s_0) = (x(s_0), y(s_0))$

$dF|_{\gamma(s_0)} \neq 0$ zał., że $\frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(s_0)) \neq 0$ wtedy $\exists\, \varphi \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ $y = \varphi(x) \Leftrightarrow$

$F(x,y) = 0$ w otoczeniu $\gamma(s_0)$. $\quad y(s_0) = \varphi(x(s_0))$

$$c(s) = y(s) - \varphi(x(s)) \qquad c'(s_0) = y'(s_0) - \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0)) \cdot x'(s_0) = 0$$

$$c''(s_0) = y''(s_0) - \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0)) \cdot (x'(s_0))^2 - \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0)) \cdot x''(s_0) = 0$$

$$(x'(s_0))^2 + (y'(s_0))^2 = 1 \qquad (y'(s_0))^2 = 1 - (x'(s_0))^2$$

$$y'(s_0) = \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0)) \cdot x'(s_0) \quad (*) \quad (y'(s_0))^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2 (x'(s_0))^2$$

$$1 - (x'(s_0))^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2 (x'(s_0))^2 \qquad (x'(s_0))^2 \left(1 + \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2\right) = 1$$

$$(x'(s_0))^2 = \left(1 + \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2\right)^{-1} \quad (**)$$

$n(s_0) = (-y'(s_0), x'(s_0)) \qquad e(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0)) \qquad \gamma''(s_0) = \varkappa_\gamma(s_0)\cdot n(s_0)$

$x''(s_0) = -\varkappa_\gamma(s_0) y'(s_0) \qquad y''(s_0) = \varkappa_\gamma(s_0)\, x'(s_0)$

$$c''(s_0) = y''(s_0) - \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))\cdot(x'(s_0))^2 - \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\cdot x''(s_0)$$

$$\varkappa_\gamma(s_0)\, x'(s_0) - \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))\cdot(x'(s_0))^2 + \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\cdot \varkappa_\gamma(s_0)\, y'(s_0) = 0 \qquad y'(s_0) = \frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\cdot x'(s_0)$$

$$\varkappa_\gamma(s_0)\left(x'(s_0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2 x'(s_0)\right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))\cdot(x'(s_0))^2$$

$$\varkappa_\gamma(s_0)\left(1 + \left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2\right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))\cdot x'(s_0)$$

$$\varkappa_\gamma(s_0) = \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))}{1+\left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2}} = \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x(s_0))}{\left(1+\left(\frac{d\varphi}{dx}(x(s_0))\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \varkappa_{F^{-1}(0)}(\gamma(s_0))$$

<u>Stąd</u>

$$\boxed{\varkappa_\gamma(s_0) = \varkappa_{F^{-1}(0)}(\gamma(s_0))} \qquad \square$$