Powierzchnie

Co to jest powierzchnia?

Przykłady: 1) wykresy funkcji gładkich $D \subset \mathbb{R}^2$ otwarty $f: D \to \mathbb{R}$ gładka $\operatorname{graph} f = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$

a) $f(x,y) = ax + by + c$ $a,b,c \in \mathbb{R}$ stałe $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graph f to płaszczyzna

b) $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $a,b>0$ stałe graph f to paraboloida eliptyczna

c) $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $a,b>0$ stałe graph f to paraboloida hiperboliczna

2) Powierzchnie przedstawione jako funkcje uwikłane $F(x,y,z)=0$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gładka $F^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$ $F(x_0,y_0,z_0) = 0 \Rightarrow dF_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$ to $F^{-1}(0)$ to powierzchnia gładka

a) $F(x,y,z) = ax+by+cz+d = 0$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ stałe $F^{-1}(0)$ to płaszczyzna

b) $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ $a,b,c>0$ elipsoida, $a=b=c$ to $F^{-1}(0)$ to S^2 (2-wymiarowa sfera)

c) $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$ to $F^{-1}(0)$ to hiperboloida jednopowłokowa

d) $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1$ to $F^{-1}(0)$ to hiperboloida dwu-powłokowa

e) $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(z^2-x^2-y^2)$ $F(0,0,0) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2+y^2+z^2) + 2a^2x$ $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 4y(x^2+y^2+z^2) + 2a^2y$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial z} = 4z(x^2+y^2+z^2) - 2a^2z$ $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 0$

$F(0,0,0) = 0$ $dF_{(0,0,0)} = 0$ nie są spełnione zał. tw. o funkcji uwikłanej

Def. Punkt (x_0,y_0,z_0) nazywamy punktem osobliwym powierzchni $F^{-1}(0)$ jeśli $F(x_0,y_0,z_0) = 0$

oraz $dF_{(x_0,y_0,z_0)} = 0$

Powierzchnie zadane przez parametryzację $p : D \to \mathbb{R}^3$ gładka, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ otwarty

$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad (u,v)$ – parametry

a) $x := a \cos u \cos v$, $y := b \cos u \sin v$, $z = c \sin u$ $\quad D = \{(u,v) \mid |u| < \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq v < 2\pi\}$ elipsoida

b) $x := a \cosh u \cos v$ $\quad y := b \cosh u \sin v$ $\quad z := c \sinh u$ $\quad D = \{(u,v) \mid u \in \mathbb{R} \quad 0 \leq v < 2\pi\}$ hiperboloida jednopowłokowa

c) górna powłoka hiperboloidy dwupowłokowej

$x := a \sinh u \cos v$ $\quad y := \sinh u \sin v$ $\quad z := c \cosh u$ $\quad D = \{(u,v) \mid u \in \mathbb{R} \quad 0 \leq v < 2\pi\}$

d) obrócona lemniskota $\quad D = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq \pi \quad 0 \leq v < 2\pi\}$

$$x := \frac{a \sin u \cos u \cos v}{1 + \sin^2 u} \qquad y := \frac{a \sin u \cos u \sin v}{1 + \sin^2 u} \qquad z := \frac{a \cos u}{1 + \sin^2 u}$$

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad p_u = \frac{\partial p}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \qquad p_v = \frac{\partial p}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

Def. Punkt $p(u,v)$ jest regularny jeśli p_u, p_v są l. niezależne.

Punkt $p(u,v)$ jest osobliwy jeśli p_u, p_v są l. zależne.

Parametryzacja $p : D \to \mathbb{R}^3$ gładka zadaje powierzchnię regularną jeśli $\forall (u,v) \in D$ $p_u(u,v)$ i $p_v(u,v)$ są l. niezależne.

Przykład. $p(u,v) := (u, v, f(u,v))$, gdzie $f : D \to \mathbb{R}$ gładka

Powierzchnia zadana przez p to graph f $\quad p_u = (1, 0, f_u)$, $p_v = (0, 1, f_v)$ są l. niezależne. Stąd graph f jest powierzchnią regularną.

$u \mapsto p(u,v)$ dla ustalonego v, $v \mapsto p(u,v)$ dla ustalonego u to krzywe na powierzchni

p_u i p_v to wektory styczne do powierzchni $\quad T_{p(u,v)} S = \{ p(u,v) + s p_u(u,v) + t p_v(u,v) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$

Tw. Jeżeli $p : D \ni (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ gładka parametryzacja oraz $p_u(u_0,v_0)$ i $p_v(u_0,v_0)$ są liniowo niezależne to $\exists\, U \ni (u_0,v_0)$ otoczenie takie, że $p(U)$ jest powierzchnią gładką.

Dowód: $p_u(u_0,v_0)$ i $p_v(u_0,v_0)$ są l. niezal. $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{bmatrix} = 2$ załóżmy, że $\det\begin{bmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{bmatrix} \neq 0$

$X = x(u,v) \quad Y = y(u,v) \quad U = u(x,y) \quad V = v(x,y) \quad x(u(x,y), v(x,y)) = x \quad y(u(x,y), v(x,y)) = y$

$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ mapa $\square$

$p_u(u,v)$, $p_v(u,v)$ wektory styczne do $S = p(U)$

$\nu = \dfrac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ – jednostkowy wektor normalny do $S = p(U)$

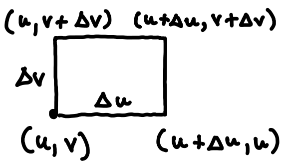
$(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y)) \qquad S = \operatorname{graph} f \qquad \nu = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$

Przykład: elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\quad z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ parametryzacja elipsoidy w otoczeniu $(0,0,\pm c)$

$p(u,v)$ – lokalna parametryzacja $\quad (u,v)$ – lokalny układ współrzędnych

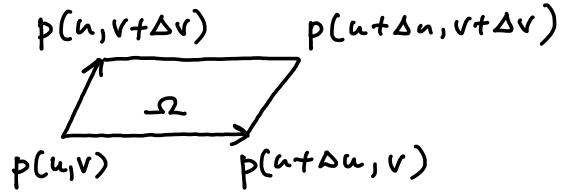
Pole powierzchni

$p : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja powierzchni



$p(u+\Delta u, v) - p(u,v) \approx p_u(u,v)\Delta u \qquad p(u,v+\Delta v) - p(u,v) \approx p_v(u,v)\Delta v$

$p(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx p_u(u,v)\Delta u + p_v(u,v)\Delta v$



Pole równoległoboku Ω to $|(p_u(u,v)\cdot\Delta u)\times(p_v(u,v)\,\Delta v)| = |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$

$$\iint_{\overline{D}} |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,du\,dv \simeq |p(\overline{D})| \text{ - pole powierzchni } p(\overline{D})$$

$$dA = |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,du\,dv \text{ - element powierzchni powierzchni } p(\overline{D})$$

$S = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in\overline{D} \quad z = f(x,y)\}$ $\qquad \iint_{\overline{D}} \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy$

Pierwsza forma podstawowa

$\Delta f = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v) \approx f_u(u,v)\,\Delta u + f_v(u,v)\,\Delta v \qquad df(u,v) = f_u(u,v)du + f_v(u,v)dv \qquad u = u(\xi,\eta) \quad v = v(\xi,\eta)$

$du(\xi,\eta) = u_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + u_\eta(\xi,\eta)\,d\eta \qquad dv(\xi,\eta) = v_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + v_\eta(\xi,\eta)\,d\eta$

$df = f_u\,du + f_v\,dv = f_u(u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta) + f_v(v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta) = (f_u u_\xi + f_v v_\xi)\,d\xi + (f_u u_\eta + f_v v_\eta)\,d\eta = f_\xi\,d\xi + f_\eta\,d\eta$

df jest dobrze zdefiniowane (nie zależy od wyboru parametryzacji

Własności różniczki

$d(f+g) = df + dg \qquad d(f\cdot g) = g\,df + f\,dg \qquad d(\varphi(f)) = \dot\varphi(f)\,df \qquad \varphi = \varphi(t) \qquad \dot\varphi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$

Przykład $\quad f(u,v) = u^2 - v^2 \qquad df = 2u\,du - 2v\,dv \qquad \xi = u+v \quad \eta = u-v \qquad f(\xi,\eta) = \xi\eta \qquad df = \eta\,d\xi + \xi\,d\eta$

$u = \frac{\xi+\eta}{2} \qquad v = \frac{\xi-\eta}{2}$

$d\xi = du + dv \qquad du = \frac{d\xi + d\eta}{2} \qquad df =$

$d\eta = du - dv \qquad dv = \frac{d\xi - d\eta}{2}$

$df = \eta\,d\xi + \xi\,d\eta = (u-v)(du+dv) + (u+v)(du-dv) =$

$= 2u\,du - 2v\,dv$

Pierwsza forma podstawowa Δs odległość między $p(u,v)$ i $p(u+\Delta u, v+\Delta v)$

$$(\Delta s)^2 = |p(u+\Delta u, v+\Delta v) - p(u,v)|^2 \approx |p_u(u,v)\Delta u + p_v(u,v)\Delta v|^2 = (p_u(u,v)\cdot p_u(u,v))(\Delta u)^2 + 2p_u(u,v)p_v(u,v)\,\Delta u\cdot\Delta v$$
$$+ p_v(u,v)\cdot p_v(u,v))(\Delta v)^2$$

$w\in\mathbb{R}^3 \quad |w|^2 = w\cdot w$

$E := p_u\cdot p_u \quad F = p_u\cdot p_v \quad G = p_v\cdot p_v \quad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ pierwsza forma podstawowa

$$ds^2 = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}$ – macierz I formy podstawowej

$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ – parametryzacja

$dp = p_u\,du + p_v\,dv \qquad ds^2 = dp\cdot dp = p_u\cdot p_u\,du^2 + 2p_u\cdot p_v\,du\,dv + p_v\cdot p_v\,dv^2$

$ds^2 = dp\cdot dp \qquad dp = (dx, dy, dz)$ dx jest niezmiennicze ze względu na zamianę zmiennych $\Rightarrow$ ds^2 niezmiennicze ze względu na zamianę zmiennych

$u = u(\xi,\eta) \quad v = v(\xi,\eta) \qquad du = u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta \quad dv = v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

$$= E(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta)^2 + 2F(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta)\cdot(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta) + G(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta)^2 =$$
$$= E(u_\xi^2 d\xi^2 + 2u_\xi u_\eta d\xi d\eta + u_\eta^2 d\eta^2) + 2F(u_\xi v_\xi d\xi^2 + u_\xi v_\eta d\xi d\eta + u_\eta v_\xi d\xi d\eta + u_\eta v_\eta d\eta^2) +$$
$$+ G(v_\xi^2 d\xi^2 + 2v_\xi v_\eta d\xi d\eta + v_\eta^2 d\eta^2) =$$
$$= (E u_\xi^2 + 2F u_\xi v_\xi + G v_\xi^2) d\xi^2 + 2(E u_\xi u_\eta + F(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + v_\eta v_\xi) d\xi d\eta +$$
$$+ (E u_\eta^2 + 2F u_\eta v_\eta + G v_\eta^2) d\eta^2$$

$$\tilde{E} = p_\xi\cdot p_\xi = (E u_\xi^2 + 2F u_\xi v_\xi + G v_\xi^2) \qquad \tilde{F} = p_\xi\cdot p_\eta = (E u_\xi u_\eta + F(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + v_\eta v_\xi)$$
$$\tilde{G} = p_\eta\cdot p_\eta = (E u_\eta^2 + 2F u_\eta v_\eta + G v_\eta^2)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde E & \tilde F\\ \tilde F & \tilde G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_\xi & u_\eta\\ v_\xi & v_\eta\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_\xi & u_\eta\\ v_\xi & v_\eta\end{pmatrix}$$

Przykład. Stożek $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad f(x,y) = r \quad p(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r) \quad dp = (\cos\varphi,\sin\varphi,1)\,dr + (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\,d\varphi$

$$ds^2 = dp\cdot dp = (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1)\,dr^2 + (-r\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi + 0)\,dr\,d\varphi + r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+0^2)\,d\varphi^2 = 2\,dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

we współ. (x,y): $ds^2 = \left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)dx^2 + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \left(1+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dy^2$

Powierzchnia i I forma podstawowa

$|p_u\times p_v|^2 = (p_u\cdot p_u)(p_v\cdot p_v) - (p_u\cdot p_v)^2 = EG-F^2$ $\quad$ Dowód $\quad a = p_u \quad b = p_v$

$|a\times b| = |a||b|\sin\sphericalangle(a,b) \qquad a\cdot b = |a||b|\cos\sphericalangle(a,b)$

$\sin\sphericalangle(a,b) = \frac{|a\times b|}{|a||b|} \qquad \cos\sphericalangle(a,b) = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} \qquad \sin^2\sphericalangle(a,b)+\cos^2\sphericalangle(a,b) = 1$

$$\frac{|a\times b|^2}{|a|^2|b|^2} + \frac{(a\cdot b)^2}{|a|^2|b|^2} = 1 \qquad |a\times b|^2 + (a\cdot b)^2 = |a|^2|b|^2 \qquad |a\times b| = |a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2$$

Tożsamość Lagrange'a $\square$

$dA = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ – powierzchnia powierzchni może być policzona z I formy podstawowej

Przykład. torus: $p(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$ $\quad 0\le u,v\le 2\pi \quad 0<b<a$

$dp = b(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)\,du + (a+b\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)\,dv$

$ds^2 = b^2du^2 + (a+b\cos u)^2dv^2 \qquad E = b^2 \quad F = 0 \quad G = (a+b\cos u)^2$

$dA = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = b(a+\cos u)\,du\,dv \qquad \iint_{\{0\le u,v\le 2\pi\}} b(a+b\cos u)\,du\,dv = 2\pi^2 ab$

$x \in T_{p(u_0,v_0)} S \qquad x = x_1 p_u(u_0,v_0) + x_2 p_v(u_0,v_0) \qquad y \in T_{p(u_0,v_0)} S \qquad y = y_1 p_u(u_0,v_0) + y_2 p_v(u_0,v_0)$

$x \cdot y = x_1 y_1 \, p_u(u_0,v_0) \cdot p_u(u_0,v_0) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \, p_u(u_0,v_0) \cdot p_v(u_0,v_0) + x_2 y_2 \, p_v(u_0,v_0) \cdot p_v(u_0,v_0)$

$x \cdot y = x_1 y_1 E + (x_1 y_2 + x_2 y_1) F + x_2 y_2 G \qquad x \cdot y = (x_1, x_2) \, \hat{I} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$|x| = \sqrt{E x_1^2 + 2F x_1 x_2 + G x_2^2}$

$(u(t), v(t))$ – krzywe $\qquad \gamma(t) = p(u(t), v(t))$ krzywe na $S \qquad \dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t) \, p_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t) \, p_v(u(t), v(t))$

$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt = \int_a^b (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt$ – długość krzywej $\gamma(t)$ na powierzchni S

$(u_1(t), v_1(t))$, $(u_2(t), v_2(t))$ krzywe $\qquad \gamma_1(t) = p(u_1(t), v_1(t)) \qquad \gamma_2(t) = p(u_2(t), v_2(t))$ – krzywe na powierzchni S

zał, że $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. Niech θ będzie $\measuredangle$ między $\dot{\gamma}_1(t)$ i $\dot{\gamma}_2(t)$. Wtedy

$$\cos\theta = \frac{E \dot{u}_1 \dot{u}_2 + F(\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{u}_2 \dot{v}_1) + G \dot{v}_1 \dot{v}_2}{(E \dot{u}_1^2 + 2F \dot{u}_1 \dot{v}_1 + G \dot{v}_1^2)^{\frac{1}{2}} (E \dot{u}_2^2 + 2F \dot{u}_2 \dot{v}_2 + G \dot{v}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

W szczególności dla $E = G$ i $F = 0$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{\dot{u}_1 \dot{v}_1 + \dot{u}_2 \dot{v}_2}{(\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2)^{\frac{1}{2}} (\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos \measuredangle((\dot{u}_1, \dot{v}_1), (\dot{u}_2, \dot{v}_2))$

Współrzędne dla których $E = G$ i $F = 0$ nazywamy współrzędnymi izotermicznymi.

$\mathcal{L}(p(u(t), v(t))) = \int_a^b (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt$ może nie być równa $\mathcal{L}(u(t), v(t)) = \int_a^b (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt$

Tw. Niech $p : D \to \mathbb{R}^3$ będzie regularną parametryzacją powierzchni.

$\forall \, (u(t), v(t))$ $t \in [a, b]$ krzywej gładkiej w D $\qquad \mathcal{L}(p(u(t), v(t))) = \mathcal{L}(u(t), v(t)) \iff$

$E = G = 1$ i $F = 0$ na D

Dowód.: $\Leftarrow$ oczywiste $E=G=1$ i $F=0$ to $\mathcal{L}(p(u(t),v(t))) = \int_a^b (\dot{u}^2+\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}}\,dt = \mathcal{L}(u(t),v(t))$

$\Rightarrow$ $(u(t),v(t)) = (u_0 + t\cos\alpha,\ v_0 + t\sin\alpha)$ $t\in[0,c]$ $\mathcal{L}(u(t),v(t)) = \int_0^c (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}\,dt = \int_0^c 1\,dt = c$

$\mathcal{L}(p(u(t),v(t))) = \int_0^c (E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}dt = c = \mathcal{L}(u(t),v(t))$ $\Big/ \frac{d}{dc}$

$E(u(c),v(c))\cos^2\alpha + 2F(u(c),v(c))\cos\alpha\sin\alpha + G(u(c),v(c))\sin^2\alpha = 1$ $\Big/ \lim_{c\to 0}$

$$E(u_0,v_0)\cos^2\alpha + 2F(u_0,v_0)\cos\alpha\sin\alpha + G(u_0,v_0)\sin^2\alpha = 1$$

$\alpha = 0 \Rightarrow E(u_0,v_0)=1$, $\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow G(u_0,v_0)=1$, $\cos^2\alpha + 2F(u_0,v_0)\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$1 + F(u_0,v_0)\cos\alpha\sin\alpha = 1 \Rightarrow F(u_0,v_0)=0$ i $(u_0,v_0)\in D$ dowolny.

Stąd $E=G=1$ i $F=0$ na D ∎

$p: D\to\mathbb{R}^3$ takie, że $E\equiv G\equiv 1$ i $F\equiv 0$ na D nazywamy przekształceniem zachowującym odległość i kąt.

Lemat. zał. $A^T = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Teza Wartości własne są dodatnie $\Leftrightarrow$ $a_{11}>0$ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$

Dowód. $\det(A-\lambda I) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = 0$ $a_{11}+a_{22} = \lambda_1+\lambda_2 > 0$ $\underset{\lambda_1\cdot\lambda_2}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{11}^2} > 0$

$a_{11}\cdot a_{22} > a_{12}^2$ $a_{11}\cdot a_{22}>0 \Rightarrow a_{11}>0 \Rightarrow a_{22}>0$

$\Rightarrow$ $a_{11}+a_{22}>0$ i $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \Leftrightarrow a_{11}>0$ i $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ ∎